В.И. Шалак

ЛОГИКА АБЕЛЕВЫХ ГРУПП*

Abstract. *In this paper we construct implicational logic which is complete with respect to abelian groups.*

Def1. *Язык*

1. p, q, r… $\in$ Var – множество пропозициональных переменных;
2. $\rightarrow$ – логические связки;
3. (,)– скобки.

Def2. *Формулы*

1. Всякая пропозициональная переменная является формулой;
2. Если A, B - формулы, то $(A\rightarrow B)$ также является формулой;
3. Ничто другое формулой не является.

Def3. *Абелева группа* **Ab**=<M,+,-,0>, где $0\in M$, + – бинарная, а - – унарная операции, для которых выполняются следующие постулаты:

4. $x+(y+z)=(x+y)+z$
5. $x+0=x$
6. $x+(-x)=0$
7. $x+y=y+x$

Определим интерпретацию формул в абелевых группах.

Пусть **Ab** – произвольная абелева группа, а $Val=M^{Var}$ – множество всех приписываний значений пропозициональным переменным.

Распространим Val на множество всех формул.

Def4. $v(A\rightarrow B) = -v(A)+v(B)$ для $v\in Val$

Def5. Формула A *общезначима* ($|=A$) е.т.е. для всех абелевых групп **Ab** и для всех $v\in Val$ имеет место $v(A)=0$.

Def6. $\neg A = A\rightarrow(A\rightarrow A)$

Аксиомы абелевой логики

A1. $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$
A2. $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(B\rightarrow(A\rightarrow C))$
A3. $(B\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow A)$

* Работа поддержана РФФИ, грант № 04-03-002660.

A4. $\neg\neg A \to A$
A5. $(B \to A) \to \neg(A \to B)$
A6. $\neg(A \to B) \to (B \to A)$

R1. $A, A \to B \Rightarrow B$

Определения доказательства из множества аксиом и теоремы – стандартные. Если A – теорема, будем обозначать это посредством $|\text{-}A$.

Теорема непротиворечивости. Все теоремы построенной логики общезначимы.

Достаточно проверить, что для произвольной абелевой группы **Ab** и произвольного приписывания v все аксиомы принимают значение 0, а единственное правило вывода сохраняет значение 0 от посылок к заключению.

Примем обозначения $v(A) = a$, $v(B) = b$, $v(C) = c$.

A0. $v(\neg A) = v(A \to (A \to A)) = -v(A)-v(A)+v(A) = -v(A)$

A1. $v((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))) = -v(A \to B)-v(B \to C) +v(A \to C) = -(-a+b)-(-b+c)-a+c = a-b+b-c-a+c = 0$

A2. $v((A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))) = -v(A \to (B \to C)) +v(B \to (A \to C)) = -(-a+-b+c)-b-a+c = a+b-c-b-a+c = 0$

A3. $v((B \to B) \to (A \to A) = -v(B \to B)+v(A \to A) = -(-v(B)+v(B)) +-v(A)+v(A) = -(-b+b)-a+a = b+-b-a+a = 0$

A4. $v(\neg\neg A \to A) = -v(\neg\neg A)+v(A) = --v(\neg A)+a = ---a+a = -a+a = 0$

A5. $v((B \to A) \to \neg(A \to B)) = -v(B \to A)+v(\neg(A \to B)) = --b-a -v(A \to B) = b-a--a-b = b-a+a-b = 0$

A6. $v(\neg(A \to B) \to (B \to A)) = -v(\neg(A \to B))+v(B \to A) = --v(A \to B) -b+a = v(A \to B)-b+a = -a+b-b+a = 0$

R1.

1. $v(A)=0$	- условие
2. $v(A \to B)=0$	- условие
3. $-a+b=0$	- из 2 по Def4.
4. $a-a+b=a+0$	- из 3.
5. $0+b=a$	- из 4 по Def3.
6. $v(B)=0$	- из 5 по 1 и Def3.

Теорема доказана.

Лемма 1. Следующие правила вывода производны, а формулы являются теоремами абелевой логики:

R2. $|\text{-}A \to B, |\text{-}B \to C \Rightarrow |\text{-}A \to C$

R3. $\vdash A\to(B\to C) \Rightarrow \vdash B\to(A\to C)$
R4. $\vdash A\to B \Rightarrow \vdash \neg B\to\neg A$

T1. $\vdash (B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$
T2. $\vdash A\to\neg\neg A$
T3. $\vdash A\to A$
T4. $\vdash (A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$

Доказательство R2 и R3 тривиально на основании аксиом A1 и A2.

T1.

1. $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$	- аксиома A1.
2. $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$	- из 1 по R3.

T2.

1. $(A\to A)\to\neg(A\to A)$	- аксиома A5.
2. $\neg(A\to A)\to(A\to A)$	- аксиома A6.
3. $(A\to A)\to(A\to A)$	- из 1, 2 по R2.
4. $A\to((A\to A)\to A)$	- из 3 по R3.
5. $((A\to A)\to A)\to\neg(A\to(A\to A)$	- аксиома A5.
6. $A\to\neg(A\to(A\to A)$	- из 4, 5 по R2.
7. $A\to\neg\neg A$	- из 6 по Def6.

T3.

1. $A\to\neg\neg A$	- T2.
2. $\neg\neg A\to A$	- аксиома A4.
3. $A\to A$	- из 1, 2 по R2.

T4.

1. $(B\to B)\to(A\to A)$	- аксиома A3.
2. $((B\to B)\to(A\to A))\to((B\to(B\to B))\to(B\to(A\to A)))$	- T1.
3. $(B\to(B\to B))\to(B\to(A\to A))$	- из 1, 2 по R1.
4. $(B\to(A\to A))\to((A\to B)\to(A\to(A\to A)))$	- T1.
5. $(B\to(B\to B))\to((A\to B)\to(A\to(A\to A)))$	- из 3, 4 по R2.
6. $(A\to B)\to((B\to(B\to B))\to(A\to(A\to A)))$	- из 5 по R3.
7. $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$	- из 6 по Def6.

Доказательство R4 тривиально на основании T4.

Лемма доказана.

Лемма 2. Следующие правила вывода являются допустимыми:

R5 $\vdash A \Rightarrow \vdash \neg A$
R6 $\vdash A\to B \Rightarrow \vdash B\to A$

Доказательство.

R5

Для доказательства этого правила достаточно показать, что вместе с каждой аксиомой логики доказуемо ее отрицание, а также производна негативная формулировка правила R1:

R1’. $\neg A, \neg(A \to B) \Rightarrow \neg B$

A1’.
1. $(B\to A)\to((A\to C)\to(B\to C))$ - A1.
2. $\neg((A\to C)\to(B\to C))\to\neg(B\to A)$ - из 1 по R4.
3. $\neg(B\to A)\to(A\to B)$ - A6.
4. $\neg((A\to C)\to(B\to C))\to(A\to B)$ - из 2, 3 по R2.
5. $((B\to C)\to(A\to C))\to\neg((A\to C)\to(B\to C))$ - A5.
6. $((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to B)$ - из 4, 5 по R2.
7. $(((B\to C)\to(A\to C))\to(A\to B))\to\neg((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))$ - A5.
8. $\neg((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))$ - из 6, 7 по R1.

A2’.
1. $(B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C))$ - A2.
2. $((B\to(A\to C))\to(A\to(B\to C)))\to\neg((A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C)))$ - A5.
3. $\neg((A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C)))$ - из 1, 2 по R1.

A3’.
1. $(A\to A)\to(B\to B)$ - A3.
2. $((A\to A)\to(B\to B))\to\neg((B\to B)\to(A\to A))$ - A5.
3. $\neg((B\to B)\to(A\to A))$ - из 1, 2 по R1.

A4’.
1. $A\to\neg\neg A$ - T2.
2. $(A\to\neg\neg A)\to\neg(\neg\neg A\to A)$ - A5.
3. $\neg(\neg\neg A\to A)$ - из 1, 2 по R1.

A5’.
1. $\neg(B\to A)\to(A\to B)$ - A6.
2. $(\neg(B\to A)\to(A\to B))\to\neg((A\to B)\to\neg(B\to A))$ - A5.
3. $\neg((A\to B)\to\neg(B\to A))$ - из 1, 2 по R1.

A6’. Аналогично A5’.

R1’.
1. $\neg A$ - посылка
2. $\neg(A\to B)$ - посылка

3. $\neg(A \to B) \to (B \to A)$ - A6.
4. $B \to A$ - из 2, 3 по R1.
5. $\neg A \to \neg B$ - из 4 по R4.
6. $\neg B$ - из 1, 5 по R1.

Допустимость правила R5 доказана.

R6.

1. $A \to B$ - посылка
2. $\neg(A \to B)$ - из 1 по R5.
3. $\neg(A \to B) \to (B \to A)$ - A6.
4. $B \to A$ - из 2, 3 по R1.

Допустимость правила R8 доказана.

Лемма доказана.

Теорема о замене. Следующие правила доказательства являются производными:

R7. $|\text{-}A \to B \Rightarrow |\text{-}F(A) \to F(B)$
R8. $|\text{-}A \to B, |\text{-}F(A) \Rightarrow |\text{-}F(B)$

где F(B) получена из F(A) заменой нуля или более подформул вида A на B.

Доказательство проводим индукцией по степени формулы F.

1.1. F – пропозициональная переменная и $F \neq A$. Тогда $F(A)=F(B)$ и формула $F(A) \to F(B)$ доказуема в силу Т3.

1.2. F – пропозициональная переменная и $F=A$. Тогда формула $F(A) \to F(B)$ доказуема либо в силу Т3, либо по условию теоремы.

2. $F=D \to E$. По индуктивному допущению доказуемы формулы $D(A) \to D(B)$ и $E(A) \to E(B)$. Покажем, что в этом случае будет доказуема формула $(D(A) \to E(A)) \to (D(B) \to E(B))$.

1) $(E(A) \to E(B)) \to ((D(A) \to E(A)) \to (D(A) \to E(B)))$ - T1.
2) $E(A) \to E(B)$ - по инд. допущению
3) $(D(A) \to E(A)) \to (D(A) \to E(B))$ - из 1), 2) по R1.
4) $D(A) \to ((D(A) \to E(A)) \to E(B)))$ - из 3) по R3.
5) $D(B) \to D(A)$ - по инд. допущению
6) $D(B) \to ((D(A) \to E(A)) \to E(B)))$ - из 4), 5) по R2.
7) $(D(A) \to E(A)) \to (D(B) \to E(B))$ - из 6) по R3.

R8.
1) $|\text{-}A \to B$ - условие
2) $|\text{-}F(A)$ - условие

3) $|\text{-}F(A)\to F(B)$ - из 1) по R7.
4) $|\text{-}F(B)$ - из 2), 3) по R1.

Теорема доказана.

Лемма 3. Следующие правила вывода производны, а формулы являются теоремами абелевой логики:

R9. $|\text{-}F(\neg\neg A) \Rightarrow |\text{-}F(A)$

T5. $|\text{-} (\neg A\to B)\to(\neg B\to A)$
T6. $|\text{-} (\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$
T7. $|\text{-} A\to(\neg A\to(B\to B))$

Доказательство правила R9 тривиально с использованием A4, T2 и R8.

T5.

1. $(\neg A\to B)\to(\neg B\to\neg\neg A)$	- T4.
2. $(\neg A\to B)\to(\neg B\to A)$	- из 1 по R9.

T6.

1. $(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg A\to(\neg B\to C))$	- T3.
2. $(\neg B\to C)\to(\neg C\to B)$	- T5.
3. $(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg A\to(\neg C\to B))$	- из 1, 2 по R8.
4. $(\neg A\to(\neg C\to B))\to(\neg C\to(\neg A\to B))$	- аксиома A2.
5. $(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg C\to(\neg A\to B))$	- из 3, 4 по R2.
6. $(\neg C\to(\neg A\to B))\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$	- T5.
7. $(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$	- из 5, 6 по R2.

T7.

1. $A\to\neg\neg A$	- T2.
2. $A\to(\neg A\to(\neg A\to\neg A))$	- из 1 по Def6.
3. $(\neg A\to\neg A)\to(B\to B)$	- аксиома A3.
4. $A\to(\neg A\to(B\to B))$	- из 2, 3 по R8.

Лемма доказана.

Def7. $A\approx B \Leftrightarrow |\text{-}A\to B$ и $|\text{-}B\to A$

Очевидно, что $\approx$ является отношением эквивалентности, т.е. транзитивно, симметрично и рефлексивно.

Def8. $|A| = \{B|\ B\approx A\}$

Определим алгебру Линденбаума для абелевой логики.

Def9. **AbL** = $\langle F/\approx, +, -, 0\rangle$, где $F/\approx$ – множество всех классов эквивалентности для формул абелевой логики. Операции задаются следующими условиями:

1. $|A|+|B| = |\neg A \to B|$
2. $-|A| = |\neg A|$
3. $0 = |A \to A|$

В силу А3 в определении константы 0 не имеет значения, какая конкретная формула А выбрана.

Лемма 4. AbL является абелевой группой.

Для доказательства леммы достаточно показать, что операции алгебры обладают следующими свойствами:

1. $|A|+(|B|+|C|) = (|A|+|B|)+|C|$
2. $|A|+0 = |A|$
3. $|A|+(-|A|) = 0$
4. $|A|+|B| = |B|+|A|$

Доказательство.

1. $|A|+(|B|+|C|) = |\neg A \to (\neg B \to C)|$	- Def9.
2. $|\text{-} (\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$	- T6.
3. $|\text{-} (\neg(\neg A \to B) \to C) \to (\neg A \to (\neg B \to C))$	- из 2 по R6.
4. $(\neg A \to (\neg B \to C)) \approx (\neg(\neg A \to B) \to C)$	- из 2, 3 по Def7.
5. $|\neg A \to (\neg B \to C)| = |\neg(\neg A \to B) \to C|$	- из 4 по Def8.
6. $|\neg(\neg A \to B) \to C| = (|A|+|B|)+|C|$	- Def9.
7. $|A|+(|B|+|C|) = (|A|+|B|)+|C|$	- из 1, 5, 6.

1. $|A|+0 = |A|+|B \to B| = |\neg A \to (B \to B)|$	- Def9.
2. $|\text{-} A \to (\neg A \to (B \to B))$	- T7 .
3. $|\text{-} (\neg A \to (B \to B)) \to A$	- из 2 по R6.
4. $(\neg A \to (B \to B)) \approx A$	- из 2, 3 по Def8.
5. $|\neg A \to (B \to B)| = |A|$	- из 4 по Def9.
6. $|A|+0 = |A|$	- из 1, 5.

1. $|A|+(-|A|) = |\neg A \to \neg A| = 0$	- Def9.

1. $|A|+|B| = |\neg A \to B|$	- Def9.
2. $|\text{-} (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$	- T5.
3. $|\text{-} (\neg B \to A) \to (\neg A \to B)$	- T5.
4. $(\neg A \to B) \approx (\neg A \to B)$	- из 2, 3 по Def7.
5. $|\neg A \to B| = |\neg B \to A|$	- из 4 по Def8.
6. $|\neg B \to A| = |B|+|A|$	- Def9.
7. $|A|+|B| = |B|+|A|$	- из 1, 5, 6.

Лемма доказана.

Лемма 5. Если **AbL** – алгебра Линденбаума для абелевой логики, а **v:Var -> F/≈** – функция приписывания значений пропозициональным переменным, задаваемая условием **v**(p)=|p|, то для любой формулы A абелевой логики будет иметь место **v**(A)=|A|.

Доказательство проводим индукцией по построению формулы.

A=B→C

1. v(B) = |B|	- индуктивное допущение.
2. v(C) = |C|	- индуктивное допущение.
3. v(B→C) = -v(B)+v(C)	- Def4.
4. -v(B) = -|B|	- из 1.
5. -|B| = |¬B|	- Def8.
6. -v(B)+v(C) = |¬B|+|C|	- из 2, 4, 5.
7. |¬B|+|C| = |¬¬B→C|	- из 6 по Def9.
8. |- (¬¬B→C)→(B→C)	- теорема абелевой логики
9. |- (B→C)→(¬¬B→C)	- теорема абелевой логики
10. (B→C) ≈ (¬¬B→C)	- из 8, 9 по Def7.
11. |B→C| = |¬¬B→C|	- из 10 по Def8.
12. v(B→C) = |B→C|	- из 3, 6, 7, 11.

Лемма доказана.

Теорема полноты. Всякая общезначимая формула доказуема.

Доказательство.

1. |=B	- допущение.
2. v(B) = 0	- из 1 по Def5 для всякой абелевой группы **Ab**=<M,+,-,0> и всякого приписывания v∈$M^{\mathbf{Var}}$
3. v(B) = |A→A|	- из 2 для **AbL** и приписывания v, задаваемого условием v(p)=|p|.
4. |A→A| = |B|	- из 3 по Лемме 4.
5. (A→A) ≈ B	- из 4 по Def7.
6. |- (A→A)→B	- из 5 по Def6.
7. |- (A→A)	- T3.
8. |- B	- из 6, 7 по R1.

Теорема доказана.