В.И.Шалак

ЛОГИКА ГРУПП И СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ*

Abstract. *In this paper we prove theorem about isomorphism between free groups and Lindenbaum algebra for group logic.*

В настоящей статье будет доказана теорема об изоморфизме между алгеброй Линденбаума для логики групп [1] и свободными группами. Напомним определение логики групп и интерпретацию ее формул.

Def1. *Язык*

1. $Var=\{p_1,p_2,\ldots\}$ – множество пропозициональных переменных;
2. $\to$ - логическая связка;
3. (,) - скобки.

Def2. *Формулы* **FG**

1. $Var\subseteq$**FG**;
2. Если A, B $\in$**FG,** то $(A\to B)\in$**FG**;
3. Ничто другое формулой не является.

Def3. *Группа* **G =** <M,+,-,0>, где $0\in M$, + - бинарная, а - – унарная операции, для которых выполняются следующие постулаты:

1. $x+(y+z) = (x+y)+z$
2. $x+0 = x$
3. $x+(-x) = 0$

Определим интерпретацию формул в группах.

Пусть **G** – произвольная группа, а $Val=M^{\mathbf{Var}}$ – множество всех приписываний значений пропозициональным переменным.

Распространим Val на множество всех формул.

Def4. $v(A\to B) = -v(A)+v(B)$ для $v\in Val$

Def5. Формула A *общезначима* ($|$=A) е.т.е. для всех групп **G** и для всех $v\in Val$ имеет место $v(A)=0$.

Def6. $\neg A = A\to(A\to A)$

Аксиомы логики групп

A1. $(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$

* Работа поддержана РФФИ, грант № 04-03-002660.

A2. $(A \to A) \to (B \to B)$
A3. $A \to \neg\neg A$
A4. $\neg\neg A \to A$
A5. $(A \to B) \to \neg(B \to A)$
A6. $\neg(B \to A) \to (A \to B)$

R1. $A,\ A \to B \Rightarrow B$
R2. $A \to B \Rightarrow (B \to C) \to (A \to C)$

Определение понятия доказуемости и теоремы – стандартные.

В статье [1] была доказана теорема о непротиворечивости и полноте данной логики относительно интерпретации в произвольных группах.

Def7. $A \approx B \Leftrightarrow |\text{-}A \to B$ и $|\text{-}B \to A$

Очевидно, что $\approx$ является отношением эквивалентности, т.е. транзитивно, симметрично и рефлексивно.

Def8. $|A| = \{B|\ B \approx A\}$

Определим *алгебру Линденбаума* **GL** для логики групп.

Def9. **GL** = $<FG/_{\approx}, +, -, 0>$, где $FG/_{\approx} = \{|A|: A \in \mathbf{FG}\}$ – множество всех классов эквивалентности для формул логики групп. Операции задаются следующими условиями:

1. $|A|+|B| = |\neg A \to B|$
2. $-|A| = |\neg A|$
3. $0 = |A \to A|$

В силу A2 в определении константы 0 не имеет значения, какая конкретная формула A выбрана.

Напомним определение понятия *свободной группы* [2].

Пусть задан алфавит $T=\{a_1,\ a_2,\ \ldots\} \cup \{-a_1,\ -a_2,\ \ldots\}$. Конечные последовательности букв в этом алфавите называются *словами*. К числу рассматриваемых слов относим и пустое слово, которое будем обозначать посредством 0. Словом, *обратным* слову $u=b_1b_2\ldots b_n$, будем называть слово $-u=-b_n\ldots-b_2-b_1$. Под $--a_i$ будем понимать просто a_i. *Приведенным* будем называть слово, в котором нигде рядом не стоят буквы a_i и $-a_i$. Суммой двух слов u и v будем называть слово u+v, получаемое путем их конкатенации с последующим выбрасыванием из него всех стоящих рядом букв a_i и $-a_i$, пока не получится приведенное слово. Множество всех приведенных слов с так определенной операцией + образует группу **WG**, называемую *свободной*.

Определим отображение f:**FG**$\to$**WG** из множества формул **FG** логики групп в множество слов свободной группы **WG** в алфавите $T=\{p_1,p_2,\ldots\}\cup\{-p_1,-p_2, \ldots\}$.

Def10.

1. $f(p_i) = p_i$
2. $f(A\to B) = -f(A)+f(B)$

Определим отображение f^{-1}:**WG**$\to$**FG** из множества слов свободной группы **WG** в множество формул **FG** логики групп:

Def11.

1. $f^{-1}(p_i) = p_i$
2. $f^{-1}(-u) = \neg f^{-1}(u)$
3. $f^{-1}(u+v) = \neg f^{-1}(u)\to f^{-1}(v)$
4. $f^{-1}(0) = p_1\to p_1$

Def12. Определим понятие степени слова:

1. $deg(0) = 0$
2. $deg(p_i) = 0$
3. $deg(-u) = deg(u)+1$
4. $deg(u+v) = deg(u)+deg(v)+1$

Лемма 1. $f f^{-1}(u) = u$, $f^{-1}f(A)\approx A$

$f f^{-1}(u) = u$ доказываем индукцией по степени слова u.

Базис.

1. $f f^{-1}(0) = f(p_1\to p_1)$	- Def11.
2. $f(p_1\to p_1) = -f(p_1)+f(p_1)$	- Def10.
3. $-f(p_1)+f(p_1) = 0$	- приведение.
4. $f f^{-1}(0) = 0$	- из 1-3.

1. $f f^{-1}(p_i) = f(p_i)$	- Def11.
2. $f(p_i) = p_i$	- Def10.
3. $f f^{-1}(p_i) = p_i$	- из 1, 2.

Индукционный шаг.

1. $f f^{-1}(u) = u$	- инд. доп.
2. $f f^{-1}(-u) = f(\neg f^{-1}(u))$	- Def11.
3. $f(\neg f^{-1}(u)) = f(f^{-1}(u)\to(f^{-1}(u)\to f^{-1}(u)))$	- Def6.
4. $f(f^{-1}(u)\to(f^{-1}(u)\to f^{-1}(u))) = -f f^{-1}(u)-f f^{-1}(u)+f f^{-1}(u)$	- Def10.
5. $-f f^{-1}(u)-f f^{-1}(u)+f f^{-1}(u) = -f f^{-1}(u)$	- приведение
6. $-f f^{-1}(u) = -u$	- из 1.
7. $f f^{-1}(-u) = -u$	- из 2 – 6.

1. $f f^{-1}(u) = u$	- инд. доп.

2. $f f^{-1}(v) = v$ - инд. доп.
3. $ff^{-1}(u+v) = f(\neg f^{-1}(u) \to f^{-1}(v))$ - Def11.
4. $f(\neg f^{-1}(u) \to f^{-1}(v)) = -f(\neg f^{-1}(u))+ff^{-1}(v))$ - Def10.
5. $-f(\neg f^{-1}(u))+ff^{-1}(v)) = -f(f^{-1}(u) \to (f^{-1}(u) \to f^{-1}(u)))+f f^{-1}(v)$ - Def6.
6. $-f(f^{-1}(u) \to (f^{-1}(u) \to f^{-1}(u)))+f f^{-1}(v)= -(-ff^{-1}(u)-ff^{-1}(u)+ff^{-1}(u))+ff^{-1}(v)$ - Def10.
7. $-(-ff^{-1}(u)-ff^{-1}(u)+f f^{-1}(u))+ff^{-1}(v) = --ff^{-1}(u)+ff^{-1}(v)$ - приведение
8. $--ff^{-1}(u)+ff^{-1}(v) = ff^{-1}(u)+ff^{-1}(v)$ - определение -
9. $ff^{-1}(u)+ff^{-1}(v) = u+v$ - из 1, 2.
10. $ff^{-1}(u+v) = u+v$ - из 3 – 9.

$f^{-1}f(A) \approx A$ доказываем индукцией по степени формулы A.

Базис.
1. $f^{-1}f(p_i) = f^{-1}(p_i)$ - Def10.
2. $f^{-1}(p_i) = p_i$ - Def11.
3. $p_i \approx p_i$ - Def7.

Индукционный шаг.
1. $f^{-1}f(A) \approx A$ - инд. доп.
2. $f^{-1}f(B) \approx B$ - инд. доп.
3. $f^{-1}f(A \to B) = f^{-1}(-f(A)+f(B))$ - Def10.
4. $f^{-1}(-f(A)+f(B)) = \neg f^{-1}(-f(A)) \to f^{-1}f(B)$ - Def11.
5. $\neg f^{-1}(-f(A)) \to f^{-1}f(B) = \neg\neg f^{-1}f(A) \to f^{-1}f(B)$ - Def11.
7. $\neg\neg f^{-1}f(A) \to f^{-1}f(B) \approx f^{-1}f(A) \to f^{-1}f(B)$ - Def7, теоремы логики групп.
8. $f^{-1}f(A) \to f^{-1}f(B) \approx A \to B$ - из 1, 2 по Def7.
9. $f^{-1}f(A \to B) \approx A \to B$ - из 3 – 8.

Лемма доказана.

Теорема об изоморфизме. Алгебра Линденбаума **GL** $=\langle FG/\approx, +, -, 0\rangle$ для логики групп изоморфна свободной группе в алфавите $T=\{p_1,p_2,\ldots\} \cup \{-p_1,-p_2, \ldots\}$.

Функцию изоморфизма определим посредством:

Def13. $F(|A|) = f(A)$

Тогда обратная ей функция определяется следующим образом:

Def14. $F^{-1}(u) = |f^{-1}(u)|$

Для доказательства теоремы необходимо показать, что:
1). F является функцией, т.е. если $|A|=|B|$, то $f(A)=f(B)$.
2). F – является гомоморфизмом, т.е.
a) $F(|A|+|B|) = F(|A|)+F(|B|)$
b) $F(-|A|) = - F(|A|)$

c) $F(0) = |0|$

3). F – взаимно-однозначное отображение $\mathbf{FG}/_{\approx}$ на **WG**.

1) Если $|A|=|B|$, то $A \approx B$ и по Def8 $|\text{-}A \to B$ и $|\text{-}B \to A$. Отсюда следует, что в каждой модели при каждом приписывании формулам A и B сопоставляются одни и те же значения. Допустим, что $f(A) \neq f(B)$. Но тогда функция приписывания значения формулам в группе **GL**, определяемая как $v(A)=f(A)$, сопоставляет формулам A и B разные значения. Получили противоречие. Следовательно, $f(A)=f(B)$.

2a) $F(|A|+|B|) = F(|A|)+F(|B|)$

1. $F(|A|+|B|) = F(|\neg A \to B|)$ - Def9.
2. $F(|\neg A \to B|) = f(\neg A \to B)$ - Def13.
3. $f(\neg A \to B) = -f(\neg A)+f(B)$ - Def10.
4. $-f(\neg A) = -(-f(A)-f(A)+f(A))$ - Def6, Def10.
5. $-(-f(A)-f(A)+f(A)) = --f(A)$ - приведение.
6. $--f(A) = f(A)$ - определение свободной группы.
7. $f(\neg A \to B) = f(A)+f(B)$ - из 3 – 6
8. $F(|A|) = f(A)$ - Def14.
9. $F(|B|) = f(B)$ - Def14.
10. $F(|A|+|B|) = F(|A|)+F(|B|)$ - из 1, 2, 7 – 9.

2b) $F(-|A|) = -F(|A|)$

1. $F(-|A|) = F(|\neg A|)$ - Def9.
2. $F(|\neg A|) = f(\neg A)$ - Def13.
3. $f(\neg A) = -f(A)-f(A)+f(A)$ - Def6, Def10.
4. $-f(A)-f(A)+f(A) = -f(A)$ - приведение.
5. $f(\neg A) = -f(A)$ - из 3, 4.
6. $-f(A) = -F(|A|)$ - Def13.
7. $F(-|A|) = -F(|A|)$ - из 1 - 6.

2c) $F(0) = 0$

1. $F(0) = F(|A \to A|)$ - Def9.
2. $F(|A \to A|) = f(A \to A)$ - Def13.
3. $f(A \to A) = -f(A)+f(A)$ - Def10.
4. $-f(A)+f(A) = 0$ - приведение.
5. $F(0) = 0$ - из 1 – 4.

3) Покажем, что $F^{-1}F(|A|) = |A|$ и $FF^{-1}(u) = u$.

1. $F^{-1}F(|A|) = |f^{-1}f(A)|$ - Def13, Def14.
2. $f^{-1}f(A) \approx A$ - лемма 1.

3. $| f^{-1}f(A)| = |A|$ - из 3.
4. $F^{-1}F(|A|) = |A|$ - из 1 – 3.

1. $FF^{-1}(u) = F(|f^{-1}(u)|)$ - Def14.
2. $F(|f^{-1}(u)|)= ff^{-1}(u)$ - Def13.
3. $ff^{-1}(u) = u$ - лемма 1.
4. $FF^{-1}(u) = u$ - из 1 -3.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шалак В.И.* Логика групп. Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН, 2004.
2. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. Ижевск: НИЦ РХД, 2001.