В.М.Попов, Г.Н.Шуклин

ИНТУИЦИОНИСТСКИ ПРИЕМЛЕМАЯ ПАРАНОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА[1]

Философу Льву Хоруцу, который 37 лет назад
учил реконструированию возможных миров,
с уважением и признательностью
посвящается

Abstract. *In the paper a propositional logic* AIP *which is a paranormal sublogic of intuitionistic propositional logic is constructed. The semantics of* AIP *which is a modification of Kripke semantics adequate to the intuitionistic propositional logic, and a sequent calculus* GAIP *axiomatizing the* AIP *logic, are also described. The embeddings of intuitionistic propositional logic into* AIP *are defined*.

Строится пропозициональная логика AIP, являющаяся паранормальной подлогикой интуиционистской пропозициональной логики. Описываются семантика логики AIP, представляющая модификацию семантики Крипке, адекватной интуиционистской пропозициональной логике, и секвенциальное исчисление GAIP, аксиоматизирующее логику AIP. Определяются погружения интуиционистской пропозициональной логике в AIP.

Язык L логики AIP есть стандартно определяемый пропозициональный язык над алфавитом $< S, \&, \vee, \supset, \neg ,), (>$, где S есть множество $\{s_1, s_2, s_3, \ldots \}$ всех пропозициональных переменных языка L. Определение L-формулы индуктивно: (i) всякая пропозициональная переменная языка L есть L-формула, (ii) если A и B есть L-формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ есть L-формулы. Элементарной L-формулой называется L-формула, которая является пропозициональной переменной языка L или имеет вид $(\neg p)$, где p – пропозициональная переменная языка L. Термины «формула» и «элементарная формула» используются как сокращения для « L-формула» и «элементарная L-формула» соответственно. Логика AIP есть наименьшее множество формул, которое замкнуто относительно правила подстановки и правила modus ponens и которому принадлежат: (а) все интуиционистски доказуемые формулы, ни в одну из которых не входит $\neg$, (б) все формулы вида

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-11819 а.

$((A \supset (\neg (B \supset B))) \supset (\neg A))$, где A и B есть формулы и при этом A не есть пропозициональная перемеменная языка L, (в) все формулы вида $(C \supset ((\neg C) \supset D))$, где C и D есть формулы и при этом C не есть пропозициональная переменная языка L. AIP-теорией называется множество формул, включающее AIP и замкнутое относительно правила modus ponens. Противоречивой AIP-теорией называется такая AIP-теория T, что для всякой формулы A верно, что $A \in T$ и $(\neg A) \in T$. Паранепротиворечивой AIP-теорией называется противоречивая AIP-теория, которая не равна множеству всех формул. Полной AIP-теорией называется такая AIP-теория T, что для всякой формулы A верно, что $A \in T$ или $(\neg A) \in T$. Неполной AIP-теорией называется AIP-теория, не являющаяся полной AIP-теорией. Параполной AIP-теорией называется такая неполная AIP-теория T, что всякая полная AIP-теория, включающая T, равна множеству всех формул.

Теорема 1 (о паранормальности логики AIP).

Существует паранепротиворечивая и существует параполная AIP-теории.

AIP-моделью называется упорядоченная тройка $< G, R, \models >$ такая, что G есть непустое множество, R есть рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на G, $\models$ есть подмножество множества $G \times \{A \mid A$ есть формула$\}$, и выполняются следующие условия: (1) для всякой элементарной формулы e и всяких α и β из G верно, что если $\alpha \models e$ и $\alpha R \beta$, то $\beta \models e$, (2) для всяких формул A и B, всякой формулы C, не являющейся пропозициональной переменной языка L, и всякого α из G верно, что

(2.1) $\alpha \models (A \& B)$ т.т.т. $\alpha \models A$ и $\alpha \models B$,

(2.2) $\alpha \models (A \vee B)$ т.т.т. $\alpha \models A$ или $\alpha \models B$,

(2.3) $\alpha \models (A \supset B)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если $\alpha R \beta$ и $\beta \models A$, то $\beta \models B$,

(2.4) $\alpha \models (\neg C)$ т.т.т. для всякого β из G верно, что если $\alpha R \beta$, то неверно, что $\beta \models C$.

Формула A называется общезначимой в AIP-модели $< G, R, \models >$, если всякий α из G таков, что $\alpha \models A$.

Теорема 2. Для всякой формулы A выполняется следующее условие: $A \in$ AIP т.т.т. A общезначима во всякой AIP-модели.

Секвенциальное исчисление GAIP является секвенциальным исчислением генценовского типа. Формулировка исчисления GAIP получается из предложенной в [1] формулировки исчисления GI интуиционистской логики предикатов первого порядка исключением правил для кванторов (с соответствующей модификацией языка) и заменой правила $A, \Gamma \rightarrow / \Gamma \rightarrow (\neg A)$ введения негации справа правилом $B, \Gamma \rightarrow / \Gamma \rightarrow (\neg B)$ ограниченного введения негации справа: В не является пропозициональной переменной языка L, а правила $\Gamma \rightarrow A$ / $(\neg A)$, $\Gamma \rightarrow$ введения негации слева правилом $\Gamma \rightarrow B$ / $(\neg B)$, $\Gamma \rightarrow$ ограниченного введения негации слева: В не является пропозициональной переменной языка L. Выводы в GAIP строятся обычным для генценовских секвенциальных исчислений способом. Теорема об устранимости сечения и нижеследующие теоремы 3 и 4 доказаны с использованием методов работы [1].

Теорема 3. Для всякой формулы А выполняется условие: $A \in AIP$ т.т.т. секвенция $\rightarrow A$ выводима в GAIP.

Теорема 4. Исчисление GAIP разрешимо.

Следствием теоремы 3 и 4 является теорема 5.

Теорема 5. Логики AIP разрешима.

Следует обратить внимание на то, что логика AIP не имеет конечной характеристической матрицы. Доказательство несуществования конечной характеристической матрицы для AIP аналогично известному геделевскому доказательству несуществования конечной характеристической матрицы для интуиционистской пропозициональной логики.

Связь логики AIP с интуиционистской пропозициональной логикой IntP (язык логики IntP есть L) устанавливается следующими теоремами 6 и 7.

Теорема 6. Пусть φ есть вычислимое отображение множества всех пропозициональных переменных языка L во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям: (1) $\varphi(p)$ не есть пропозициональная переменная языка L ни для какой пропозициональной переменной p языка L, (2) для всякой пропозициональной переменной p языка L формулы $(p \supset \varphi(p))$ и $(\varphi(p) \supset p)$ принадлежат логике AIP. Пусть h_φ есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких формул B и C выполняются следующие условия:

(a) $h_\varphi(p) = \varphi(p)$,

(в) $h_\varphi((B \bullet C)) = (h_\varphi(B) \bullet h_\varphi(C))$, где $\bullet \in \{\&, \vee, \supset\}$,

(c) $h_\varphi((\neg B)) = (\neg h_\varphi(B))$.

Тогда для всякой формулы А: $A \in IntP$ т.т.т. $h_\varphi(A) \in AIP$.

Например, определив для всякой пропозициональной переменной p языка L $\varphi(p)$ как $(p \,\&\, p)$ (или как $(p \vee p)$), получаем отображение h_φ, погружающее логику IntP в AIP.

Теорема 7. Пусть g есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной p языка L и всяких формул B и C выполняются следующие условия:

(I) $g(p) = p$,

(II) $g((B \bullet C)) = (g(B) \bullet g(C))$, где $\bullet \in \{\&, v, \supset\}$,

(III) $g((\neg B)) = (g(B) \supset (\neg (s_1 \supset s_1)))$.

Тогда для всякой формулы A: $A \in IntP$ т.т.т. $g(A) \in IntP$.

Используя теорему 7, можно доказать, что для всякой формулы A такой, что всякое вхождение $\neg$ в A есть вхождение в формулу $(\neg (s_1 \supset s_1))$, верно следующее: $A \in IntP$ т.т.т. $A \in AIP$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9-74.
2. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979.