В.И.Моисеев

ПРОЕКТИВНО-МОДАЛЬНАЯ ОНТОЛОГИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этой работе я хотел бы предложить для рассмотрения проект одной аксиоматической системы с использованием средств языка «Онтологии» С.Лесьневского (см. [1] и [4]).

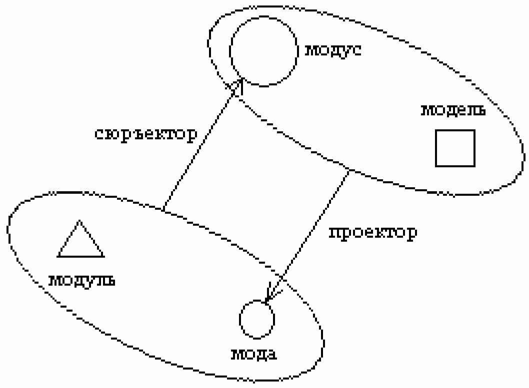
В частности, в рамках этой системы Прототетика используется без всяких изменений, затем, за исключением предиката ε, принимается синтаксис построения выражений Онтологии в форме различных категориальных типов, правила логического вывода [4, pp.21-27], кроме правила экстенсиональности. Прототетические определения используются без изменений. Онтологические определения претерпевают существенные изменения (подробнее см. в [3]). Как и у Лесьневского, определения добавляются в виде теорем системы.

Основная идея построения новой аксиоматики состоит в использовании некоторого семиместного предиката Mod вместо предиката «ε» Лесьневского. Предикат Mod в формуле Mod(a,b,c,f,d,h,α) обладает категориальным типом

$$S / (T, (N/(N,N)), N, (N/(N,N)), N, N, N),$$

где S – тип предложений, N – тип имен, T – произвольный категориальный тип.

Идея такого предиката предполагает следующую онтологию. Определены некоторые источники – генераторы бытия (*модусы*), они способны образовывать свои аспекты (*моды*) в рамках некоторых ограничивающих условий (*моделей*), которые накладываются на модусы и ограничивают их до мод. Сама процедура ограничения может быть названа *проектором*. В общем случае проектор – это двуместная операция, определенная на модусе и модели, и образующая в результате моду этого модуса в этой модели. В то же время на отношение моды и модуса можно посмотреть и с другой стороны. Можно представить, что не мода образуется из модуса, но наоборот, модус из моды. В этом случае нужно не начало ограничения, но некоторое начало расширения моды до модуса. Такое начало я буду называть *модулем*. Процедуру расширения моды до модуса на основе некоторого модуля также можно рассматривать как некоторый двуместный функтор, который я буду называть *сюръектором*. Определяясь на моде и модуле, сюръектор дает модус этой моды в этом модуле. В целом получаем симметричную схему такого вида:



Предикат Mod должен выразить указанную координацию всех шести элементов – модуса, моды, модели, модуля, проектора и сюръектора. Следовательно, он должен быть, как минимум, шестиместным предикатом. Кроме того, следует учесть, что возможны разные контексты определения всех указанных объектов. Например, в одном контексте объекты a и b могут быть таковы, что b – мода a, в другом контексте, наоборот, a может быть модой b. Чтобы выразить такую зависимость всех модальных определений от некоторых контекстов, я введу седьмой элемент, который назову *спецификатором*. Спецификатор задает конкретный контекст, в рамках которого определены все указанные шесть объектов. Теперь предикат Mod становится семиместным предикатом, и его можно записать в следующем виде:

Mod(**a**,**b**,**c**,**f**,**d**,**h**,α) – «в контексте α **a** есть мода модуса **b** в модели **c** и с проектором **f**, и **b** есть модус моды **a** в модуле **d** с сюръектором **h**»

Развиваемую систему я буду называть *Проективно-модальной* 7α-*Онтологией*, или просто 7α-*Онтологией*.

Первая аксиома 7α-Онтологии:

(**AO1**) $Moda(a,b,\alpha) \equiv Modus(a,\alpha) \wedge \forall d(Moda(b,d,\alpha) \supset Moda(a,d,\alpha)) \wedge Moda(b,b,\alpha)$.

Здесь:

$Modus(a,\alpha) \equiv \exists b\exists c\exists f\exists d\exists hMod(b,a,c,f,d,h,\alpha)$ – «а есть α-модус»

$Moda(a,b,\alpha) \equiv \exists c\exists f\exists d\exists hMod(a,b,c,f,d,h,\alpha)$ – «а есть α-мода модуса b»

В этой первой аксиоме определяются свойства отношения «быть модой модуса в контексте α» ($Moda(\ldots,\ldots,\alpha)$). Требуется, чтобы это отношение было транзитивным и рефлексивным, чтобы всякая мода одновременно была и модусом.

Вторая аксиома:

(**AO2**) $Mod(a,b,c,f,d,h,\alpha) \equiv (a =^{\alpha1} f(b,c)) \wedge (b =^{\alpha2} h(a,c)) \wedge \exists xMod(x,b,c,f,d,h,\alpha) \wedge \exists yMod(a,y,c,f,d,h,\alpha)$,

где $(x =^{\alpha1} y) \equiv \forall b\forall c\forall f\forall d\forall h(Mod(x,b,c,f,d,h,\alpha) \equiv Mod(y,b,c,f,d,h,\alpha)) \wedge Moda(x,\alpha) \wedge Moda(y,\alpha)$ – равенство мод по всем остальным объектам (кроме спецификатора),

$Moda(a,\alpha)$ – это формула $\exists b\exists c\exists f\exists d\exists hMod(a,b,c,f,d,h,\alpha)$, и читается она как «а есть α-мода».

$(x =^{\alpha2} y) \equiv \forall a\forall c\forall f\forall d\forall h(Mod(a,x,c,f,d,h,\alpha) \equiv Mod(a,y,c,f,d,h,\alpha)) \wedge Modus(x,\alpha) \wedge Modus(y,\alpha)$ – равенство модусов по всем остальным объектам (кроме спецификатора)

В этой аксиоме выражается связь функторов f и h с предикатом Mod.

С использованием указанных аксиом в рамках некоторой подходящей логической системы можно строить аксиоматическую теорию предиката Mod. В работах [2] и [3] я развивал версию Онтологии с использованием в качестве первичного четырехместного предиката Mod(a,b,c,f), который можно было бы определить в терминах 7α-Онтологии через формулу $\exists d\exists hMod(a,b,c,f,d,h,\alpha)$.

1. Первичные определения 7α-Онтологии

Все последующие конструкции определяются для некоторого фиксированного спецификатора α. Под первичными определениями 7α-Онтологии я буду в первую очередь понимать прототетические определения вида

$D^{\alpha}k_1\ldots k_m.\quad \mu(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha) \equiv \exists x_{p1}\ldots\exists x_{pn}Mod(x_k,x_p,\alpha)$,

где $\mu(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha)$ – определяемое выражение типа S. Выражение $\mu(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha)$ содержит в качестве свободных переменных, кроме α, только переменные $x_{k1},\ldots,x_{km}$ типа ν, где $1 \leq k_j \leq 6$ при j=1,..,m, тип ν - это либо тип N при $k_j \neq 4,6$, либо N/(N,N) при $k_j = 4,6$. Под обозначением $\exists x_{p1}\ldots\exists x_{pn}Mod(x_k,x_p,\alpha)$ имеется в виду выражение, образованное навешиванием кванторов существования $\exists x_{p1}...\exists x_{pn}$ на предикат Mod по переменным $x_{p1},...,x_{pn}$ типа ν, где $1 \leq p_s \leq 6$ при s=1,..,n, и тип ν - это либо тип N при $p_s \neq 4,6$, либо N/(N,N) при $p_s = 4,6$. В предикат Mod, кроме терма α, который стоит на 7-м месте, входят только переменные $x_{k1},\ldots,x_{km}$ и $x_{p1},...,x_{pn}$, так что переменная k_j стоит на k_j-ом месте в предикате Mod, перменная p_s – на p_s-ом месте, и m+n = 6.

Я буду обозначать выражения типа $\mu(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha)$ также символом $Mod^{k1\ldots km7}(x_{k1},\ldots,x_{km},\alpha)$, например:

$D^{\alpha}123$. $Mod^{1237}(a,b,c,\alpha) \equiv \exists f \exists d \exists h\ Mod(a,b,c,f,d,h,\alpha)$, где “ $Mod^{1237}(a,b,c,\alpha)$” читается как “a есть мода модуса b в модели c в контексте α”.

Во-вторых, под первичными определениями я буду понимать прототетические определения вида

$DI^{\alpha\, i}{}_{k1\ldots km}$. $a \subset^{\alpha i}{}_{k1\ldots km} b \equiv \forall x_{k1}\ldots\forall x_{km}(\exists y_{p1}...\exists y_{pn} Mod(...a...) \supset \exists y_{p1}...y_{pn} Mod(...b...))$.

$DE^{\alpha\, i}{}_{k1\ldots km}$. $a \approx^{\alpha i}{}_{k1\ldots km} b \equiv \forall x_{k1}\ldots\forall x_{km}(\exists y_{p1}...\exists y_{pn} Mod(...a...) \equiv \exists y_{p1}...y_{pn} Mod(...b...))$.

Эти записи означают, что α стоит на 7-м месте, переменные $x_{k1},\ldots,x_{km}$ стоят соответственно на $k_1, \ldots, k_m$-ных местах, переменные $y_{p1},..., y_{pn}$ – на $p_1,..., p_n$-ных местах соответственно в предикатах Mod. Здесь m+n = 6, все i, k_j и p_s где j=1,.., m, s=1,.., n, не равны между собой и меньше 7. Термы a и b стоят на i-том месте в предикатах Mod. Переменные с индексом 4 и 6 (стоящие на 4-м или 6-м месте в предикатах Mod) – это переменные типа N/(N,N). Все остальные переменные, кроме α, имеют тип N.

Из этих определений видно, что $a \approx^{\alpha i}{}_{k1\ldots km} b \equiv (a \subset^{\alpha i}{}_{k1\ldots km} b) \wedge (b \subset^{\alpha i}{}_{k1\ldots km} a)$.

Выражение $a \subset^{\alpha i}{}_{k1\ldots km} b$ я буду называть «слабым ${}^{\alpha i}{}_{k1\ldots km}$-включением a в b», выражение $a \approx^{\alpha i}{}_{k1\ldots km} b$ - «слабым ${}^{\alpha i}{}_{k1\ldots km}$-равенством a и b».

Отношение с индексной формой ${}^{\alpha i}{}_{k1\ldots km}$ выражает равенство или включение i-объектов по k_1-, k_2-,…,k_m-объектам в рамках контекста α. Например, модусы могут быть равны между собой по модам и моделям:

$a \approx^{\alpha 2}{}_{13} b \equiv \forall x_1 \forall x_3(\exists y_4 \exists y_5 \exists y_6 Mod(x_1,a,x_3,y_4,y_5,y_6,\alpha) \equiv \exists y_4 \exists y_5 \exists y_6 Mod(x_1,b,x_3,y_4,y_5,y_6,\alpha))$

Используется также следующее равенство:

DE^{α}. $a =^{\alpha} b \equiv Moda(a,b,\alpha) \wedge Moda(b,a,\alpha)$, где “$a =^{\alpha} b$” читается как “a α-равно b”

В-третьих, под первичными определениями я буду понимать так называемые *валентные определения*, среди которых, по крайней мере, содержатся следующие:

DPModa1$^{\alpha}$. PModa(a,α) $\equiv$ $\exists$b(Moda(b,a,α) $\wedge$ $\urcorner$Moda(a,b,α)) $\wedge$ Moda(a,α),
где “PModa(a,α)” читается как “a есть положительная (ненулевая) α-мода”.

Здесь положительная мода определяется как такая, которая имеет не равную себе моду.

DNModa$^{\alpha}$. NModa(a,α) $\equiv$ $\forall$b(Moda(b,α) $\supset$ Moda(a,b,α)) $\wedge$ Moda(a,α),
где “NModa(a,α)” читается как “a есть нулевая α-мода”.

DPModa2$^{\alpha}$. PModa(a,b,α) $\equiv$ Moda(a,b,α) $\wedge$ PModa(a,α),
где “PModa(a,b,α)” читается как “a есть положительная мода модуса b в контексте α”

DPModus$^{\alpha}$. PModus(a,α) $\equiv$ $\exists$bPModa(b,a,α),
где “PModus(a,α)” читается как “a есть положительный α-модус”.

DAt$^{\alpha}$. At(a,α) $\equiv$ PModus(a,α) $\wedge$ $\forall$b(PModa(b,a,α) $\supset$ b$=^{\alpha}$a), здесь “At(a,α)” читается как “a есть α-атом”.

2. Теория множеств в 7α-Онтологии

Пусть P - функтор категориального типа S/a, где a – некоторый категориальный тип. Рассмотрим определение.

DSET(Δ,a)1. x $\in$ <P> $\equiv$ Δ(x) $\wedge$ P(x)

Здесь Δ(x) есть некоторое условие на x, не являющееся теоремой 7α-Онтологии. В определении DSET(Δ,a)1 вводится некоторый функтор F[P] с параметром P и категориальным типом S/(a,S/a), т.е. F[P](x) есть x$\in$<P>. Я буду использовать символику “$\in$<P>” для выражения функтора F[P], т.е. $\in$<P>(x) есть x$\in$<P> в данном случае. Символ “$\in$” представляет из себя при этом только лишь часть обозначения указанного функтора без какого-либо самостоятельного смысла, но неформально читать выражение «x $\in$ <P>» можно обычным способом: «x принадлежит множеству <P>». Таким образом, определение DSET(Δ,a)1 представляет собой прототетическое определение в 7α-Онтологии. Спецификацию (Δ,a) можно называть *сортом* «множества». Используя определение DSET(Δ,a)1, можно развить в 7α-Онтологии свою версию теории множеств. Например, можно использовать определения:

DSET(Δ,a)2. x $\in$ (<P>$\cup$<Q>) $\equiv$ Δ(x) $\wedge$ (P(x) $\vee$ Q(x))

DSET(Δ,a)3. x $\in$ (<P>$\cap$<Q>) $\equiv$ Δ(x) $\wedge$ (P(x) $\wedge$ Q(x))

DSET(Δ,a)4. $x \in \langle P\rangle' \equiv \Delta(x) \wedge \urcorner P(x)$

DSET(Δ,a)5. $\langle P\rangle =_z \langle Q\rangle \equiv \forall x(x \in\langle P\rangle \equiv x\in\langle Q\rangle)$

DSET(Δ,a)6. $x \in \{a\} \equiv \Delta(x) \wedge (x =^{\alpha 2}{}_1\, a)$.

3. Булева алгебра на модусах

На модусах может быть определена булева алгебра. Я вновь буду опускать ссылку на конкретный спецификатор α, например, обозначая формулу $(a\ {}^{\alpha}\varepsilon\ b)$ через $(a\ \varepsilon\ b)$, и т.д. Под $(x\ \varepsilon_1\ y)$ имеется в виду формула PModa(y,x,α).

В основе алгебры модусов лежат следующие три определения.

DA1. $(a \oplus b)\ \varepsilon\ x \equiv x\ \varepsilon\ x \wedge a\ \varepsilon\ a \wedge b\ \varepsilon\ b \wedge [\forall y(x\ \varepsilon_1\ y \supset \exists z(y\ \varepsilon_1\ z \wedge (a\ \varepsilon\ z \vee b\ \varepsilon\ z))) \vee \mathrm{NModa}(x)]$, где «$(a \oplus b)$» читается как «сумма модусов a и b».

DA2. $(a \otimes b)\ \varepsilon\ x \equiv x\ \varepsilon\ x \wedge a\ \varepsilon\ a \wedge b\ \varepsilon\ b \wedge [\forall y(x\ \varepsilon_1\ y \supset (a\ \varepsilon\ y \wedge b\ \varepsilon\ y)) \vee \mathrm{NModa}(x)]$, где «$(a \otimes b)$» читается как «пересечение модусов a и b».

DA3. $a'\ \varepsilon\ x \equiv x\ \varepsilon\ x \wedge a\ \varepsilon\ a \wedge [\forall y(x\ \varepsilon_1\ y \supset \urcorner(a\ \varepsilon\ y)) \vee \mathrm{NModa}(x)]$, где «a′» читается как «внешность модуса a».

Кроме того, принимаются две дополнительные аксиомы.

AN. $\exists a\mathrm{NModa}(a)$ [*Аксиома существования нулевой моды*].

AS. $\mathrm{Moda}(a) \wedge \mathrm{Moda}(b) \wedge \urcorner(a\ \varepsilon\ b) \supset \exists x(b\ \varepsilon_1\ x \wedge \forall y(x\ \varepsilon_1\ y \supset \urcorner(a\ \varepsilon\ y)))$ [*Аксиома отделения*].

При этих условиях может быть доказана

Теорема булевой алгебры на модусах. Операции ⊕, ⊗ и ′ образуют булеву алгебру на модусах.

При доказательстве теоремы (подробнее см. в [3]) используются следующие аксиомы булевой алгебры

1. $a \oplus b = b \oplus a$
2. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
3. $a \oplus (b \otimes c) = (a\oplus b) \otimes (a\oplus c)$
4. $(a \oplus b)' = (a') \otimes (b')$
5. $a \oplus a = a$
6. $(a \otimes a') \oplus b = b$
7. $(a')' = a$

Операции модусной суммы и произведения могут быть обобщены, например:

DA1*. $\sum\langle P\rangle\ \varepsilon\ x \equiv x\ \varepsilon\ x \wedge [\forall y(x\ \varepsilon_1\ y \supset \exists z \exists t(y\ \varepsilon_1\ z \wedge \Delta(t) \wedge P(t) \wedge t\ \varepsilon\ z) \vee NModa(x))]$, где «$\sum\langle P\rangle$» читается как «сумма модусов, принадлежащих множеству $\langle P\rangle$».

4. Исчисление логических дифференциалов и интегралов

Пусть дана версия 7α-Онтологии с двумя фиксированными функторами – проектором ↓ и сюръектором ↑. В такой Онтологии в формуле Mod(a,b,c,↓,d,↑,α) будут варьировать только 4 переменных a,b,c, и d, так что реально мы имеем дело с некоторой 5α-Онтологией. В силу фиксации проектора и сюръектора, можно эту версию Онтологии обозначать как «5↓↑α-Онтология».

В 5↓↑α-Онтологии можно использовать следующие онтологические определения:

Dd1. $Mod^{12467}(x,d_c(b),\downarrow,\uparrow,\alpha) \equiv \exists y(Mod^{123467}(y,b,c,\downarrow,\uparrow,\alpha) \wedge Mod^{12467}(x,y,\downarrow,\uparrow,\alpha))$ – модусно-модальное определение *дифференциала* d_c с параметром с (с-дифференциала).

Dd2. $Mod^{12467}(d_c(b),x,\downarrow,\uparrow,\alpha) \equiv \exists y(Mod^{123467}(y,b,c,\downarrow,\uparrow,\alpha) \wedge Mod^{12467}(y,x,\downarrow,\uparrow,\alpha))$ – модально-модусное определение *дифференциала* d_c с параметром с (с-дифференциала).

Di1. $Mod^{12467}(i_e(a),x,\downarrow,\uparrow,\alpha) \equiv \exists y(Mod^{124567}(a,y,\downarrow,e,\uparrow,\alpha) \wedge Mod^{12467}(y,x,\downarrow,\uparrow,\alpha))$ – модально-модусное определение *интеграла* i_e с параметром е (е-интеграла).

Di2. $Mod^{12467}(x,i_e(a),\downarrow,\uparrow,\alpha) \equiv \exists y(Mod^{124567}(a,y,\downarrow,e,\uparrow,\alpha) \wedge Mod^{12467}(x,y,\downarrow,\uparrow,\alpha))$ – модусно-модальное определение *интеграла* i_e с параметром е (е-интеграла).

На основе этих определений может быть развито своего рода исчисление (логических) дифференциалов и интегралов. Далее в этом параграфе я буду сокращать формулу Mod(a,b,c,↓,e,↑,α) через формулу Mod(a,b,c,e), оставляя в явной записи только варьирующие элементы. Для формулы Mod(a,b,c,e) также можно использовать нотацию, принятую в 7α-Онтологии, только опуская индексы 4, 6 и 7. Например, выражение $Mod^{124567}(a,b,\downarrow,e,\uparrow,\alpha)$ будет выглядеть как выражение $Mod^{125}(a,b,e)$, и т.д. Под записью b ε a будет иметься в виду в этом случае формула $Mod^{12467}(a,b,\downarrow,\uparrow,\alpha)$. Могут быть доказаны, например, следующие теоремы.

Теорема 1. $Mod(a,b,c,e) \supset (d_c(b) = a)$

Теорема 2. $Mod(a,b,c,e) \supset (i_e(a) = b)$

Теорема 3. $Mod(a,b,c,e) \supset (i_e(d_c(b)) = b)$

Теорема 4. $Mod(a,b,c,e) \equiv (d_c(b) = a) \wedge (i_e(a) = b)$

Далее могут быть определены операторы анализа и синтеза.

Оператор анализа A должен воздействовать на модус и давать в результате некоторое множество его мод. Для полного определения такого оператора необходимо уточнить, какой используется проектор и модели. Поскольку результатом оператора анализа будет именно множество, то необходимо будет воспользоваться представленной выше методологией работы с множествами.

DA. $a \in A[b,c_1,\dots,c_n,\downarrow_1,\dots,\downarrow_n] \equiv Mod^{12347}(a,b,c_1,\downarrow_1,\alpha)\vee \dots \vee Mod^{12347}(a,b,c_n,\downarrow_n,\alpha)$.

Здесь множество $A[b,c_1,\dots,c_n,\downarrow_1,\dots,\downarrow_n]$ может быть прочитано как «множество мод модуса b, полученных в моделях $c_1,\dots,c_n$ с проекторами $\downarrow_1,\dots,\downarrow_n$ соответственно». Символ «A» обозначает оператор анализа.

Наоборот, *оператор синтеза* S должен действовать на множество мод, сопоставляя им некоторый их модус. Чтобы избежать неоднозначности, нужно будет указать, какие именно здесь используются модули и сюръекторы. В итоге получим:

DS1. $S[\{a_1,\dots,a_n\},e_1,\dots,e_n,\uparrow_1,\dots,\uparrow_n]\ {}^{\alpha}\varepsilon\ x \equiv \exists y(Mod^{12567}(a_1,y,e_1,\uparrow_1,\alpha)\wedge\dots\wedge Mod^{12567}(a_n,y,e_n,\uparrow_n,\alpha) \wedge (y\ {}^{\alpha}\varepsilon\ x))$ – модусно-модальное определение оператора синтеза

DS2. $x\ {}^{\alpha}\varepsilon\ S[\{a_1,\dots,a_n\},e_1,\dots,e_n,\uparrow_1,\dots,\uparrow_n] \equiv \exists y(Mod^{12567}(a_1,y,e_1,\uparrow_1,\alpha)\wedge\dots\wedge Mod^{12567}(a_n,y,e_n,\uparrow_n,\alpha) \wedge (x\ {}^{\alpha}\varepsilon\ y))$ – модально-модусное определение оператора синтеза

Здесь использовано выражение $\{a_1,\dots,a_n\}$, которое может быть определено следующим образом:

$$x \in \{a_1,\dots,a_n\} \equiv (x =^{\alpha 2}_{1} a_1)\vee\dots\vee(x =^{\alpha 2}_{1} a_n)$$

и представляет собой «множество», до ${}^{\alpha 2}{}_{1}$-точности состоящее из α-модусов $a_1,\dots,a_n$.

Хотя такого рода определение не совпадает по форме с определением $x \in \langle P\rangle \equiv \Delta(x)\wedge P(x)$, но его можно рассматривать как сокращение для определения

$x \in \langle(x =^{\alpha 2}_{1} a_1)\vee\dots\vee(x =^{\alpha 2}_{1} a_n)\rangle \equiv Modus(x,\alpha) \wedge ((x =^{\alpha 2}_{1} a_1)\vee\dots\vee(x =^{\alpha 2}_{1} a_n))$.

Многоточие «…» относится к метаязыку, так что в объектном языке всегда предполагается конкретное конечное число элементов $(x =^{\alpha 2}_{1} a_1),\dots,(x =^{\alpha 2}_{1} a_n)$.

Пусть элементы a_i, b, c_i, $\downarrow_i$, e_i и $\uparrow_i$ связаны соотношением $Mod(a_i,b,c_i,\downarrow_i,e_i,\uparrow_i,\alpha)$ для каждого i=1,…,n. Можно доказать следующие теоремы.

AS-Теорема. $Mod(a_1,b,c_1,\downarrow_1,e_1,\uparrow_1,\alpha)\wedge\dots\wedge Mod(a_n,b,c_n,\downarrow_n,e_n,\uparrow_n,\alpha) \supset A[S[\{a_1,\dots,a_n\},e_1,\dots,e_n,\uparrow_1,\dots,\uparrow_n],c_1,\dots,c_n,\downarrow_1,\dots,\downarrow_n] \underset{Z}{=} \{a_1,\dots,a_n\}$.

SA-Теорема. $Mod(a_1,b,c_1,\downarrow_1,e_1,\uparrow_1,\alpha)\wedge\ldots\wedge Mod(a_n,b,c_n,\downarrow_n,e_n,\uparrow_n,\alpha) \supset S[A[b,c_1,\ldots,c_n,\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n],e_1,\ldots,e_n,\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n] =^{\alpha 2}{}_1 b$.

Теорема 5. $b =^\alpha S[\{a_1,\ldots,a_n\},e_1,\ldots,e_n,\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n] \equiv (b =^\alpha i_{e1}(a_1))\wedge\ldots\wedge (b =^\alpha i_{en}(a_n))$,
где интегралы $i_{e1},\ldots, i_{en}$ определены на основе сюръекторов $\uparrow_1,\ldots,\uparrow_n$ соответственно.

Теорема 6. $\{a_1,\ldots,a_n\} =_z A[b,c_1,\ldots,c_n,\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n] \equiv (a_1 =^\alpha d_{c1}(b))\wedge\ldots\wedge (a_n =^\alpha d_{cn}(b))$,
где дифференциалы $d_{c1},\ldots, d_{cn}$ определены на основе проекторов $\downarrow_1,\ldots,\downarrow_n$ соответственно.

5. Онтологии на предикатах

В общем случае может быть построен вариант 7β-Онтологии для произвольных категориальных типов, т.е. на основе предиката $Mod(a,b,c,f,d,h,\beta)$, где a и b имеют некоторый категориальный тип T_1, c – тип T_2, d – тип T_3. Тогда функтор f обладает типом $T_1/(T_1,T_2)$, функтор h – типом $T_1/(T_1,T_3)$. Весь предикат Mod будет обладать типом

$$S / (T_1,T_1,T_2, T_1/(T_1,T_2), T_3, T_1/(T_1,T_3), T^*),$$

где T* – тип спецификатора.

Рассмотренную выше версию 7α-Онтологии получим в таком частном случае, когда $T_1 = T_2 = T_3 = N$.

Видно, что основными типами являются типы T*, T_1, T_2 и T_3, так что версию 7β-Онтологии с этими категориальными типами можно обозначать в виде $7\beta<T^*,T_1,T_2,T_3>$-Онтологии. Здесь T* – тип спецификатора, T_1 – тип мод и модусов, T_2 – тип моделей и T_3 – тип модулей. 7α-Онтология в этих обозначениях – это $7\alpha<T,N,N,N>$-Онтология.

В остальном синтаксис $7\beta<T^*,T_1,T_2,T_3>$-Онтологии можно задать аналогично синтаксису 7α-Онтологии.

Ниже я несколько более подробно рассмотрю вариант $7\beta<T^*,T_1,T_2,T_3>$-Онтологии, где тип T_1 – это тип $S/(N,\ldots,N)$, когда N повторяется n раз. В этом случае в качестве мод и модусов выступят n-местные предикаты. Предположим, что $7\beta<T^*,T_1,T_2,T_3>$-Онтология строится одновременно с $7\alpha<T,N,N,N>$-Онтологией. В этом случае уже нужна явная ссылка на спецификатор во всех модальных выражениях, поэтому выражения $7\alpha<T,N,N,N>$-Онтологии я буду сопровождать спецификатором α, выражения $7\beta<T^*,T_1,T_2,T_3>$-Онтологии – спецификатором β. Добавим в эту версию Онтологии, кроме аксиом Проективно-Модальной Онтологии, следующие аксиомы.

(AO3β) $[NModa(P,\beta) \supset \forall x_1 \ldots \forall x_n(P<x_1,\ldots,x_n> \equiv P(x_1,\ldots,x_n))] \wedge [PModa(P,\beta) \supset \forall x_1 \ldots \forall x_n(P<x_1,\ldots,x_n> \equiv Modus(x_1,\alpha) \wedge \ldots \wedge Modus(x_n,\alpha) \wedge \forall Q(P\ {}^{\beta}\varepsilon\ Q \wedge At(Q,\beta) \supset \exists y_1 \ldots \exists y_n((x_1\ {}^{\alpha}\varepsilon\ y_1) \wedge \ldots \wedge (x_n\ {}^{\alpha}\varepsilon\ y_n) \wedge Q(y_1,\ldots,y_n))))]$.

(UsnPr1) $UsnPr(P) \wedge UsnPr(Q) \supset UsnPr(\urcorner P) \wedge UsnPr(P \wedge Q)$.

(UsnPr2) $At(P,\beta) \equiv UsnPr(P) \wedge \exists x_1 \ldots \exists x_n(P(x_1,\ldots,x_n) \wedge Modus(x_1,\alpha) \wedge \ldots \wedge Modus(x_n,\alpha))$.

(UsnPr3) $NModa(P,\beta) \equiv UsnPr(P) \wedge (P \equiv \mathbf{0}^n)$.

Здесь: $P<x_1,\ldots,x_n>$ - случай предикации β-модуса на элементах $x_1,\ldots,x_n$, определяемый аксиомой (AO3β). Эту предикацию я буду называть β-*предикацией*.

UsnPr – первичный предикат типа S/S/(N,…,N), когда N повторяется n раз. Выражение UsnPr(P) читается «P есть обычный n-местный предикат (usual n placed predicate)»,

$\mathbf{0}^n$ – это n-местный предикат, определяемый условием $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\mathbf{0}^n(x_1,\ldots,x_n) \equiv \mathbf{0})$.

Поясню неформальный смысл представленных аксиом.

В аксиоме (AO3β) определяется β-предикация $P<x_1,\ldots,x_n>$ для β-модуса P, когда P является нулевой β-модой, и когда P является положительной β-модой. Именно, если P – нулевая β-мода, то β-предикация совпадает с обычной предикацией $P(x_1,\ldots,x_n)$. Если же P – положительная β-мода, то β-предикация на n-ке $x_1,\ldots,x_n$ выполнена тогда и только тогда, когда каждый из x_i является α-модусом, и когда для любой атомарной β-моды предиката P найдутся α-моды $y_1,\ldots,y_n$ модусов $x_1,\ldots,x_n$ соответственно, на которых выполнена эта атомарная β-мода.

Из аксиомы (UsnPr2) мы можем увидеть, что атомарная β-мода – это выполнимый на α-модусах обычный n-местный предикат.

В аксиоме (UsnPr1) утверждается, что обычные n-местные предикаты замкнуты относительно основных логических операций.

Наконец, в аксиоме (UsnPr3) нулевая β-мода определяется как тождественный нулю n-местный предикат.

Представленная аксиоматика имеет своей целью выразить проективно-модальные отношения на n-местных предикатах, когда одни предикаты могут выступать как моды или модусы по отношению к другим предикатам (в рамках β-Онтологии). Предполагается также, что среди всех β-модусов есть «обычные» n-местные предикаты, определяемые как атомарные или нулевые β-модусы. Такие предикаты представляют собой простейший случай β-модусов. В более сложном случае возможны β-модусы, «склеенные» из нескольких обычных n-местных предикатов. Для них предикация определяется аксиомой (AO3β). На n α-модусах выполнено положительное «склеенное» отношение, если для каждого обычного отношения, из которых «склеен» этот β-модус, найдутся α-моды этих α-модусов, на наборе которых выполнено обычное отношение.

Пусть, например, P – свойство «быть красным», и a – некоторый объект (α-модус), у которого есть две моды b и c, причем, мода b – это, например, часть объекта, окрашенная в красный цвет, c – другая часть объекта, окрашенная в синий цвет. Тогда для b выполнено свойство P, т.е. имеем $P(b)$, а для c свойство P не выполнено, т.е. $\neg P(c)$. Положим теперь, что P – это обычный одноместный предикат (случай n=1), т.е. верно, что $Us1Pr(P)$. Полагая, что в β-Онтологии определена булева алгебра β-модусов, образуем сумму $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)$, где ${}^{\beta}\!\oplus$ - операция суммы модусов в β-Онтологии. Так как $P(b)$, $\neg P(c)$ и $Us1Pr(P)$, $Us1Pr(\neg P)$, то $At(P,\beta)$ и $At(\neg P,\beta)$ – P и $\neg P$ есть β-атомы, так что сумма $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)$ – положительный β-модус. Поскольку у α-модуса a найдутся моды b и c, на которых выполнены P и $\neg P$, причем, P и $\neg P$ – это все β-атомы суммы $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)$, то, согласно аксиоме (АО3β), получаем, что $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)<a>$, т.е. β-модус $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)$ β-выполнен на α-модусе a. Это означает, что a обладает «склеенным» свойством $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)$. Одновременно верно, что $\neg P(a)$, $P<a>$ и $\neg P<a>$.

Более строго эти рассуждения могут быть представлены в форме следующей теоремы.

Теорема 1. $[(a\ {}^{\alpha}\varepsilon\ b) \wedge (a\ {}^{\alpha}\varepsilon\ c) \wedge Us1Pr(P) \wedge P(b) \wedge \neg P(c)] \supset (P^{\beta}\!\oplus \neg P)<a>$.

«Склеенные» свойства типа $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)$ могут представлять специальный класс антиномий, которые обычно неправомерно представляются в форме противоречия $(P\wedge\neg P)$. При более детальном исследовании объекта a рано или поздно в нем обнаруживают моды b и c, где $P(b)$ и $\neg P(c)$, и тем самым «разрешают противоречие». Таким образом, здесь пытаются утверждать переход типа $(P \wedge \neg P)(a) \rightarrow P(b) \wedge \neg P(c)$, но реально существует переход $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)<a> \rightarrow P(b) \wedge \neg P(c)$ – переход от «молекулярного» свойства $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)$, β-выполненного на целом объекте, к слагающим его атомам P и $\neg P$, выполненным на частях объекта. Например, в одном своем проявлении b человек a может оказаться добрым ($P(b)$), в другом проявлении c – злым ($\neg P(c)$). Каков же сам человек? Можно сказать, что человек «добро-зол», β-обладая «молекулярным» свойством $(P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)$. Интересно, что в этом случае в β-предикации в некотором смысле перестает выполняться закон исключенного третьего. Так, например, верно, что $P<a> \wedge \neg P<a> \wedge (P\ {}^{\beta}\!\oplus \neg P)<a>$, т.е., кроме вариантов $P<a>$ и

$\rceil P<a>$, появляется третий вариант $(P\ {}^{\beta}\!\oplus\ \rceil P)<a>$. Свойства, образованные «склейкой» нескольких простых свойств, можно называть *метасвойствами*.

Можно также доказать теорему.

Теорема 2. $At(P,\beta) \wedge At(a,\alpha)\ \supset\ (P(a) \equiv P<a>)$.

Здесь мы видим условие совпадения обычной предикации свойств и β-предикации для ненулевых α-модусов. Таким условием является α- и β-атомарность – α-атомарность носителя свойства и β-атомарность самого свойства. Если же носитель свойства начинает содержать отличные от себя ненулевые моды, проявляет некоторую внутреннюю гетерогенность, то здесь уже появляется возможность разброса свойств, которыми обладают части объекта и/или объект в целом, и, следовательно, - возможность различия обычной и β-предикации.

Подобная же логика может быть распространена и на отношения. Пусть, например, есть два человека A и B. Человек A умнее, чем B, но человек B физически сильнее, чем A. Пусть A_1 и B_1 – проявления людей A и B соответственно с точки зрения ума, A_2 и B_2 – их проявления с точки зрения физической силы. Предполагается, что такие проявления могут быть представлены как моды людей-модусов. Пусть далее $\leq_1$ – это порядок сравнения людей по уму, $\leq_2$ – порядок сравнения по физической силе. Тогда получим, что $B_1 \leq_1 A_1$ и $A_2 \leq_2 B_2$. Представим теперь порядки $\leq_1$ и $\leq_2$ как два обычных отношения в β-Онтологии, т.е. положим, что верно $Us2Pr(\leq_1)$ и $Us2Pr(\leq_2)$. Образуем отношение-сумму $(\leq_1\ {}^{\beta}\!\oplus\ \leq_2)$, и два новых α-модуса $A_1{}^{\alpha}\!\oplus B_2$ и $A_2{}^{\alpha}\!\oplus B_1$. Можно показать, что отношение-сумма $(\leq_1\ {}^{\beta}\!\oplus\ \leq_2)$ β-выполнена на парах $<A, A_1{}^{\alpha}\!\oplus B_2>$ и $<B, A_1{}^{\alpha}\!\oplus B_2>$, т.е. $(\leq_1{}^{\beta}\!\oplus\leq_2)<A,A_1{}^{\alpha}\!\oplus B_2>$ и $(\leq_1{}^{\beta}\!\oplus\leq_2)<B,A_1{}^{\alpha}\!\oplus B_2>$. Отношение $(\leq_1\ {}^{\beta}\!\oplus\ \leq_2)$ можно называть *мета-порядком* по отношению к обычным порядкам $\leq_1$ и $\leq_2$. Максимальным (минимальным) элементом метапорядка будет модус, полученный как α-сумма максимальных (минимальных) элементов отдельных обычных порядков. Для метапорядка $(\leq_1\ {}^{\beta}\!\oplus\ \leq_2)$ в нашем примере максимальным элементом будет сумма $A_1{}^{\alpha}\!\oplus B_2$, минимальным элементом – сумма $A_2{}^{\alpha}\!\oplus B_1$.

Метапорядки позволяют, как представляется, для каждой иерархической структуры ввести максимальный элемент. Если в иерархии $I = <M,\leq>$ нет максимального элемента, то M можно пополнить α-суммой $\sum^{\alpha}M$ до множества $M^* =_z M \cup \{\sum^{\alpha}M\}$ и показать, что $\leq <m, \sum^{\alpha}M>$ для любого элемента m из M*, т.е. обычный порядок $\leq$ будет (как метапорядок) β-выполнен для любого m и элемента $\sum^{\alpha}M$, т.е. элемент $\sum^{\alpha}M$ окажется максимальным элементом в множестве M* в смысле β-выполнимости порядка ≤.

Так, используя идею метапорядка, можно показать, что любые иерархии I могут быть погружены в «монистические иерархии» I*, т.е. иерархии с максимальным элементом. Кроме того, любая монистическая иерархия I* может быть всегда расширена до более полной монистической иерархии I** за счет включения в себя новых элементов и новых порядков в составе более полного метапорядка.

6. Заключение

Издавна в истории философской логики присутствуют два проекта – формальной логики и некоторой «содержательной логики», часто называемой «диалектикой», или «трансцендентальной логикой», или «тектологией». Возможно, Проективно-модальная Онтология могла бы послужить выражением именно этой, более содержательной, линии развития философской логики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васюков В.Л.* Формальная феноменология. М.: Наука, 1999.
2. *Моисеев В.И.* К аксиоматике Модальной Онтологии // Рационализм и культура на пороге 3-го тысячелетия: материалы 3-го Российского Философского конгресса (16 – 20 сентября 2002 г.). В 3-х тт. Том 1. Философия и методология науки, эпистемология, логика, философия природы, философия сознания, философия техники, философия образования. Ростов н/Д: СКНЦ ВШ, 2002. С. 283-284.
3. *Moiseev V.* Projectively Modal Ontology // Logical Studies. № 9. 2002. (http://www.logic.ru/LogStud/09/LS9.html).
4. *Slupecki J.* S.Lesniewski's Calculus of Names // Studia Logica. Vol. 3. 1955. P. 7-76.