В.И.Маркин

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИЛЛОГИСТИКА С НЕОПРЕДЕЛЕННО-МЕСТНОЙ КОНСТАНТОЙ*

Abstract. *The paper concerns the problem of the representation of all possible extensional relations among any finite list of the universal terms by means of positive syllogistic – syllogistic without negative and other complex terms. I introduce new syllogistic constant* **@** *with indefinite arity. The atomic formulae are of the type* $S_1S_2...S_n\mathbf{@}P_1P_2...P_m$, *where* $n+m \geq 1$, *complex formulae are constructed by means of the propositional connectives. I offer the following translation * from the syllogistic language into the language of predicate calculus:* $(S_1S_2...S_n\mathbf{@}P_1P_2...P_m)^* = \neg\exists x(S_1x \ \& \ S_2x \ \&...\& \ S_nx \ \& \ \neg P_1x \ \& \ \neg P_2x \ \&...\& \ \neg P_mx)$, $(\neg \boldsymbol{A})^* = \neg \boldsymbol{A}^*$, $(\boldsymbol{A} \nabla \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* \nabla \boldsymbol{B}^*$, *where* ∇ *is any binary connective. I formulate a syllogistic system which is the generalization of the fundamental positive syllogistic and prove that it is embedded into the classical predicate calculus under the translation *.*

Силлогистику обычно понимают как теорию правильных рассуждений, основанных на объемных отношениях в сфере общих терминов – субъектов и предикатов категорических высказываний. Силлогистические константы при этом можно рассматривать как знаки отношений между терминами по объему. Например, константа **a** выступает в фундаментальной силлогистике в качестве аналога отношения включения объема субъекта в объем предиката, константа **i** – в качестве аналога отношения совместимости терминов высказывания по объему.

Однако не всякое объемное отношение можно адекватно выразить формулой в стандартных системах позитивной силлогистики (силлогистики, язык которой содержит лишь простые общие термины). Так, если отношения между множествами устанавливаются в фиксированном универсуме, то наряду с включением и совместимостью можно выделить еще одно фундаментальное объемное отношение – *отношение исчерпываемости* (объединение объемов субъекта и предиката совпадает с универсумом), которое не выразимо в рамках силлогистик указанного типа. В [2] мною были построены обобщения двух систем позитивной силлогистики – фундаментальной и традиционной силлогистик – за счет введения дополнительной константы **u** (аналога отношения исчерпываемости), в которых данный недостаток устраняется.

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 03-03-00193а.

Ограниченность выразительных возможностей позитивной силлогистики связана также и с иным обстоятельством: все ее силлогистические константы являются бинарными, поэтому некоторые объемные отношения между тремя или более терминами невозможно адекватно эксплицировать посредством формул ее языка.

Приведем примеры подобных отношений:

(1) “термины $S_1,S_2,\ldots,S_n$ ($n>2$) совместимы по объему”;
(2) “объемы терминов $P_1,P_2,\ldots,P_m$ исчерпывают универсум”;
(3) “объем S включается в объединение объемов $P_1,P_2,\ldots,P_m$”;
(4) “пересечение объемов $S_1,S_2,\ldots,S_n$ включается в объем P”.

Для того чтобы получить возможность выражать такого рода отношения в силлогистической теории, ее язык обычно пополняют логическими символами новой категории – так называемыми *терминными операторами*: терминным отрицанием (аналогом операции дополнения), терминной конъюнкцией (аналогом пересечения) и терминной дизъюнкцией (аналогом объединения) и вводят в сферу рассмотрения – наряду с примитивными – сложные (отрицательные, конъюнктивные, дизъюнктивные) термины на местах субъектов и предикатов. Строящиеся в указанном языке *расширенные силлогистики* являются весьма сильными дедуктивными системами: так, В.А. Бочаров [1] и В.А. Смирнов [3] показали, что расширенный за счет введения сложных терминов вариант позитивной силлогистики **С2** дефинициально эквивалентен булевой алгебре.

Данный подход предполагает принятие в силлогистике логических символов принципиально новой синтаксической категории: если константы **a**, **i**, **e**, **o** относятся к числу высказываниеобразующих функторов, то терминные отрицание, конъюнкция и дизъюнкция представляют собой терминообразующие операторы.

Я предлагаю иной способ решения проблемы силлогистического представления всех возможных отношений между объемами произвольного конечного числа терминов, который не столь радикально изменяет категориальную сетку позитивной силлогистики. Он состоит во ведении в ее язык (в качестве исходной) одной *неопределенно-местной* силлогистической константы – **@**.

В алфавите содержится также бесконечный список общих силлогистических терминов (в качестве синтаксических метапеременных для них будем использовать S, P, Q, R, M, возможно с индексами), классические пропозициональные связки и скобки.

Атомарные формулы языка имеют вид $S_1S_2\ldots S_n\textbf{@}P_1P_2\ldots P_m$, где $S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m$ – произвольные общие термины и $n+m \geq 1$. В дальнейшем последовательности (возможно пустые) общих терминов будем также (в метаязыке) обозначать малыми латинскими буквами s, p, q, r. Сложные формулы образуются с помощью пропозициональных связок.

Смысл силлогистических формул может быть эксплицирован посредством следующего их перевода * в язык одноместного исчисления предикатов:

$$(S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m)^* = \neg\exists x(S_1x \,\&\, S_2x \,\&\ldots\&\, S_nx \,\& \\ \&\neg P_1x \,\&\, \neg P_2x \,\&\ldots\&\, \neg P_mx),$$

$$(\neg\boldsymbol{A})^* = \neg\boldsymbol{A}^*, \quad (\boldsymbol{A} \nabla \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* \nabla \boldsymbol{B}^*,$$

где ∇ – произвольная бинарная связка.

Стандартные категорические высказывания записываются в нашем языке следующим образом: “Всякий S есть P” – $S@P$, “Ни один S не есть P” – $SP@$, “Некоторый S есть P” – $\neg SP@$, “Некоторый S не есть P” – $\neg S@P$.

Информация о пустоте термина S передается, в соответствии с переводом *, формулой $S@$, а информация о его универсальности – формулой $@S$.

Приведенные выше отношения, не выразимые средствами позитивной силлогистики, эксплицируются посредством следующих формул: (1) – $\neg S_1S_2\ldots S_n@$, (2) – $@P_1P_2\ldots P_m$, (3) – $S@P_1P_2\ldots P_m$, (4) – $S_1S_2\ldots S_n@P$.

Перевод * является обобщением стандартного, принятого в математической логике перевода категорических высказываний в язык логики предикатов. Последний адекватен системе фундаментальной позитивной силлогистики.

Сформулируем исчисление **ФС@** обобщенной позитивной фундаментальной силлогистики в языке с единственной силлогистической константой @ и докажем ее адекватность переводу *.

Схемами аксиом **ФС@** являются:

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

A1. $(Mq@r \,\&\, s@pM) \supset sq@pr$, где по крайней мере одна из последовательностей терминов – s, q, p или r – не является пустой.

A2. $S@S$,

A3. $sSPp@q \supset sPSp@q$,

A4. $s@pSPq \supset s@pPSq$,

A5. $SSs@p \supset Ss@p$,

A6. $s@pPP \supset s@pP$,

A7. $s@p \supset Ss@p$,

A8. $s@p \supset s@pP$,

A9. $\neg(S@ \,\&\, @S)$.

Единственное правило вывода в **ФС@** – *modus ponens*.

Налицо удивительное сходство некоторых схем аксиом обобщенной силлогистики с постулатами генценовского секвенциального исчисления. Так, **A2** напоминает основную секвенцию, **A1** –

правило сечения, **A3** и **A4** – правила перестановки, **A5** и **A6** – правила сокращения, **A7** и **A8** – правила утончения (добавления).

Аксиома **A9** в этом ряду стоит особняком. Ее семантический смысл – в постулировании непустоты исходной предметной области (универсума).

Для демонстрации погружаемости силлогистической системы **ФС@** в одноместное классическое исчисление предикатов посредством перевода * зададим сначала ее теоретико-множественную семантику и докажем ее адекватность приведенному исчислению.

Моделью назовем пару $<\mathbf{D}, \varphi>$, где $\mathbf{D} \neq \varnothing$, а φ есть функция приписывания значений общим силлогистическим терминам: $\varphi(Q) \subseteq \mathbf{D}$. С каждой моделью $<\mathbf{D}, \varphi>$ связывается *функция означивания*, сопоставляющая всякой формуле языка либо **1**, либо **0**. Означивание атомарных формул определяется следующим образом:

$$|S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m| = \mathbf{1}, \text{ е.т.е. } \varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)\cap\ldots\cap\varphi(S_n)\cap\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_1))\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_2))\cap\ldots\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_m)) = \varnothing.$$

Правила означивания сложных формул обычные.

Силлогистическая формула $\boldsymbol{A}$ *значима в модели* $<\mathbf{D}, \varphi>$, е.т.е. $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{1}$ в этой модели. Формула $\boldsymbol{A}$ *общезначима*, е.т.е. она истинна в каждой модели указанного типа.

Докажем метатеорему о семантической непротиворечивости:

Метатеорема 1. *Всякая формула, доказуемая в исчислении* **ФС@**, *общезначима.*

Продемонстрируем общезначимость аксиом нашей системы.

Аксиомы **A0** общезначимы, поскольку пропозициональные связки интерпретируются в семантике классически.

A1. $(Mq@r \,\&\, s@pM) \supset sq@pr$.

Примем следующие обозначения:

q есть $Q_1Q_2...Q_i$, а $E^q = \varphi(Q_1)\cap\varphi(Q_2)\cap\ldots\cap\varphi(Q_i)$;

r есть $R_1R_2...R_j$, а $E^r = (\mathbf{D}\backslash\varphi(R_1))\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(R_2))\cap\ldots\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(R_j))$;

s есть $S_1S_2...S_n$, а $E^s = \varphi(S_1)\cap\varphi(S_2)\cap\ldots\cap\varphi(S_n)$;

p есть $P_1P_2...P_m$, а $E^p = (\mathbf{D}\backslash\varphi(P_1))\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_2))\cap\ldots\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(P_m))$.

+1. $|(Mq@r \,\&\, s@pM) \supset sq@pr| = \mathbf{0}$.	
2. $|Mq@r| = \mathbf{1}$	1;
3. $|s@pM| = \mathbf{1}$	1;
4. $|sq@pr| = \mathbf{0}$	1;
5. $\varphi(M)\cap E^q\cap E^r = \varnothing$	2;
6. $E^s\cap E^p\cap(\mathbf{D}\backslash\varphi(M)) = \varnothing$	3;
7. $E^s\cap E^q\cap E^p\cap E^r \neq \varnothing$	4;
8. $\varphi(M) \subseteq \mathbf{D}$	опр. φ;

9. $E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^{r'} \subseteq \mathbf{D}$ опр. φ;

10. $\varphi(M) \cap E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^{r'} \neq \varnothing$ или

$E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^{r'} \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing$ 7,8,9;

11. $\varphi(M) \cap E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^{r'} \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(M) \cap E^q \cap E^{r'} \neq \varnothing$ св-во $\cap$;

12. $E^s \cap E^q \cap E^p \cap E^{r'} \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing \Rightarrow E^s \cap E^p \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing$ св-во $\cap$;

13. $\varphi(M) \cap E^q \cap E^{r'} \neq \varnothing$ или $E^s \cap E^p \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing$ 10,11,12;

14. $E^s \cap E^p \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(M)) \neq \varnothing$ 13,5;

Противоречие 6 и 14.

A2 общезначима, поскольку $\varphi(S) \cap (\mathbf{D} \backslash \varphi(S)) = \varnothing$.

A3 и **A4** общезначимы в силу коммутативности $\cap$.

A5 и **A6** общезначимы в силу закона идемпотентности.

A7 и **A8** общезначимы в силу следующего свойства $\cap$: если пересечение двух множеств пусто, то пусто и его пересечение с третьим множеством.

A9 общезначима, поскольку, по определению модели, универсум **D** непуст.

Правило *modus ponens* сохраняет свойство “быть общезначимой формулой”. □

Обратную метатеорему – метатеорему о семантической полноте предложенной системы обобщенной силлогистики – будем доказывать методом Хенкина.

Множество формул **Г** силлогистического языка назовем *непротиворечивым*, е.т.е. формула $\neg(\boldsymbol{A_1}\ \&\ \boldsymbol{A_2}\ \&\ ...\ \&\ \boldsymbol{A_n})$ не доказуема в исчислении **ФС@** ни для каких $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, ..., \boldsymbol{A_n}$ из **Г**.

Пусть **T** – произвольное непустое множество общих терминов. Множество формул Δ назовем *максимальным относительно множества* **T**, е.т.е. (1) Δ является непротиворечивым; (2) формулы из Δ не содержат терминов, отсутствующих в **T**; (3) для любой формулы $\boldsymbol{A}$ подобного типа верно, что $\boldsymbol{A} \in \Delta$ или $\neg\boldsymbol{A} \in \Delta$.

Пусть $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ – множества терминов, а Δ_1 и Δ_2 – множества формул. Докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Если* Δ_1 *максимально относительно множества* $\mathbf{T_1}$, *каждый термин, входящий в множество* $\mathbf{T_2}$ *содержится в* $\mathbf{T_1}$, *а* Δ_2 *– множество всех таких формул из* Δ_1, *которые не содержат терминов, отсутствующих в* $\mathbf{T_2}$, *то* Δ_2 *максимально относительно множества* $\mathbf{T_2}$.

Покажем, что Δ_2 обладает тремя свойствами максимального множества.

(1) Δ_2 непротиворечиво, так как в противном случае противоречивым оказалось бы и множество Δ_1, в которое оно включается.

(2) По условию леммы, формулы из Δ_2 не содержат терминов, отсутствующих в $\mathbf{T_2}$.

(3) Рассмотрим произвольную формулу $\boldsymbol{A}$, не содержащую отсутствующих в $\mathbf{T_2}$ терминов. Поскольку $\mathbf{T_2} \subseteq \mathbf{T_1}$ и в силу максимальности Δ_1 относительно $\mathbf{T_1}$, либо $\boldsymbol{A}$, либо $\neg\boldsymbol{A}$ содержится в Δ_1. А так как Δ_2 представляет собой множество всех формул из Δ_1, которые не содержат терминов, отсутствующих в $\mathbf{T_2}$, то какая-то из указанных формул принадлежит и Δ_2. □

Докажем далее особый вариант леммы о возможности расширения произвольного непротиворечивого множества формул до максимального:

Лемма 2. *Произвольное непротиворечивое множество* $\mathbf{\Gamma}$, *такое что множество* $\mathbf{T}$ *терминов, входящих в его формулы, конечно, можно расширить до максимального относительно* $\mathbf{T}$ *множества формул* Δ.

Пусть $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, ... – пересчет всех таких формул силлогистического языка, которые не содержат терминов, отсутствующих в $\mathbf{T}$. Строим последовательность множеств Δ_1, Δ_2, ... следующим образом: $\Delta_1 = \mathbf{\Gamma}$; $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\boldsymbol{C}_n\}$, если $\Delta_n \cup \{\boldsymbol{C}_n\}$ непротиворечиво, и $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\boldsymbol{C}_n\}$, если $\Delta_n \cup \{\boldsymbol{C}_n\}$ противоречиво. Пусть Δ – результат объединения всех множеств бесконечной последовательности Δ_1, Δ_2, ... Легко убедиться в том, что сконструированное Δ является максимальным относительно $\mathbf{T}$ множеством формул. □

Для определения канонических моделей предварительно введем ряд понятий и обоснуем несколько утверждений.

Описанием объекта посредством (попарно различных) *терминов* Q_1, ..., Q_k (k≥1) назовем множество $\{Q_1^0, ..., Q_k^0\}$, где каждое Q_i^0 есть либо Q_i^+, либо Q_i^-.

Неформально, Q_i^+ в описании некоторого объекта означает присущность, а Q_i^- неприсущность ему свойства Q_i.

В качестве метапеременных по описаниям объектов будем использовать буквы α и β.

Пусть $S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m$ – непустой конечный список попарно различных общих терминов. Рассмотрим произвольное множество формул Δ, максимальное относительно множества терминов $\{S_1,S_2,\ldots,S_n, P_1,P_2,\ldots,P_m\}$. Описание объекта $\{S_1^+, S_2^+,\ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-,\ldots, P_m^-\}$ посредством терминов $S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m$ назовем Δ-*допустимым*, если и только если $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta$.

Из данного определения вытекает, что если Δ максимально относительно $\mathbf{T}$, и α является Δ-допустимым описанием объекта, то $Q \in \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $Q^+ \in \alpha$ или $Q^- \in \alpha$.

Лемма 3. *Пусть* Δ_1 *– максимальное множество формул относительно конечного множества терминов* $\mathbf{T}$, *а* Δ_2 *– максимальное множество формул относительно множества терминов*

$\mathbf{T} \cup \{M\}$, *где* $M \notin \mathbf{T}$. *Пусть также* $\Delta_1 \subset \Delta_2$. *Тогда для каждого* Δ_1*-допустимого описания* α *найдется* Δ_2*-допустимое описание* β, *такое что* $\beta = \alpha \cup \{M^+\}$ *или* $\beta = \alpha \cup \{M^-\}$.

Рассмотрим произвольное Δ_1-допустимое описание объекта $\alpha = \{S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-\}$. Из определения Δ-допустимого описания следует, что, во-первых, $\mathbf{T} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, а во-вторых, $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta_1$.

В силу максимальности Δ_1 относительно $\mathbf{T}$ имеем:

$$\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \in \Delta_1.$$

Поскольку $\Delta_1 \subset \Delta_2$, формула $\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m$ принадлежит и множеству Δ_2. Формула

$$S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \supset S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m$$

является теоремой нашей системы, она доказывается с использованием аксиом **A3-A6**. Следовательно, теоремой **ФС@** является и ее контрапозиция:

$$\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \supset \neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m.$$

Все термины указанной теоремы содержатся в $\mathbf{T} \cup \{M\}$, поэтому она принадлежит любому максимальному относительно $\mathbf{T} \cup \{M\}$ множеству формул, в том числе и Δ_2.

Выше было установлено, что антецедент данной формулы принадлежит Δ_2. Следовательно, это же верно и для ее консеквента:

$$\neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \in \Delta_2.$$

Следующая формула является одной из аксиом схемы **A1**:

$$(MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \,\&\, S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM) \supset$$
$$\supset S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m.$$

С ее помощью, пользуясь законами классического пропозиционального исчисления, легко доказать теорему:

$$\neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \supset$$
$$\supset (\neg MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \vee \neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM).$$

Последняя также не содержит терминов, отсутствующих в $\mathbf{T} \cup \{M\}$, поэтому и она является элементом Δ_2. А так как антецедент этой формулы принадлежит данному множеству, то консеквент принадлежит ему тоже:

$$(\neg MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \vee \neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM) \in \Delta_2.$$

Отсюда в силу максимальности Δ_2 относительно $\mathbf{T} \cup \{M\}$ вытекает, что

(1) $MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta_2$ или (2) $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM \notin \Delta_2$.

Отметим, что $\mathbf{T} \cup \{M\} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, P_1, P_2, \ldots, P_m, M\}$.

Поэтому в случае (1) Δ_2-допустимым оказывается описание $\{M^+, S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-\}$, т.е. $\alpha \cup \{M^+\}$, а в случае (2) – описание $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-, M^-\}$, т.е. $\alpha \cup \{M^-\}$. □

Лемма 4. *Пусть* Δ_1 *– максимальное множество формул относительно конечного множества терминов* **T**, *а* Δ_2 *– максимальное множество формул относительно множества терминов* $\mathbf{T} \cup \{M_1,\ldots,M_k\}$, *где* $M_1,\ldots,M_k$ *– попарно различные термины, не входящие в* **T**. *Пусть также* $\Delta_1 \subset \Delta_2$. *Тогда для любого* Δ_1*-допустимого описания* α *найдется* Δ_2*-допустимое описание* β, *такое что* $\beta = \alpha \cup \{M_1^0,\ldots,M_k^0\}$.

Доказывается k-кратным применением **Леммы 3**. □

Приступим к построению канонических моделей для максимальных множеств формул.

Рассмотрим произвольное множество силлогистических формул Δ, максимальное относительно конечного множества терминов **T**. Ассоциируем с Δ пару $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$, такую что $\mathbf{D}_\Delta$ – множество всех Δ-допустимых описаний объекта, а $\varphi_\Delta(Q) = \{\alpha\text{: } \alpha$ – Δ-допустимое описание и $Q^+ \in \alpha\}$. Пару $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$ будем называть *канонической моделью*.

Согласно определениям канонической модели и Δ-допустимого описания, для любого Δ, максимального относительно **T**, для любого Δ-допустимого описания α и произвольного термина $Q \in \mathbf{T}$ верно:

$$Q^+ \in \alpha, \text{ е.т.е. } \alpha \in \varphi_\Delta(Q) \;\text{ и }\; Q^- \in \alpha, \text{ е.т.е. } \alpha \in \mathbf{D}_\Delta \backslash \varphi_\Delta(Q).$$

Необходимо показать, что $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к моделям в семантике силлогистического исчисления **ФС@**.

Из определения канонической модели непосредственно вытекает, что $\varphi_\Delta(Q) \subseteq \mathbf{D}_\Delta$.

Остается продемонстрировать, что $\mathbf{D}_\Delta$ непусто.

Лемма 5. *Для любого множества формул* Δ, *максимального относительно конечного множества терминов* **T**, *существует по крайней мере одно* Δ*-допустимое описание объекта*.

Пусть $Q_1, Q_2, ..., Q_k$ – список всех попарно различных терминов из множества **T**.

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 1$, т.е. когда формулы из Δ содержат только один термин Q_1.

Формула $\neg(Q_1@ \,\&\, @Q_1)$ – одна из аксиом схемы **A9**.

Из этой аксиомы по законам классического пропозиционального исчисления легко получить в качестве теоремы формулу $\neg Q_1@ \vee \neg @Q_1$.

Все теоремы, содержащие только термин Q_1, принадлежат максимальному относительно $\{Q_1\}$ множеству формул Δ.

В силу свойств максимального множества из того, что $\neg Q_1@ \vee \neg @Q_1 \in \Delta$, вытекает, что

$$Q_1@ \notin \Delta \text{ или } @Q_1 \notin \Delta.$$

В каждом из случаев можно указать Δ-допустимое описание объекта: если верен первый дизъюнкт, таковым будет $\{Q_1^+\}$, а если верен второй – $\{Q_1^-\}$.

Если $k>1$, то выделим сначала множество Δ_1 формул из Δ, не содержащих иных терминов, кроме Q_1. Согласно **Лемме 1**, Δ_1 является максимальным относительно одноэлементного множества терминов $\{Q_1\}$. Только что было доказано существование Δ_1-допустимого описания объекта. Рассмотрим какое-нибудь подобное описание α: $\{Q_1^+\}$, если $Q_1@ \notin \Delta_1$, или $\{Q_1^-\}$, если $@Q_1 \notin \Delta_1$. В соответствии с **Леммой 4**, найдется описание $\alpha \cup \{Q_2^0, ..., Q_k^0\}$, которое является Δ-допустимым. □

Теперь мы в состоянии приступить к доказательству основной леммы о равносильности двух утверждений: о принадлежности формулы максимальному множеству и об истинности ее в канонической модели, ассоциированной с данным множеством.

Лемма 6. *Пусть* Δ *– произвольное множество формул, максимальное относительно конечного множества терминов* **T**. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *– формула, не содержащая терминов, отсутствующих в* **T**. *Тогда* $\boldsymbol{A} \in \Delta$, *е.т.е.* $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{1}$ *в модели* $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$.

Доказательство осуществляется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле $\boldsymbol{A}$.

Базис индукции ($\boldsymbol{A}$ не содержит пропозициональных связок) представляет собой рассмотрение случая, когда $\boldsymbol{A}$ имеет вид $s@p$, где s и p – произвольные последовательности общих терминов (элементов **T**), из которых по крайней мере одна непуста.

Базисный случай распадается на два:

(i) существует термин Q, входящий как в состав s, так и в состав p;

(ii) в последовательностях s и p отсутствуют одинаковые термины.

В случае (i) формула $s@p$ оказывается теоремой исчисления **ФС@**: ее несложно доказать исходя из аксиомы $Q@Q$ (**A2**) с использованием “утончений” (**A7** и **A8**) и “перестановок” (**A3** и **A4**). Из доказуемости $s@p$ вытекает, во-первых, ее принадлежность множеству Δ (в силу максимальности последнего относительно **T** и того факта, что $s@p$ не содержит терминов, отсутствующих в **T**), и во-вторых, ее общезначимость (в силу **Метатеоремы 1**), а значит, значимость $s@p$ в канонической модели $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$.

Итак, в случае (i) имеем: $s@p \in \Delta$ и $|s@p| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$. Отсюда следует справедливость эквивалентности: $s@p \in \Delta$, е.т.е. $|s@p| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$.

Перейдем к рассмотрению случая (ii), когда последовательности s и p в составе формулы $s@p$ не содержат одинаковых терминов.

Пусть $S_1,S_2,\dots,S_n$ – список всех попарно различных терминов, входящих в последовательность s, а $P_1,P_2,\dots,P_m$ – аналогичный список терминов из p.

Нетрудно убедиться в том, что формулы

$$s@p \supset S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m \text{ и } S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m \supset s@p$$

являются теоремами **ФС@**: в доказательстве первой из них при необходимости используются "перестановки" (**A3** и **A4**) и "сокращения" (**A5** и **A6**), а в доказательстве второй – "утончения" (**A7** и **A8**) и "перестановки".

Каждая из указанных теорем принадлежит Δ, поскольку не содержит отсутствующих в $\mathbf{T}$ терминов. Отсюда, в силу свойств максимального множества следует:

$$s@p \in \Delta, \text{ е.т.е. } S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m \in \Delta.$$

Используя в рамках семантики законы коммутативности и идемпотентности легко установить равносильность условий значимости формул $s@p$ и $S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m$. Отсюда вытекает, что в модели $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$

$$|S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m| = \mathbf{1}, \text{ е.т.е. } |s@p| = \mathbf{1}.$$

Таким образом, остается показать:

$$S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m \in \Delta, \text{ е.т.е. } |S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m| = \mathbf{1} \text{ в } <\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>.$$

При доказательстве данного утверждения будем иметь ввиду наличие двух возможностей:

(a) $\{S_1,S_2,\dots,S_n,P_1,P_2,\dots,P_m\} = \mathbf{T}$; (b) $\{S_1,S_2,\dots,S_n,P_1,P_2,\dots,P_m\} \subset \mathbf{T}$.

Докажем сначала импликацию: $S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m \in \Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>$.

+1. $S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m \in \Delta$.
+2. $|S_1S_2\dots S_n@P_1P_2\dots P_m| = \mathbf{0}$ в $<\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>$.

Основываясь на условиях значимости атомарных формул, из 2 получаем:

3. $\varphi_\Delta(S_1) \cap \varphi_\Delta(S_2) \cap\dots\cap \varphi_\Delta(S_n) \cap (\mathbf{D}_\Delta\setminus\varphi_\Delta(P_1)) \cap (\mathbf{D}_\Delta\setminus\varphi_\Delta(P_2)) \cap\dots\cap (\mathbf{D}_\Delta\setminus\varphi_\Delta(P_m)) \neq \varnothing$.

Последнее, в силу определения канонической модели $<\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>$, означает:

4. Существует Δ-допустимое описание объекта α такое, что $S_1^+ \in \alpha$, $S_2^+ \in \alpha,\ldots, S_n^+ \in \alpha$, $P_1^- \in \alpha$, $P_2^- \in \alpha,\ldots, P_m^- \in \alpha$.

Рассмотрим сначала случай (a) $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} = \mathbf{T}$.

5. Описание $\{S_1^+, S_2^+,\ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-,\ldots, P_m^-\}$ Δ-допустимо.

Отсюда по определению Δ-допустимого описания объекта получаем:

6. $S_1S_2\ldots S_n\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta$.

Противоречие 1 и 6.

В случае (b) $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} \subset \mathbf{T}$ имеем:

5'. Описание α помимо S_1^+, $S_2^+,\ldots$, S_n^+, P_1^-, $P_2^-,\ldots$, P_m^- содержит также Q_1^+, $Q_2^+,\ldots$, Q_i^+, R_1^-, $R_2^-,\ldots$, R_j^-, где Q_1, $Q_2,\ldots$, Q_i, R_1, $R_2,\ldots$, R_j – список всех попарно различных терминов из $\mathbf{T}$, отсутствующих в классе $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\}$ ($i+j \geq 1$).

6'. Описание $\{S_1^+, S_2^+,\ldots, S_n^+, Q_1^+, Q_2^+,\ldots, Q_i^+, P_1^-, P_2^-,\ldots, P_m^-, R_1^-, R_2^-,\ldots, R_j^-\}$ Δ-допустимо.

7'. $S_1S_2\ldots S_nQ_1Q_2\ldots Q_i\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_mR_1R_2\ldots R_j \notin \Delta$.

С использованием “утончений” (**A7** и **A8**) и “перестановок” (**A3** и **A4**) в системе **ФС@** несложно доказать формулу $S_1S_2\ldots S_n\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_m \supset S_1S_2\ldots S_nQ_1Q_2\ldots Q_i\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_mR_1R_2\ldots R_j$; она не содержит отсутствующих в $\mathbf{T}$ терминов, следовательно,

8'. $S_1S_2\ldots S_n\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_m \supset S_1S_2\ldots S_nQ_1Q_2\ldots Q_i\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_mR_1R_2\ldots R_j \in \Delta$.

Используя свойства максимального множества, из 1 и 8' получаем:

9'. $S_1S_2\ldots S_nQ_1Q_2\ldots Q_i\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_mR_1R_2\ldots R_j \in \Delta$.

Противоречие 7' и 9'.

Перейдем к доказательству обратного метаутверждения.

+1. $|S_1S_2\ldots S_n\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_m| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta>$.

+2. $S_1S_2\ldots S_n\mathbf{@}P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta$.

Из 1 в силу семантического определения атомарных формул получаем:

3. $\varphi_\Delta(S_1) \cap \varphi_\Delta(S_2) \cap\ldots\cap \varphi_\Delta(S_n) \cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_1)) \cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_2)) \cap\ldots\cap (\mathbf{D}_\Delta\backslash\varphi_\Delta(P_m)) = \varnothing$.

Последнее, согласно определению канонической модели, означает:

4. Не существует Δ-допустимого описания объекта α такого, что $S_1^+ \in \alpha$, $S_2^+ \in \alpha,\ldots, S_n^+ \in \alpha$, $P_1^- \in \alpha$, $P_2^- \in \alpha,\ldots, P_m^- \in \alpha$.

Рассмотрим сначала случай (a) $\{S_1,S_2,\ldots,S_n,P_1,P_2,\ldots,P_m\} = \mathbf{T}$.

Из 2 в силу определения Δ-допустимого описания объекта получаем:

5. Описание $\{S_1^+, S_2^+,\ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-,\ldots, P_m^-\}$ Δ-допустимо.

А из 4 следует, что

6. $\{S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-\}$ не является Δ-допустимым.

Противоречие 5 и 6.

В случае (b) $\{S_1, S_2, \ldots, S_n, P_1, P_2, \ldots, P_m\} \subset \mathbf{T}$ рассмотрим множество Δ_1 – множество всех таких формул из Δ, которые не содержат никаких других терминов помимо $S_1, S_2, \ldots, S_n$, $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Согласно **Лемме 1**,

5'. $\mathbf{\Delta_1}$ максимально относительно множества общих терминов $\{S_1, S_2, \ldots, S_n, P_1, P_2, \ldots, P_m\}$.

Из 2 и 5' по определению Δ-допустимого описания объекта вытекает:

6'. Описание $\{S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-\}$ $\mathbf{\Delta_1}$-допустимо.

Отсюда в силу **Леммы 4** получаем:

7'. Существует Δ-допустимое описание $\{S_1^+, S_2^+, \ldots, S_n^+, P_1^-, P_2^-, \ldots, P_m^-\} \cup \{M_1^0, \ldots, M_k^0\}$, где $M_1, \ldots, M_k$ – все попарно различные термины, входящие в **T**, но отсутствующие в $\{S_1, S_2, \ldots, S_n, P_1, P_2, \ldots, P_m\}$.

Последнее означает, что

8'. Существует Δ-допустимое описание объекта α такое, что $S_1^+ \in \alpha, S_2^+ \in \alpha, \ldots, S_n^+ \in \alpha, P_1^- \in \alpha, P_2^- \in \alpha, \ldots, P_m^- \in \alpha$.

Противоречие 4 и 8'.

Базис индукции доказан.

Обоснование индуктивного перехода тривиально, оно базируется на классических условиях значимости сложных формул и свойствах максимального множества формул Δ. □

Метатеорема 2. *Всякая общезначимая формула доказуема в исчислении* **ФС@**.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу ***A*** языка силлогистики. Допустим, что она не является теоремой исчисления **ФС@**. Тогда и формула $\neg\neg \boldsymbol{A}$ не доказуема в данной системе. Последнее означает, что множество $\{\neg \boldsymbol{A}\}$ непротиворечиво. Множество **T** силлогистических терминов в составе $\neg \boldsymbol{A}$ конечно. Согласно **Лемме 2**, $\{\neg \boldsymbol{A}\}$ можно расширить до максимального относительно **T** множества формул Δ. Ассоциируем с ним каноническую модель $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$. В силу **Леммы 6**, всякая формула, которая не содержит терминов, отсутствующих в множестве **T**, принадлежит Δ, е.т.е. эта формула истинна в модели $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$. Поскольку $\neg \boldsymbol{A} \in \Delta$, постольку $|\neg \mathbf{A}| = \mathbf{1}$ в $<\mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$. Отсюда следует, что ***A*** не значима в данной модели. Поэтому ***A*** не является общезначимой в нашей семантике формулой. В рассуждении получено противоречие. Следовательно, формула ***A*** доказуема в обобщенном силлогистическом исчислении **ФС@**. □

Метатеорема 3. *Перевод * погружает силлогистику в классическое одноместное исчисление предикатов* (**КОИП)**.

Требуется доказать, что для любой формулы ***A*** языка с единственной неопределенно-местной силлогистической константой **@**

ФС@ |– ***A***, е.т.е. **КОИП** |– ***A****.

В силу **Метатеорем 1** и **2** имеем для любой формулы ***A***:

(1) **ФС@** |– ***A***, е.т.е. |= ***A*** в семантике **ФС@**.

Модель <**D**, φ> можно использовать не только для означивания формул силлогистического языка, но и для оценки формул языка **КОИП**. Легко установить, что условия значимости произвольной силлогистической формулы ***A*** и ее перевода ***A**** совпадают. Отсюда вытекает, что

(2) |= ***A*** в семантике **ФС@**, е.т.е. |= ***A**** в семантике **КОИП**.

Следствием метатеорем о семантической непротиворечивости и полноте **КОИП** является утверждение: для любой силлогистической формулы ***A***

(3) |= ***A**** в семантике **КОИП**, е.т.е. **КОИП** |– ***A****.

Обосновываемый тезис непосредственно вытекает из утверждений (1)-(3). □

В заключение позволю себе выдвинуть гипотезу о том, что и классическое одноместное узкое исчисление предикатов (с замкнутыми формулами, без предметных и предметно-функциональных констант) погружается в систему обобщенной фундаментальной силлогистики **ФС@**, т.е. указанные исчисления рекурсивно эквивалентны. Данный факт означал бы, что средствами позитивной силлогистики действительно можно выразить все возможные виды отношений между конечным числом множеств, т.е. она представляет собой особый вариант логики классов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бочаров В.А.* Булева алгебра в терминах силлогистики // Логические исследования. М.: ИФ РАН, 1983. С. 32-42.
2. *Маркин В.И.* Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. Вып. 6. М.: РОССПЭН, 1999. С. 241-258.
3. *Смирнов В.А.* Дефинициальная эквивалентность расширенной силлогистики С2Д булевой алгебре // Логические исследования. М.: ИФ РАН, 1983. С. 43-48.