В.Х.Хаханян

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ С ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКОЙ: БАЗИСНАЯ СИСТЕМА

Abstract. *We give in this short article the basic formal system of set theory, which underlining logic is intuitionistic logic.*

Открытие Г. Кантора оформилось в отдельную ветвь математической науки во второй половине XIX века. К концу XIX и началу XX века теория множеств стала широко применяться сначала в анализе и геометрии, а затем и в отдельных разделах математики. Однако едва завершилось оформление учения о множествах Кантора, как оно натолкнулось на ряд противоречий (Бурали-Форти – 1895 г., Рассел – 1902 г.). При этом сама логика оказалась в опасном положении и проблема обоснования логики и математики вновь стала поистине сверхактуальной. Многие математики резко изменили свою позицию по отношению к теории множеств (А. Пуанкаре). Наступил третий кризис в основаниях математики. Были предложены различные возможные варианты выхода из этого кризиса. Одним их таких выходов стало создание аксиоматической системы теории множеств, устраняющей неограниченную схему свертки (аксиоматическая система теории множеств сначала Цермело, а затем – Цермело -Френкеля). Стандартной моделью такой аксиоматической системы теории множеств может служить кумулятивная иерархия.

С другой стороны, Л.Я. Брауэр предложил положить в основу математической деятельности интуитивную ясность математических конструкций и определений. А. Гейтинг дал соединенное начало этих двух направлений (формализма и интуитивной ясности) в 1930 году, что в итоге привело к созданию аксиоматической системы теории множеств, основанной на интуиционистской логике. Однако желаемого выхода так и не было найдено и ни одна из казавшихся наиболее оптимистичными программ (например, программа Д. Гильберта) в целом не привела к успеху (2-я теорема Гёделя и другие причины). В итоге ситуация так и не была выправлена. В книге А.Френкеля и И.Бар-Хиллела, у крупнейших специалистов в области оснований математики мы читаем (стр. 416): “Во взглядах на то, каким образом можно было бы достигнуть удовлетворительного обоснования, все еще имеется большое расхождение и громадное количество возникающих в этой связи проблем еще далеко не решено. И все же подавляющее большинство математиков отказывается считать, что идеи Кантора были всего лишь болезненным бредом. Несмотря на то, что основания теории множеств все еще довольно шатки, эти математики продолжают с успехом применять понятия, методы и результаты теории множеств в большей части разделов анализа и геометрии, и даже отчасти в арифметике и алгебре, твердо веря, что работы по обоснованию теории множеств приведут в конце концов к реабилитации теории множеств в полном (или по крайней мере *почти* полном) ее классическом объеме. Эта позиция отнюдь не исключает готовности интерпретировать теорию множеств совсем не так, как это обычно делается, что соответствует, очевидно, существуюшей потребности в пересмотре интерпретации логики и математики вообще". Первая часть этого вывода ("…к реабилитации теории множеств в полном (или по крайней мере *почти* полном) ее классическом объеме…") кажется мне излишне оптимистичной, так же как и возможность полного пересмотра интерпретации логики и математики, так как никаких удачных идей такого пересмотра (и направлений) пока даже не просматривается. Тем не менее уже нашло себе место направление, заключающееся в более или менее локальной формализации той или иной части (раздела) математики и изучении с определенной метаматематической и философской точки зрения этой части (раздела), причем последняя (метаматематика) является более или менее делом привычки и вкуса того или иного исследователя. Взаимоотношение различных метаматематических разделов также может изучаться с формальной точки зрения (т.е. возникает метаматематика формализованных систем метаматематик). Именно такая ситуация имеет сейчас место в большинстве исследований по основаниям математики и именно с этой точки зрения и стояла задача создания такой системы теории множеств на базе интуиционистской логики, которая удовлетворяла бы следующим критериям, т.е. была бы:

а) достаточно мощной, не слабее классической теории множеств Цермело - Френкеля;

б) достаточно эффективной, например, обладающей свойством полной экзистенциальности, и в которой были бы допустимы разные эффективные правила, например Черча, Маркова и другие;

в) эта система теории множеств должна была бы быть приемлемой с различных точек зрения, т.уе. допускать расширения до различных, может быть, несовместных друг с другом, вариантов теории множеств (классическое расширение до теории **ZF**, конструктивное в стиле Майхилла до конструктивной теории множеств

CST, интуиционистское до теорий множеств с различными оттенками понимания эффективности и т.д.).

Последний пункт говорит о базисности такой аксиоматической системы теории множеств, основанной на интуиционистской логике предикатов. Целью исследований в создании такой базисной системы теории множеств, основанной на интуиционистской логике, может служить аксиоматическая система $\mathbf{ZFI_R}$ **+ DCS**, как обладающая всеми отмеченными свойствами (см., например, В.Х.Хаханян «Интуиционистская теория множеств: модели и метаматематика»). Это – основной философский вывод моих исследований в области теории множеств с интуиционистской логикой. Отметим также, что наиболее трудной и нерешённой проблемой в исследованиях по аксиоматическим системам теории множеств остается следующая (после, естественно, проблемы построения модели для аксиоматической системы теории множеств **NF** Куайна): возможна ли интерпретация системы $\mathbf{ZFI_R}$ + **DCS** (или системы $\mathbf{ZFI_C}$ или классической теории множеств **ZF**) в системе $\mathbf{ZFI_R}$? Дадим сейчас краткий набросок возможного решения этой проблемы. Система $\mathbf{ZFI_C}$ является системой теории множеств, равнонепротиворечивой с системами $\mathbf{ZFI_R}$ **+ DCS** и **ZF** (так как вторая система легко интерпретируется в третьей, а третья в первой (результат Фридмана)). Поэтому будем строить интерпретацию первой системы теории множеств $\mathbf{ZFI_C}$ в $\mathbf{ZFI_R}$. Предположим, что в последней теории множеств нам удалось построить (т.е. выразить) систему функций на множествах (это самое тонкое место – вопрос о существовании системы функций со свойствами, описанными ниже), может быть счётную, которая обладает следующими свойствами:

а) система функций допускает кодировку множествами и существует универсальная функция для данной системы функций;
б) система функций содержит некоторые стандартные функции на множествах (например, тождественную функцию, функции-константы, гёделевы конструктивные функции и т.д.);
в) при ограничении аргументов натуральными числами или ординалами получаются системы функций с теми же свойствами на натуральных числах (частично-рекурсивные) или на ординалах;
г) для данной системы функций имеется некоторый аналог **s-m-n**-теоремы для частично-рекурсивных функций на натуральных числах.

Системы функций такого рода выразимы (т.е. теорию таких систем функций можно развить) в классической **ZF** (ряд работ на эту тему опубликовали Йенсен и Карп). Однако в интуиционистской $\mathbf{ZFI_R}$ будут ли выразимы системы функций на множествах со свойствами а) – г)?

Главная тонкость в том, что при построении такой системы функций и доказательстве свойств а) – г) не должен использоваться полный закон исключённого третьего. Такая система функций позволила бы интерпретировать все аксиомы и схемы аксиом системы теории множеств $\mathbf{ZFI_C}$ как систему «реализующих» функций при оценках (например так, как это проводилось в книге автора, упомянутой выше, для определения реализуемости формулы при оценках для системы теории множеств **ZFI2**). В этом случае схема аксиом собирания могла бы быть «реализуема» следующим образом с использованием внешним образом только схемы аксиом подстановки, т.е. стала бы возможной интерпретация теории $\mathbf{ZFI_C}$ в теории $\mathbf{ZFI_R}$:

R(**e**(код функции), **g**: $\boldsymbol{\omega \to V}$ (достаточно только одной оценнки), $\boldsymbol{\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \to \exists B \forall x \in a \exists y \in B \varphi(x,y)}$ – схема аксиом собирания). Такую конструкцию нужно получить. Предположим, что $\mathbf{R(k,g,}\ \boldsymbol{\forall x \in a \exists y \varphi(x,y))}$, то есть функция **к** «реализует» посылку схемы собирания. Это означает, что для всякого множества **x** из $\mathbf{a \in V}$, $\mathbf{!k(x) = < l,y >}$ так, что $\mathbf{R(l,g^n{}_y,\ \boldsymbol{\varphi}(x,))}$ и тогда нужное **B** и «реализующая» заключение схемы собирания функция могут быть получены с помощью схемы подстановки из функции **к** («реализация» посылки), что и доказывало бы «реализуемость» схемы собирания и, следовательно, (с учетом реализуемости всех остальных аксиом) интерпретируемость системы $\mathbf{ZFI_C}$ в системе $\mathbf{ZFI_R}$ и тем самым доказывало бы непротиворечивость первой системы теории множеств относительно второй.