А.В.Чагров

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА ФИНИТАРНОГО СЕМАНТИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ БАЗИСНОЙ И ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИК А.ВИССЕРА*

Abstract. *Formula B is a finitary semantical consequence of formula A on class of semantical structures Ω (for example, Kripke frames or generalized frames of some logic L) if B is valid in all finite structures from Ω validating A. The undecidability of various versions of the notion of finitary semantical consequence relation for classes of Kripke frames and generalized frames of the Visser's basic logic and the Visser's formal logic is proposed.*

В этой статье продолжаются исследования базисной и формальной пропозициональных логик А.Виссера [10], **BPL** и **FPL** соответственно. В частности, мы отсылаем читателя к статье автора [3], где обсуждаются определения этих логик и возможные определения их расширений. Однако для удобства чтения вкратце напомним, что базисная логика и формальная логика имеют тот же язык, что и интуиционистская пропозициональная логика, т.е. их формулы строятся стандартным образом из пропозициональных переменных и константы $\perp$ («ложь») с помощью связок & (конъюнкция), v (дизъюнкция), $\to$ (импликация), и они могут быть определены семантически подобно интуиционистской логике, как описывается ниже.

Напомним, что интуиционистская логика может быть задана как множество формул, истинных в конечных шкалах Крипке, являющихся частичными порядками (т.е. отношение достижимости в них является транзитивным, рефлексивным и антисимметричным). Формулы в шкале оцениваются с помощью оценок (означиваний), сопоставляющих каждой пропозициональной переменной множество элементов шкалы (миров, иными словами), являющееся наследственным, т. е. если в такое множество попал некоторый мир, то и все достижимые из него также попадают. Значение формулы в мире (отношение «в мире α истинна формула φ») при данной оценке задается индукцией по построению формулы: константа $\perp$ не является истинной ни в одном мире; в мире

* В ходе исследований автор пользовался поддержкой РФФИ (гранты 03-06-80115 и 02-01-22003) и фонда CNRS (Франция).

α истинна пропозициональная переменная p, если оценкой переменной p сопоставляется множество, содержащее мир α; конъюнкция истинна в мире α, если в этом мире истинны оба конъюнктивных члена; дизъюнкция истинна в мире α, если в этом мире истинен хотя бы один из дизъюнктивных членов; импликация истинна в мире α, если для всякого мира β, достижимого из α, из того, что в β истинна посылка импликации, следует, что в β истинно и заключение этой импликации. (Отметим, что специфика шкалы здесь проявляется только в импликации.) Наконец, формула считается истинной в шкале, если она истинна в каждой точке этой шкалы при любой оценке.

Для семантического определения логик **BPL** и **FPL** в соответствии с результатами А.Виссера [10] достаточно внести следующие изменения. Если в определениях предыдущего абзаца в конечных шкалах вместо частичного порядка постулируем всего лишь транзитивность отношения достижимости (при этом можно постулировать и антисимметричность, это ровным счетом ничего не меняет для истинности рассматриваемых формул; собственно, как хорошо известно, и в определении истинности формул для случая интуиционистской логики требование антисимметричности можно опустить), то множество формул, истинных во всех получившихся шкалах, и будет множеством формул, выводимых в **BPL**. Если же вместо частичного порядка постулировать строгий частичный порядок, т.е. потребовать, чтобы отношение достижимости было транзитивным и иррефлексивным, то получившееся множество истинных формул есть **FPL**.

Обратим внимание, что в только что приведенных определениях речь шла о *конечных* шкалах. Хотя и **BPL** и **FPL** имеют бесконечные шкалы, в этой статье нас будут интересовать только их конечные шкалы.

Нам понадобится еще одно семантическое понятие – понятие обобщенной шкалы.

Обобщенной конечной шкалой называем конечную шкалу с некоторым фиксированным семейством наследственных множеств, которое замкнуто относительно следующей операции: если в качестве оценки выбирать сопоставление переменным множеств этого семейства, то для всякой формулы множество миров, в которых эта формула истинна, будет элементом этого семейства. Истинность в обобщенных шкалах определяется так же, как и выше, за одним исключением: оценки всегда выбираются так, что переменным сопоставляются множества миров из фиксированного для этой шкалы семейства. Если обобщенная шкала такова, что фиксированное семейство наследственных множеств состоит из всех ее наследственных множеств, то эту шкалу будем называть шкалой Крипке. В случае шкал Крипке фиксированное семейство наследственных множеств можно не упоминать, поскольку берутся все такие множества. Легко понять, что если в приведенных выше определениях логик **BPL** и **FPL** заменить понятие конечной шкалы Крипке понятием обобщенной конечной шкалы, то получатся те же логики **BPL** и **FPL**. Для краткости далее будем называть шкалы Крипке и обобщенные шкалы, участвующие в этих двух вариантах семантических определений логик **BPL** и **FPL**, шкалами Крипке и обобщенными шкалами этих логик соответственно.

Вообще, интерес к конечным семантическим структурам (шкалам, обобщенным шкалам, моделям, алгебрам, матрицам и т.п.) в логических исследованиях совершенно оправдан с содержательной точки зрения. Помимо стандартных объяснений этого тем, что логические системы призваны, в частности, моделировать человеческие рассуждения, а человек в принципе познает бесконечное лишь как абстракцию чего-то «очень большого», к настоящему времени сложилась новая компьютерно-информационная реальность (впрочем, можно считать, что осознание наличия этой новой реальности относится к 30-м годам XX века), а каждый конкретный реальный компьютер в принципе конечен не только по принципам работы, но и по имеющейся у него памяти (чем реальный компьютер принципиально отличается от своих идеальных собратьев вроде машины Тьюринга, имеющей потенциально бесконечную память в виде достраиваемой в случае необходимости ленты с ячейками).

Уже в начале 50-х годов XX века было понято, что логика конечных семантических структур во многих случаях устроена значительно сложнее логики структур без требования конечности. Так, логика первого порядка, хотя и является алгоритмически неразрешимой по теореме Черча, все же рекурсивно перечислима (это следствие теоремы Геделя о полноте для логики первого порядка), т. е. имеется алгоритм, который строит такую последовательность формул первого порядка (бесконечную, разумеется; т. е. алгоритм работает вечно), что она состоит в точности из всех тождественно истинных формул первого порядка. Однако по теореме Трахтенброта множество формул первого порядка, истинных во всех *конечных* моделях, не является даже рекурсивно перечислимым. К настоящему времени даже сложилась своеобразная теория конечных моделей, см. [8], со своей проблематикой, во многом несхожей с проблематикой классической теории моделей, см. [7].

В случае пропозициональных логик конечные семантические структуры играют существенно более позитивную роль: подавляющее большинство этих логик, построенных по содержательным соображениям (в частности, и рассматриваемые нами **BPL** и **FPL** в соответствии с [10] и/или приведенными выше определениями), финитно аппроксимируемы, что чаще всего позволяет доказывать разрешимость этих логик. Но имеется тип алгоритмических вопросов о пропозициональных логиках, когда конечные семантические структуры теряют эту свою позитивность. Это прежде всего проблема семантического следования для конечного случая, то есть различных вариантов того, что мы далее будем называть финитарным семантическим следованием.

Говорим, формула B финитарно семантически следует из формулы A на классе семантических структур Ω, если B истинна во всех тех конечных семантических структурах из Ω, в которых истинна формула A. Впервые вопрос о разрешимости финитарного семантического следования в пропозициональном случае был поставлен явно в [4] для случая модальных формул и класса шкал Крипке. Надо думать, что известен он был и раньше, но автору данных строк он стал известен именно из [4], правда, в препринтном варианте, т.е. несколько раньше публикации [4].

Решение вопроса [4] было получено мною в 1990 году, см. [1]: оказалось, что отношение финитарного семантического следования неразрешимо не во многих интересных случаях, в частности – для модальных формул и конечных шкал, модальных формул и шкал логики **S4**, модальных формул и шкал логики **GL**, интуиционистских пропозициональных формул и интуиционистских шкал. Стоит заметить, что результаты [1] легко распространяются и на некоторые другие классы шкал, близкие к рассмотренным там; в частности, отношение финитарного семантического следования неразрешимо не во многих интересных случаях, в частности – для модальных формул и шкал логики **K4**, т.е. шкал Крипке с транзитивным отношением достижимости. Для случая модальных формул и шкал логики **GL** доказательство неразрешимости финитарного семантического следования вошло в [6], а на основе этого доказательства в [5] был решён ещё один вопрос [4]: проблема первопорядковой определимости модальных формул на классе конечных шкал алгоритмически неразрешима. Аналогичный факт можно доказать и для первопорядковой определимости интуиционистских пропозициональных формул на классе конечных интуиционистских шкал.

Базисная и формальная пропозициональные логики А.Виссера близки к модальным и интуиционистской логикам. А именно, если воспользоваться Т-переводом, погружающим интуиционистскую логику в модальную логику **S4**, при котором оператор необходимости навешивается на атомарные подформулы и подформулы с главной связкой – импликацией, то **BPL** погружается в модальную логику **K4**, а **FPL** – в **GL**.

Тем не менее сходство **BPL** и **FPL** с интуиционистской логикой не является глубокой аналогией. В частности, если для суперинтуиционистских логик и нормальных модальных логик все виды конечных семантических структур – шкалы, модели как обобщенной шкалы, алгебры – эффективно эквивалентны, т. е. каждая из этих структур эффективно перестраивается в конечную структуру другого типа с сохранением множества истинных формул (поэтому, в частности, понятие финитно аппроксимируемой логики для этих классов логик формулируется безразлично по отношению к выбору типа семантики, а всякая финитно аппроксимируемая логика полна по Крипке), то для **BPL** и **FPL** это не так: как было показано в [9], существуют конечные обобщенные шкалы **BPL** и **FPL**, которые не эквивалентны семантически никаким шкалам Крипке. Поэтому и формулировки финитарного семантического следования для случая логик **BPL** и **FPL** различны для случая шкал Крипке и обобщенных шкал.

Сформулируем теперь основные результаты этой работы.

Теорема 1. *Проблема семантического следования формул от одной переменной для случая шкал Крипке базисной логики* **BPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 2. *Проблема семантического следования формул от одной переменной для случая обобщенных шкал базисной логики* **BPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 3. *Проблема семантического следования формул от двух переменных для случая шкал Крипке формальной логики* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Теорема 4. *Проблема семантического следования формул от двух переменных для случая обобщенных шкал формальной логики* **FPL** *алгоритмически неразрешима.*

Разумеется, эти утверждения останутся справедливыми, если мы снимем ограничения на число переменных.

Доказательства теорем 1–4 довольно громоздки, поэтому мы вынуждены здесь ограничиться лишь несколькими замечаниями.

Доказательства всех четырех теорем проводятся параллельно с небольшими изменениями, т.е. по существу это почти одно и то же доказательство, причем доказательства теорем 1 и 2 совпадают практически дословно, так же как и доказательства теорем 3 и 4. Во многих деталях эти доказательства близки к доказательству неразрешимости финитарного семантического следования модальных формул на шкалах логики **GL**, опубликованному в [5] и [6]. Однако эти детали близки лишь идейно. Например, модальные аналоги теорем 3 и 4 в случае логики **GL** оказываются более сильными – в этом случае достаточно одной переменной для получения неразрешимости финитарного семантического следования. Надо сказать, что в [5] и [6] вообще не оценивалось необходимое количество переменных, в частности использовались четыре переменные. Снижение этого числа переменных до одной в случае **GL** и двух в случае **FPL** в теоремах 3 и 4, а также до одной переменной в теоремах 1 и 2 получается применением метода контекстных подстановок, использовавшиммся автором в [2].

Несмотря на одновременность доказательств теорем 1 и 2, 3 и 4, сами теоремы независимы, поскольку в них рассматриваются *разные* множества пар формул A и B, находящихся в отношении финитарного семантического следования, т.е. такие формулы A и B, что находятся в одном отношении, но не находятся в другом, иными словами, не представляется возможным непосредственно вывести из теоремы 1 теорему 2, и наоборот, а также теорему 4 из теоремы 3, и наоборот.

Теперь обратимся к некоторым усилениям теорем 1–4. Хотя из этих усилений теоремы 1–4 следуют непосредственно, по изначальной формулировке решаемых проблем именно теоремы 1–4 являются основными, поэтому они и сформулированы первыми.

Небольшие модификации доказательств теорем 1–4, детали таких модификаций см. в [5], дают возможность фиксировать подходящим образом одну из двух формул, находящихся в отношении финитарного семантического следования. Так получаются следующие утверждения.

Теорема 5. *Существует такая формула A от одной переменной, что множество константных* (т.е. не содержащих переменных) *формул, являющихся финитарными семантическими следствиями формулы A на классе шкал Крипке базисной логики* **BPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 6. *Существует такая константная формула B, что множество формул от одной переменной, из которых формула B финитарно семантически следует на классе шкал Крипке базисной логики* **BPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 7. *Существует такая формула A от одной переменной, что множество константных формул, являющихся финитарными семантическими следствиями формулы A на классе обобщенных шкал базисной логики* **BPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 8. *Существует такая константная формула B, что множество формул от одной переменной, из которых формула B финитарно семантически следует на классе обобщенных шкал базисной логики* **BPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 9. *Существует такая формула A от двух переменных, что множество формул от одной переменной, являющихся финитарными семантическими следствиями формулы A на классе шкал Крипке формальной логики* **FPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 10. *Существует такая формула B от одной переменной, что множество формул от двух переменных, из которых формула B финитарно семантически следует на классе шкал Крипке формальной логики* **FPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 11. *Существует такая формула A от двух переменных, что множество формул от одной переменной, являющихся финитарными семантическими следствиями формулы A на классе обобщенных шкал формальной логики* **FPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

Теорема 12. *Существует такая формула B от одной переменной, что множество формул от двух переменных, из которых формула B финитарно семантически следует на классе обобщенных шкал формальной логики* **FPL**, *алгоритмически неразрешимо.*

И наконец, последнее замечание. Ввиду очевидной рекурсивной (т.е. алгоритмической) перечислимости дополнений всех упомянутых в формулировках приведенных выше теорем множеств пар формул, находящихся в том или ином отношении финитарного семантического следования (теоремы 1–4) и множеств формул (теоремы 5–12), оборот «алгоритмически неразрешимо» можно заменить на «не является рекурсивно перечислимым». Таким образом, каждую из этих теорем можно считать аналогом упомянутой выше теоремы Трахтенброта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чагров А.В.* Неразрешимость финитарного семантического следования // Десятая Всесоюзная конференция по математической логике. Алма-Ата, 1990. С. 162.
2. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. М., Физматлит, 1994. С. 62–108.
3. *Чагров А.В.* Формальная пропозициональная логика А. Виссера и ее расширения // Логические исследования. Вып. 10. М., Наука, 2003. С. 204–211.
4. *van Benthem J.F.A.K.* Notes on Modal Definability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1989. V. 30. P. 20–35.
5. *Chagrov A., Chagrova L.* Algorithmic Problems Concerning First-Order Definability of Modal Formulas on the Class of all Finite Frames // Studia Logica. 1995. V. 55. P. 421–448.
6. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
7. *Chang C.C., Keisler H.K.* Model Theory. Elsevier Science Publishers, 1990.
8. *Ebbinghaus H.-D., Flum J.* Finite Model Theory. Springer, 1999.
9. *Suzuki Y., Wolter F., and Zakharyaschev M.* Speaking about transitive frames in propositional languages // Journal of Logic, Language, and Information. 1998. V. 7. P. 317–339.
10. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981.V. 40. P. 155–175.