П.И.Быстров

РЕЛЕВАНТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ФОРМЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

Abstract. *Tableaux version of the propositional relevant system is considered. It exposes certain modification of the analytic tableaux construction method similar to the approach used in Gentzen-style sequent calculus constructions with "generalized" inference rules.*

Учитывая то обстоятельство, что при формулировке правил для импликативных формул в табличных вариантах релевантных систем в любом случае приходится учитывать «состояние» таблицы на том шаге ее построения, на котором эти правила применяются, желательно использовать метод построения таких систем, основанный на определении понятия «логического пути» между вхождениями префиксированных формул в конкретную ветвь таблицы. (Важно учитывать, что в данном случае речь идет не о правильно построенных префиксированных формулах, а именно о *вхождениях* таких формул в рассматриваемую таблицу. Различие между «формулой» и «вхождением» формул легко выразить в точных определениях.)

Далее один из вариантов такого метода демонстрируется на примере построения пропозициональной релевантной системы табличного вывода $\mathbf{RS_{AT}}$. При этом предполагаются известными стандартные понятия и правила, применяемые при построении «блоковых» аналитических таблиц для конечных множеств префиксированных формул (т. е. формул с префиксами T и F) (см. [3]).

В формулировке системы $\mathbf{RS_{AT}}$ используются только префиксированные формулы и следующие понятия и определения.

Главной формулой рассматриваемого применения правила вывода называется формула, к которой применяется данное правило; *боковой формулой* рассматриваемого применения правила вывода называется любая из формул, которые получаются из главной формулы в результате применения данного правила. Например, в схеме правила построения таблицы

$$\frac{S,\ T(\alpha\supset\beta)}{S,\ F\alpha \ \big|\ S,\ T\beta}$$

формула $T(\alpha\supset\beta)$ является главной, формулы $F\alpha$ и $T\beta$ - боковыми.

Определение 1. Вхождения формул вида T(α) и F(α) в некоторую ветвь *b* аналитической таблицы **t** называются контрарной парой ветви *b* в **t**.

Определение 2. Логический путь (в ветви *b* таблицы **t**) от фиксированного вхождения формулы α в *b* к фиксированному вхождению формулы β в *b* есть такая кратчайшая конечная последовательность формул A_1, … A_n, , что A_1 есть α, A_n есть β, и для любого n (1<i<n), (1) A_i графически совпадает с A_{i+1}, или (2) A_i графически совпадает с членом контрарной пары вида Tγ (Fγ), а A_{i+1} графически совпадает с членом контрарной пары вида F(γ) (Tγ), или (3) A_i есть боковая (главная), а A_{i+1} есть главная (боковая) формула некоторого применения правила вывода в **t**.

Часть логического пути, удовлетворяющая пункту (1), варианту пункта (3), в котором «A_i есть главная, а A_{i+1} есть боковая формула некоторого применения правила вывода», и варианту пункта (2), в котором A_i графически совпадает с членом контрарной пары вида Tγ, а A_{i+1} графически совпадает с членом контрарной пары вида F(γ), называется *нисходящим фрагментом* данного пути. Часть логического пути, удовлетворяющая пункту (1), варианту пункта (3), в котором «A_i есть боковая, а A_{i+1} есть главная формула некоторого применения правила вывода», и варианту пункта (2), в котором A_i графически совпадает с членом контрарной пары вида Fγ, а A_{i+1} графически совпадает с членом контрарной пары вида T(γ), называется *восходящим фрагментом* данного пути.

Система $\mathbf{RS_{AT}}$ задается множеством стандартных правил построения аналитических таблиц для формул, главными логическими знаками являются &, ∨ или ¬, и следующими правилами для импликативных формул:

$$\frac{S,\ T(\alpha\supset\beta)}{S,\ F\alpha \ \big|\ S,\ T\beta}\ T\supset \qquad\qquad \frac{S,\ F(\alpha\supset\beta)}{S,\ T\alpha\ ;\ S,\ F\beta}\ F\supset$$

При этом применение правила F⊃ в ветви *b* аналитической таблицы считается *корректным*, если и только если в *b* есть начинающийся с нисходящего фрагмента и содержащий по крайней мере одну контрарную пару логический путь от любого вхождения в *b* каждой формулы, являющейся элементом множества {S, Tα}, к формуле Fβ, а также есть начинающийся с восходящего фрагмента и содержащий по крайней мере одну контрарную пару логический путь от любого вхождения в *b* формулы Fβ по крайней мере к одной из формул, являющейся элементом множества $\{S, T\alpha\}$.

На применение правила $T\supset$ не накладывается никаких ограничений. В процессе построения таблиц всегда сначала применяется правило $F\supset$, а затем правило $T\supset$.

Ветвь аналитической таблицы **t** для формулы α считается замкнутой, если в ней встречаются элементарные (не содержащие логических констант) префиксированные формулы $T(\beta)$ и $F(\beta)$ (т.е. в эту ветвь входит по крайней мере одна контрарная пара элементарных формул). Аналитическая таблица **t** для формулы α замкнута, если замкнуты все ее ветви. Формула α *доказуема* в $\mathbf{RS_{AT}}$, если можно построить замкнутую аналитическую таблицу, построение которой начинается с префиксированной формулы $F\alpha$, *и каждое применение правила $F\supset$ в этом построении корректно*.

Пример замкнутой аналитической таблицы, показывающий, что формула (соответствующая принципу tollendo ponens) не доказуема в $\mathbf{RS_{AT}}$:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{(1)\ \ | \mathrm{F}\ (((A\vee B)\&\ \neg A)\supset B)} \\
\multicolumn{2}{c}{(2)\ \ | \mathrm{T}\ ((A\vee B)\&\ \neg A);\ \mathrm{F}B} \\
\multicolumn{2}{c}{(3)\ \ | \mathrm{T}\ (A\vee B);\ \mathrm{T}\neg A;\ \mathrm{F}B} \\
(3.1)\ \ | \mathrm{T}A;\ \mathrm{T}\neg A;\ \mathrm{F}B & (3.2)\ \ | \mathrm{T}B;\ \mathrm{T}\neg A;\ \mathrm{F}B \\
(3.1.1)\ \ | \mathrm{T}A;\ \mathrm{T}A;\ (\mathrm{F}B)^* & (3.2.1)\ \ | \mathrm{T}B;\ \mathrm{T}A;\ \mathrm{F}B
\end{array}
$$

Данная замкнутая таблица не является выводом формулы $((A\vee B)\&\ \neg A)\supset B$, так как единственное применение правила $F\supset$ некорректно - в левой ветви таблицы нет (оговоренного в условии корректности) логического пути от помеченного звездочкой вхождения формулы FB к вхождению формулы $T((A\vee B)\&\ \neg A)$.

Примечание. В работе [1] среди прочих допущена досадная опечатка «содержательного» характера. Разумеется, там приведен табличный вывод формулы, соответствующей принципу сокращения, а не принципу *tollendo ponens*. Кстати говоря, сформулированная в [1] система $\mathbf{R_{AT}}$ отличается от $\mathbf{RS_{AT}}$, в частности, именно тем, что во второй из них не доказуема формула любого вида, выражающая принцип *tollendo ponens*, а в первой – доказуема.

Можно показать, что система $\mathbf{RS_{AT}}$ дедуктивно эквивалентна исчислению **SLR**, которое получается из исчисления **SLA** В.А.Смирнова (см. [2]) заменой схем правил заключения для отрицания на следующие схемы:

$$
\to\neg\ \frac{A,\ \Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,\ \neg A} \qquad\qquad \neg\to\ \frac{\Gamma\to\Theta,\ A}{\neg A,\ \Gamma\to\Theta},
$$

добавлением правила утончения

$$\rightarrow \mathrm{w}\ \frac{\Gamma\rightarrow\Theta}{\Gamma\rightarrow\Theta, A}$$

(во всех схемах Γ - конечная, возможно, пустая, последовательность формул, а Θ - формула или пустой знак); и следующим условием корректности применения правила

$$\rightarrow\supset\ \frac{A, \Gamma\rightarrow B}{\Gamma\rightarrow A\supset B}\ :$$

применение этого правила корректно, если и только если в выводе посылки есть проходящий по крайней мере через одну основную секвенцию логический путь от любого вхождения в этот вывод каждой формулы, являющейся элементом последовательности формул A, Γ→, к формуле B, а также есть начинающийся с восходящего фрагмента и проходящий по крайней мере через одну основную секвенцию логический путь от любого вхождения в этот вывод формулы B по крайней мере к одной из формул, являющейся элементом последовательности формул A, Γ→.

Определение логического пути (в ветви секвенциального вывода) от одного вхождения формулы в секвенцию к другому вхождению формулы в секвенцию совершенно аналогично приведенному выше определению 2 для табличной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быстров П.И.* Проблемы построения табличных вариантов модальных и релевантных систем // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 2004.
2. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука, 1973.
3. *Smullyan R.M.* First-Order Logic. Dover Publications Inc. New York, 1995.