М.Н.Бежанишвили

ЛОГИЧЕСКОЕ ВСЕВЕДЕНИЕ И ЭПИСТЕМИЧЕСКОЕ ТАБЛИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

Abstract. *In the article a predicate version of epistemic tableaux calculus Ep4 based on semantics of partial possible worlds is constructed and investigated. In particular, it is shown that Ep4 is sound and complete. This non-normal and non-monotonic tableaux calculus enables us to avoid the so-called paradox of logical omniscience.*

Введение. Как известно, многие логики не считают стандартную семантику возможных миров удовлетворительным средством для адекватного анализа эпистемической логики (см. [3], [8], [7], [1], [4], [9]), ввиду того, что она предполагает так называемое. логическое всеведение. Пусть эпистемический оператор $\Box$ означает: «некое лицо знает, что...». На наш взгляд, предпочтительнее $\Box$ интерпретировать следующим образом: «на данном этапе развития знания известно, что...». Тогда логическое всеведение можно выразить утверждениями:

1) Если иимпликация $A \supset B$ классически общезначима и формула $\Box A$ истинна в возможном мире w, то $\Box B$ также истинна в возможном мире w.

2) Если формула A классически общезначима, то $\Box A$ истинна в возможном мире w.

Мы покажем, что в нижеописанном эпистемическом табличном исчислении предикатов логическое всеведение не возникнет ни в одном из вышеуказанных видов.

Табличное исчисление Ep4

Формальный язык. Алфавит языка Ep4 содержит неограниченный запас индивидных переменных (Ind), n-арных ($n \geq 0$) предикатных букв (Prl), логические связки $\neg$, $\vee$ для отрицания и дизъюнкции, квантор существования $\exists$ и эпистемический модальный оператор $\Box$. Остальные связки и квантор всеобщности вводятся обычными определениями. Понятия формулы (Frm), атомарной формулы (Atm), а также свободных и связанных вхождений индивидных переменных в формулу определяются обычно. Пусть A – формула, а $x_1,\ldots,x_n$ – все ее различные свободные индивидные переменные. Если $n>0$, будем называть A открытой формулой и писать $A(x_1,\ldots,x_n)$, а если n=0, – замкнутой формулой. Замкнутую формулу вида $\forall x_1\ldots\forall x_n A$ называют замыканием всеобщности формулы A и сокращенно обозначают через $\forall A$. Будем говорить, что формула A полностью модализирована, если каждая атомарная формула, входящая в A, находится в области действия некоторого эпистемического модального оператора формулы A.

Семантика. Ep4-фреймом назовем упорядоченную четверку $Fr=\langle H,W,R,D\rangle$, где H – множество (частичных возможных миров), содержащее непустое подмножество W (тотальных возможных миров); R – бинарное отношение достижимости между мирами, рефлексивное и транзитивное в H; D – функция областей, определенная на H, такая, что $D(v)\neq\varnothing$, для всякого $v\in H$ и если $\langle w,v\rangle\in R$, то $D(w)\subseteq D(v)$; $w,v\in H$.

Ep4-моделью является пара $\langle Fr,V\rangle$, где Fr есть Ep4-фрейм, а V – бинарная частичная функция, определенная на множестве $Prl\times H$, такая, что если n=0, то $V(P^n,v)=T$ или $\perp$ или же non!$V(P^n,v)$, а если n>0, то $V(P^n,v)$ есть пара $\langle\alpha,\psi\rangle$, такая, что $\alpha,\psi\subseteq[D(v)]^n$ и если $v\in W$, то $\alpha\cap\psi=\varnothing$ и $\alpha\cup\psi=[D(v)]^n$, а если $v\in H-W$, то $\alpha\cap\psi=\varnothing$, где $[D(v)]^n$ является n-кратным декартовым произведением множества D(v) на себя ($v\in H$).

В случае, когда $v\in W$, функция V определена для всех P^n и v. Когда же $v\in H-W$, то при n=0 V может быть неопределенной для некоторых или ни для каких P^n и v, а при n>0 $V(P^n,v)=\langle\alpha,\psi\rangle$, причем $\alpha\cup\psi\neq[D(v)]^n$ для некоторых или ни для каких P^n и v.

Пусть, далее, $U=\cup_{v\in H}D(v)$.

Если A – атомарная формула, она является пропозициональной переменной P^0 или имеет вид $P^n(x_1,\ldots,x_n)$ (n>0).

При n=0 $V(P^n,v)$ уже задана моделью. Пусть поэтому n>0, индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ сопоставлены элементы $a_1,\ldots,a_n$ из U и пусть $V(P^n,v)$ есть пара $\langle\alpha,\psi\rangle$.При данном сопоставлении $V(P^n(x_1,\ldots,x_n),v)=T$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in\alpha$; $V(P^n(x_1,\ldots,x_n),v)=\perp$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in\psi$; в противном случае non!$V(P^n(x_1,\ldots,x_n),v)$.

Для любого v из H при фиксированном сопоставлении элементов U свободным индивидным переменным A и B:

$V(\neg A,v)=T$ тогда и только тогда, когда $V(A,v)=\perp$; $V(\neg A,v)=\perp$ тогда и только тогда, когда $V(A,v)=T$ и non!$V(A,v)$, в противном случае.

$V(A\vee B,v)=T$ тогда и только тогда, когда $V(A,v)=T$ или $V(A,v)=T$; $V(A\vee B,v)=\perp$ тогда и только тогда, когда $V(A,v)=V(B,v)=\perp$; в противном случае, non!$V(A,v)$.

$V(\Box A,v)=T$ тогда и только тогда, когда $V(A,u)=T$ (и, следовательно, $!V(\Box A,v)$) для всякого u из H, такого, что $(v,u)\in R$; $V(\Box A, v)=\bot$, в противном случае (т.е. тогда и только тогда, когда $non!V(A, v)$ или $V(A,v)=\bot$ для некоторого u из H, такого, что $(v,u)\in R$).

Наконец, пусть $x_1,\ldots,x_n$ – все свободные переменные, входящие в формулу $\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y)$, и пусть им соответственно сопоставлены элементы $a_1,\ldots,a_n$ из U. В таком случае, $V(\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y), v)=T$ тогда и только тогда, когда существует элемент b из $D(v)$, такой, что $V(A(x_1,\ldots,x_n,y), v)=T$, если переменной y сопоставляется b; $V(\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y), v)=\bot$ тогда и только тогда, когда $V(A(x_1,\ldots,x_n,y), v)=\bot$, если переменной y сопоставляется любой элемент из $D(v)$; в противном случае $non!V(\exists yA(x_1,\ldots,x_n,y), v)$.

Формула A истинна в модели M, если A истинна для всякого v из W. A истинна в Ep4-фрейме Fr, если она истинна во всех моделях, базирующихся на Fr. Наконец, A общезначима в классе Ep4-фреймов, если она истинна в каждом Ep4-фрейме.

Теория доказательств. Пусть ~Frm – множество всех меченых знаком «~» формул из Frm. Таблицей будем называть подмножество множества $Frm\cup{\sim}Frm$, составленное с помощью нижеследующих правил. Альтернативной системой таблиц назовем упорядоченное в виде дерева множество таблиц, а диаграммой – множест-во альтернативных систем таблиц. В каждой такой системе *S* одна из таблиц (а именно, начало дерева) является главной. Остальные таблицы *S* вспомогательны. Как главная, так и вспомогательная таблицы из *S* могут быть альтернативными напарницами таблиц, принадлежащих другим альтернативным системам.

Составление диаграммы для испытуемой формулы A, в случае, когда A замкнута, мы начинаем включением $\neg A$ в главную таблицу, а если A открыта, тогда в главную таблицу помещаем $\neg\forall A$ (ср. [6]). Затем продолжаем построение согласно следующим пропозициональным и кванторным правилам:

$$\mathrm{NN}\ \frac{\Gamma, \neg\neg A}{\Gamma, \neg\neg A, A}; \qquad {\sim}\mathrm{NN}\ \frac{\Gamma, {\sim}\neg\neg A}{\Gamma, {\sim}\neg\neg A, {\sim}A};$$

$$\mathrm{ND}\ \frac{\Gamma, \neg(A\vee B)}{\Gamma, \neg(A\vee B), \neg A, \neg B}; \qquad {\sim}\mathrm{D}\ \frac{\Gamma, {\sim}(A\vee B)}{\Gamma, {\sim}(A\vee B), {\sim}A, {\sim}B};$$

$$\mathrm{D}\ \frac{\Gamma,\ (A\vee B)}{\Gamma,\ (A\vee B),\ A \mid \Gamma,\ (A\vee B),\ B};$$

$$\sim\mathrm{ND}\ \frac{\Gamma,\ \sim\neg(A\vee B)}{\Gamma,\ \sim\neg(A\vee B),\ \sim\neg A \mid \Gamma,\ \sim\neg\ (A\vee B),\ \sim\neg B};$$

$$\mathrm{K}\ \frac{\Gamma,\ \Box A}{\Gamma,\ \Box A,\ A};\quad \mathrm{NK}\ \frac{\Gamma,\ \neg\Box A}{\Gamma_{\Box},\ \sim A};\quad \sim\mathrm{K}\ \frac{\Gamma,\ \sim\Box A}{\Gamma,\ \neg\Box A};\quad \sim\mathrm{NK}\ \frac{\Gamma,\ \sim\neg\Box A}{\Gamma,\ \neg\neg\Box A};$$

$$\mathrm{E}\ \frac{\Gamma,\ \exists x A(x)}{\Gamma,\ \exists x A(x),\ A(y)};\qquad \sim\mathrm{NE}\ \frac{\Gamma,\ \sim\neg\exists x A(x)}{\Gamma,\ \sim\neg\exists x A(x),\ \sim\neg A(y)};$$

$$\mathrm{NE}\ \frac{\Gamma,\ \neg\exists x A(x)}{\Gamma,\ \neg\exists x A(x),\ \neg A(z)};\qquad \sim\mathrm{E}\ \frac{\Gamma,\ \sim\exists x A(x)}{\Gamma,\ \sim\exists x A(x),\ \sim A(z)}\ ,$$

где $\Gamma\subseteq Frm\cup\sim Frm$, $\Gamma_{\Box}=\{\Box B\colon \Box B\in\Gamma\}$, $x,y,z\in Ind$, причем y – новая, еще не всречающаяся ни в одной таблице индивидная переменная, z – каждая уже использованная переменная, а $A,B,A(x)\in Frm$. Вместо $\Gamma\cup\{A\}$ мы будем писать Γ, A. Элементы множества ~Frm в дальнейшем будем называть выражениями.

Выражение ~C назовем несущественно меченой, если формула C полностью модализирована, а таблицу будем называть немеченой, если среди ее меченых формул находятся только несущественно меченые формулы.

Следующие пропозициональные правила: NN, ~NN ND, ~D,K, ~K ,~NK, а также все кванторные правила: E, ~NE, NE, ~E предписывают заменить в таблице t множество выражений, находящееся выше горизонтальной черты правила, множеством выражений находящимся ниже его черты. А правило NK предписывает из таблицы t, содержащей множество выражений, находящихся выше горизонтальной черты правила, открыть новую вспомогательную таблицу t′, такую, что $(t, t')\in R$, и поместить в t′ множество выражений, находящихся ниже горизонтальной черты правила. Наконец, правила D и ~ND предписывают, исходя из таблицы $t\in S$, содержащей множество выражений, находящихся выше горизонтальной черты правила, составить новую альтернативную систему таблиц $S'=(S-\{t\})\cup\{t'\}$, где множество выражений, находящихся выше горизонтальной черты правила, заменено в t множеством выражений, находящихся ниже горизонтальной черты с левой стороны, а в t′ (напарнице таблицы t) – множеством выражений, находящихся ниже горизонтальной черты правила с правой стороны.

Таблица тривиально замкнута, если она содержит некоторую формулу B вместе с ¬B или вместе с ~B. Таблица замкнута, если она тривиально замкнута или находится в отношении *R* хотя бы с одной замкнутой таблицей. Альтернативная система таблиц замкнута, если замкнута ее главная таблица. Ep4-диаграмой для A будем называть множество всех альтернативных систем таблиц с главной таблицей, содержащей исходную формулу ¬A (в контрмодели, если последняя существует, это будет означать, что A не истинна, т.е. ложна или неопределенна). Ep4-диаграмма для A замкнута, если замкнуты все ее альтернативные системы таблиц. Замкнутую Ep4-диаграмму, следуя Фиттингу, будем называть доказательством A (см. [2]). В случае, когда существует замкнутая Ep4-диаграмма для A, будем говорить, что A является доказуемой в таб-личном исчислении Ep4 или теоремой Ep4 и писать |– A.

Корректность. Подмножество t множества Frm∪~Frm будем называть выполнимым, если существует Ep4-модель ⟨H,W,R,D,V⟩ и v∈H, такие, что при некотором сопоставлении элементов U всем свободным индивидным переменным каждой немеченой или меченой формулы B, входящей в t, V(B,v)=T, если B∈Frm, и V(B,v)≠T, если B∈~Frm. Предполагается, что на данном этапе развития знания истинность меченых формул не известна, кроме случаев, когда выражение B имеет вид ~□C или ~¬□C, так как в этих случаях правила ~K и ~NK предписывают соответственно заменить такие выражения на формулы ¬□C или ¬¬□C, которые принадлежат множеству Frm (из-за того, что формула вида □C всегда определена).

Очевидно, что ни одна тривиально замкнутая и, следовательно, замкнутая таблица не может быть выполнимой, потому что одна и та же формула в одно и то же время не может быть истинной и неистинной (т.е. ложной или неопределенной).

Нетрудно также проверить, что все наши правила построения таблиц сохраняют выполнимость. Другими словами, всякий раз когда выполнимы множества немеченых и меченых формул, находящиеся выше горизонтальной черты правил построения таблиц, выполнимы и множества немеченых и меченых формул, находящиеся ниже горизонтальной черты этих правил.

Рассмотрим, например, правило NK и предположим, что выполнимо множество немеченых и меченых формул {Γ, ¬□A}. Тогда существуют Ep4-модель ⟨H,W,R,D,V⟩ и v∈H, такие, что при некотором сопоставлении элементов U всем свободным индивидным переменным формул, входящих в $\{\Gamma,\neg\Box A\}$, для каждой немеченой формулы B из Γ, $V(B,v)=T$, а для каждой меченой формулы B из Γ, $V(B,v)\neq T$. $V(\neg\Box A,v)=T$ означает, что существует u из H, такой, что $(v,u)\in R$ и $V(A,v)\neq T$ при том же сопоставлении элементов U свободным индивидным переменным меченой формулы A. Но поскольку все формулы $\Gamma_{\Box}$ немечены, $D(v)\subseteq D(u)$ и $\Gamma_{\Box}\subseteq\Gamma$, ввиду транзитивности *R* все формулы из $\Gamma_{\Box}$ будут также истинными при том же сопоставлении элементов U свободным индивидным переменным формул $\Gamma_{\Box}$. Таким образом, Ep4-модель $\langle H,W,R,D,V\rangle$ гарантирует выполнимость множества формул $\{\Gamma_{\Box}, \sim A\}$, откуда прямо следует, что правило NK сохраняет выполнимость.

Теперь рассмотрим правило ~E и убедимся, что и оно сохраняет выполнимость. Пусть множество немеченых и меченых формул $\{\Gamma, \sim\exists xA(x)\}$ выполнимо при некотором приписывании элементов U всем свободным индивидным переменным формул множества $\{\Gamma, \sim\exists xA(x)\}$. Тогда существуют Ep4-модель $\langle H,W,R,D,V\rangle$ и $v\in H$ такие, что при том же приписывании значений всем свободным индивидным переменным формул из $\{\Gamma, \sim\exists xA(x)\}$,$V(B,v)=$ T, если B – немеченая формула, и $V(B,v)\neq T$, если B – меченая формула из $\{\Gamma, \sim\exists xA(x)\}$. В частности, $V(\exists xA(x),v)\neq T$ при том же приписывании значений всем свободным индивидным переменным меченой формулы $\exists xA(x)$. Но $V(\exists xA(x),v)\neq T$ означает, что в D(v) не существует такой элемент b, для которого $V(A(z),v)=T$, при том же сопоставлении элементов U, когда индивидной переменной z сопоставляется b, т.е. когда $V(A(z),v)\neq T$ для любого элемента D(v), взятого в качестве значения z.

Аналогично можно убедиться, что остальные правила также сохраняют выполнимость.

Теорема 1. *Если* $\vdash$ A *в* Ep4, *то* A *общезначима в классе фреймов* Ep4, *для любой замкнутой формулы* A (теорема корректности).

Доказательство. Мы установим контрапозицию утверждения те-оремы. Предположим, что замкнутая формула A необщезначима в классе фреймов Ep4. Тогда существуют Ep4-модель $\langle H,W,R,D,V\rangle$ и $v\in H$, такие, что $V(A,v)=\perp$. Но тогда выполнима главная таблица Ep4-диаграммы с исходной формулой $\neg A$. С другой стороны, мы убедились, что наши правила построения Ep4-диаграммы сохраня-ют выполнимость и в тех случаях, когда они порождают формулы со свободными индивидными переменными. Поэтому такая Ep4-диаграмма с указанной исходной формулой $\neg A$ никогда не зам-кнется.

Следовательно, A не будет доказуемой в табличном исчис-лении Ep4. →

Семантическая полнота. Покажем, что если замкнутая формула A не доказуема в Ep4, то существует опровергающая Ep4-модель для нее. Отсюда в силу контрапозиции прямо следует семантическая полнота Ep4. В самом деле, если A не доказуема в Ep4, тогда Ep4-диаграмма для A не замкнута. В таком случае мы будем иметь две возможности. В первом случае, процесс построения Ep4-диаграммы для A завершится в конечное число шагов, а во вто-ром, построение Ep4-диаграммы для A не завершится, так как одно из наших правил всякий раз окажется применимым. В последнем случае будем говорить, что Ep4-диаграмма для A бесконечна.

Мы рассмотрим только случай, когда построение Ep4-диаграммы завершается в конечное число шагов, а для получения опровергающей Ep4-модели, когда Ep4-диаграмма бесконечна, следует построить псевдотаблицы и воспользоваться леммой Кёнига аналогично методу Крипке, использованному им для построения опровергающей модели для незамкнутой бесконечной S4-диаграммы (см. [5]).

Предположим теперь, что Ep4-диаграмма для замкнутой формулы A не замыкается. Тогда существует незамкнутая альтернативная система таблиц $\mathcal{S}_0$ с главной таблицей t, содержащей исходную формулу ¬A. Не замкнуты и все вспомогательные таблицы $\mathcal{S}_0$, среди которых могут встречаться альтернативные напарницы других альтернативных систем. Система $\mathcal{S}_0$ упорядочена рефлексивным и транзитивным отношением $\mathcal{R}_0$ между таблицами $\mathcal{S}_0$.

Определим Ep4-фрейм $Fr_0=\langle H_0,W_0,R_0,D_0\rangle$ следующим образом: пусть θ – функция, преобразующая таблицы $\mathcal{S}_0$ в элементы H_0, т.е. θ является взаимно однозначным отображением $\mathcal{S}_0$ на H_0. Тогда W_0 можно определить как подмножество H_0, содержащее все такие элементы θ(t) из H_0 ($t\in\mathcal{S}_0$), для которых t является немеченой таблицей. Множество W_0 не пусто, так как $\mathcal{S}_0$ содержит по крайней мере одну немеченую таблицу – главную. Элементы H_0 упорядочены отношением R_0, соответствующим отношению $\mathcal{R}_0$ между таблицами, причем, если $t', t''\in\mathcal{S}_0$, $v_1=\theta(t')$ и $v_2=\theta(t'')$, то $\langle v_1, v_2\rangle\in R_0$ тогда и только тогда, когда $\langle t', t''\rangle\in\mathcal{R}_0$.

Остается определить функцию областей D_0 для Fr_0. Каждой таблице t из $\mathcal{S}_0$ сопоставим неограниченное множество $Y_t\subseteq Ind$ таким образом, чтобы множества, сопоставленные различным таблицам не пересекались, и при каждом применении правил E и ~NE к формулам из t новые индивидные переменные вводились в формулы t только из Y_t. Если t – главная таблица системы S_0 и v $=\theta(t)$, тогда, так как исходная формула $\neg A$, соответственно $\neg\forall A$, не содержит вхождений свободных переменных, $D_0(v)$ есть непустое подмножество X_t множества Y_t, содержащее те элементы Y_t, которые появляются в формулах, входящих в t в результате применения правил E и ~NE, а если эти правила не применяются, тогда $D_0(v)$ есть любое непустое подмножество X_t множества Y_t. Пусть, далее, $t',t''\in S_0$, $v_1=\theta(t')$, $v_2=\theta(t'')$ и $\langle v_1, v_2\rangle\in R_0$; предположим также, что мы уже определили $D_0(v_1)$, тогда $D_0(v_2)=D_0(v_1)\cup X_{t''}$, где $X_{t''}\subseteq Y_{t''}$.

Очевидно также, что условие (d) функции областей D_0 всегда будет выполняться, поскольку из $\langle v_1,v_2\rangle\in R_0$ следует $D_0(v_1)\subseteq D_0(v_1)\cup X_{t''}=D_0(v_2)$.

Теперь определим Ep4-модель M_0 как пару $\langle Fr_0,V_0\rangle$, где Fr_0 – вышеописанный фрейм, а V_0 – частичная функция, определенная следующим образом.

Пусть n=0 и $v=\theta(t)$, тогда $V_0(P^n,v)=T$, если t содержит P^n; $V_0(P^n, v)=\bot$, если t содержит $\neg P^n$ и non!V_0 (P^n,v) в противном случае, т.е. если t содержит одно из выражений $\sim P^n$ или $\sim\neg P^n$, причем, в первом случае $\neg P^n$, не входит в t, а во втором P^n не входит в t (в частности, non!$V_0(P^n,v)$, если t содержит оба выражения $\sim P^n$ и $\sim\neg P^n$). Кроме того, для всякой пропозициональной переменной P^0, такой, что t не содержит ни P^0, ни $\neg P^0$ и в t не входит та же меченая переменная, мы будем полагать,что V_0 (P^n,v) принимает любое из значений T или $\bot$. Это гарантирует определенность V_0 для любой пропозициональной переменной и любого элемента W_0.

Если же n>0, то V_0 (P^n,v) есть пара $\langle\alpha,\psi\rangle$, такая, что $\alpha=\{\langle x_1,\ldots, x_n\rangle \mid P^n(x_1,\ldots,x_n)$ входит в t$\}$, а $\psi=\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \mid \neg P^n(x_1,\ldots,x_n)$ входит в t$\}$. Очевидно, что $\alpha,\psi\subseteq[D(v)]^n$ и $\alpha\cap\psi\neq\varnothing$, поскольку t не замыкается.

Далее, $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\notin\alpha$ и $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\notin\psi$, если M_0 содержит одно из выражений $\sim P^n(x_1,\ldots,x_n)$ или $\sim\neg P^n(x_1,\ldots,x_n)$, причем, в первом случае, в t не входит $\neg P^n(x_1,\ldots,x_n)$, а во втором случае в t не входит $P^n(x_1,\ldots,x_n)$; в частности, $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\notin\alpha$ и $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\notin\psi$, если t содержит оба выражения $\sim P^n(x_1,\ldots,x_n)$ и $\sim\neg P^n(x_1,\ldots,x_n)$.

Точно так же определяется M_0 модель для псевдотаблиц (см. [5]).

Рассмотрим объединение $U_0=\cup_{v\in H0}D(v)$, где $v=\theta(t)$, $t\in S_0$ и каждую формулу B из любой таблицы S_0 будем оценивать для сопоставления, при котором всякой индивидной переменной, входящей свободно в B, сопоставляется одноименная переменная из U_0, рассматриваемая как типографический объект.

При указанном сопоставлении значений свободным индивидным переменным $V_0(P^n(x_1,\ldots,x_n),v)=T$, если $\langle x_1,\ldots, x_n\rangle\in\alpha$; $V_0(P^n(x_1, \ldots,x_n),v)=\perp$, если $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\in\psi$ и non!$V_0(P^n(x_1, \ldots,x_n),v)$, если $\langle x_1,\ldots, x_n\rangle\notin\alpha$ и $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\notin\psi$.

Теперь мы сможем показать, что если Ep4-диаграмма для формулы A не замыкается, но ее построение завершается в конечное число шагов, то M_0 является опровергающей моделью для A (аналогично рассматривается случай, когда Ep4-диаграмма не замыкается, однако ее построение не завершается в конечное число шагов, только вместо таблиц надо рассматривать псевдотаблицы; ср. [5]).

Лемма 1. *Пусть* M_0 – *вышезаданная модель.Тогда для всякой формулы* B *и всякой незамкнутой таблицы (псевдотаблицы)* t*, такой, что* $v=\theta(t)$*, из незамкнутой альтернативной системы таблиц (псевдотаблиц), при тождественном сопоставлении элементов* U_0 *всем свободным индивидным переменным формулы* B*,*M_0 *удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *если* B *входит в* t, *то* $V_0(B,v)=T$;

(2) *если* $\neg$B *входит в* t, *то* $V_0(B,v)=\perp$;

(3) *если* $\sim\neg$B *входит в* t, *то* non!$V_0(B,v)$ *или* $V_0(B,v)=T$;

(4) *если* $\sim$B *входит в* t, *то* non!$V_0(B,v)$ *или* $V_0(B,v)=\perp$ (основная лемма).

Доказательство проводится одновременной индукцией по логической длине формулы B. Если $B\in Atm$, справедливость условий (1) – (4) непосредственно следует из определения V_0.

Предположим поэтому, что $B\notin Atm$, тогда B имеет один из следующих видов: $\neg C$, $C_1\vee C_2$, $\Box C$ или $\exists xC(x)$. В каждом из этих случаев предположим, что всем свободным индивидным переменным формулы B сопоставляются одноименные индивидные переменные из U_0, рассматриваемые в качестве типографических объектов.

Пусть B имеет вид $\neg C$. Покажем, что условие (1) нашей леммы будет выполняться. Опять воспользуемся индукцией по логической длине формулы C, которая может быть атомарной или иметь один из следующих видов: $\neg F$, $F_1\vee F_2$, $\Box F$ или $\exists xF(x)$.

В случае, когда $C\in Atm$, B имеет вид $\neg C$ и выполнимость условия (1) следует из определения V_0.

Если C имеет вид $\neg F$, тогда B есть формула $\neg\neg F$ и поскольку последняя формула входит в незамкнутую таблицу t, к ней применимо правило NN, согласно которому в t также включается формула F, имеющая меньшую логическую длину, чем B. Поэтому в силу индуктивного предположения для условия (1), $V_0(F,v)=T$, а согласно правилу оценки для $\neg$, $V_0(B,v)=V_0(\neg\neg F,v)=T$.

Если C имеет вид $F_1 \vee F_2$, тогда B есть формула $\neg(F_1 \vee F_2)$ и в незамкнутой таблице t к ней применимо правило ND, согласно которому в t включаются формулы $\neg F_1$, $\neg F_2$. В силу индуктивного предположения для условия (2), $V_0(\neg F_1,v)=V_0(\neg F_2,v)=\bot$, откуда сог-ласно правилам оценки для $\vee$ и $\neg$ следует, что $V_0(B,v)=V_0(\neg(F_1 \vee F_2),v)=T$.

Если C имеет вид $\Box F$, то B есть формула $\neg\Box F$ и к ней применимо правило NK, согласно которому составляется новая таблица t', такая, что $\langle t, t'\rangle \in R_0$ и в нее помещается выражение $\sim F$. В силу индуктивного предположения для условия (4), $non!V_0(F,u)$ или же $V_0(F,u)=\bot$, где $u=\theta(t')$, а по правилу оценки для $\Box$, $V_0(\Box F,v)=\bot$, где $v=\theta(t)$. Следовательно, $V_0(B,v)=V_0(\neg\Box F,v)=T$.

Наконец, если C имеет вид $\exists xF(x)$, тогда B будет иметь вид $\neg\exists xF(x)$, и поскольку таблица t не замкнута к B применимо правило NE, согласно которому для каждой индивидной переменной $z \in D(v)$, $v=\theta(t)$, в t включается формула вида $\neg F(z)$. К ней применимо индуктивное предположение для условия (2), в силу которого $V_0(F(z),v)=\bot$ при тождественном сопоставлении индивидных переменных из U_0 всем отличным от z свободным индивидным переменным, входящим в F(z), когда переменной z сопоставляется любая переменная из U_0. Отсюда согласно правилу оценки для $\exists$ получаем, что $V_0(\exists xF(x),v)=\bot$, а из последнего прямо следует, что $V_0(B,v)=V_0(\neg\exists x\, F(x),v)=T$.

Мы показали, что условие (1) выполняется, если B имеет вид $\neg C$. Остается рассмотреть случаи, когда B имеет один из следующих видов $C_1 \vee C_2$, $\Box C$ или $\exists xC(x)$.

Если B имеет вид $C_1 \vee C_2$, то к таблице t применяется правило D и составляется новая альтернативная система таблиц с напарницей t' таблицы t. При этом, в t включается C_1, а в t' – C_2. Согласно индуктивному предположению $V_0(C_1,v)=T$ или $V_0(C_1,u)=T$, где $v=\theta(t)$, а $u=\theta(t')$. Из чего, в силу правила оценки для $\vee$, заключаем, что $V_0(C_1 \vee C_2,v)=T$.

Если B имеет вид $\Box C$, то к ней применимо правило K и в каждую таблицу t', такую, что $\langle t,t'\rangle \in R_0$ помещается формула C. В силу индуктивного предположения, для всякого u, такого, что $(v,u)\in R_0$, где $v=\theta(t)$, а $u=\theta(t')$, $V_0(C,u)=T$. Но тогда, согласно правилу оценки для $\Box$, $V_0(B,v)=V_0(\Box C,v)=T$.

Наконец, если B имеет вид $\exists xC(x)$, к ней применимо правило E, согласно которому в t включается формула C(y) с ранее не встре-чающейся ни в одной таблице индивидной переменной $y \in X_t \subseteq Y_t$. В силу индуктивного предположения $V_0(C(y),v)=T$ при тождест-венном сопоставлении элементов U_0 всем отличным от y свобод-ным переменным, входящим в C(y), когда переменной y сопостав-ляется $y \in X_t \subseteq D(v)$, где $v=\theta(t)$. Но тогда, согласно правилу оценки для $\exists$, $V_0(B,v)=V_0(\exists xC(x),v)=T$.

Итак, мы установили, что условие (1) нашей леммы выполняется. Точно так же можно установить выполнимость условий (2) – (4) леммы 1.

Рассмотрим, к примеру, два случая условия (3). Пусть B имеет вид $\Box C$. Так как таблица t не замкнута и содержит выражение вида $\sim\neg\Box C$, к последнему применимо правило ~NK и в t включа-ется формула $\neg\neg\Box C$, а затем согласно правилу NN – формула $\Box C$. В силу индуктивного предположения для условия (1),$V_0(\Box C,v)=T$. Поэтому согласно правилу оценки для $\neg$, $V_0(B,v)=V_0(\neg\neg\Box C,v)=T$ и, следовательно, non!$V_0(B,v)$ или $V_0(B,v)=T$.

Теперь предположим, что B имеет вид $\exists xC(x)$. Так как таблица t не замкнута и содержит выражение $\sim\neg\exists xC(x)$, к нему применимо правило ~NE, согласно которому в t включается выражение $\sim\neg C(y)$ с ранее не встречающейся ни в одной таблице индивидной переменной $y \in X_t \subseteq Y_t$. В силу индуктивного предположения для условия (3), non!$V_0(C(y),v)$ или $V_0(C(y),v)=T$ при тождественном сопоставлении элементов U_0 всем отличным от y свободным индивидным переменным, входящим в C(y), когда переменной y сопоставляется $y \in X_t \subseteq D(v)$, где $v=\theta(t)$. Но в таком случае non!$V_0(B, v)$=non!$V_0(\exists xC(x),v)$ или $V_0(B,v)=V_0(\exists xC(x),v)=T$. →

Лемма 2. *Если диаграмма для замкнутой формулы* A *не замы-кается, то* A *не общезначима в классе фреймов* Ep4.

Доказательство. По условию леммы диаграмма для A не замыкается, поэтому не замкнута по крайней мере одна из ее альтернативных систем таблиц (псевдотаблиц). Следовательно, не замыкается и главная таблица (главная псевдотаблица) этой системы с исходной замкнутой формулой $\neg A$. Но в таком случае, согласно условию (2) леммы 1, существует опровергающая модель M_0 для A. Поэтому A не общезначима в классе фреймов Ep4. →

Теорема 2. *Если* A *общезначима в классе фреймов* Ep4, *то* $\vdash$ A *в* Ep4 (теорема полноты).

Доказательство прямо следует из определения доказуемости в табличном исчислении и контрапозиции леммы 2. →

Устранение логического всеведения. Классически общезначимой является формула $\exists xP(x)\supset\exists x(Q(x)\vee\neg Q(x))$, однако нетрудно проверить, что Ep4-диаграмма для формулы $\Box\exists xP(x)\supset\Box\exists x(Q(x)\vee \neg Q(x))$ не замыкается. Этим устраняется парадокс логического всеведения в форме 1). С другой стороны, классически общезначимой является также формула $\exists x(Q(x)\vee\neg Q(x))$, но легко можно убедиться, что Ep4-диаграмма не замыкается и для формулы $\Box\exists x(Q(x) \vee \neg Q(x))$ и, таким образом, устраняется парадокс логического все-ведения в форме 2). Из последнего факта следует, что табличное исчисление Ep4 является ненормальной (ввиду того, что в нем допустимым не является правило вывода: из A следует $\Box A$, для всякой формулы A), а из устранимости парадокса логического всеведения в форме 1), следует, что табличное исчисление Ep4 немонотонно (так как в нем не является допустимым правило вывода: из $A \supset B$ следует $\Box A \supset \Box B$, для всяких A и B).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fagin R.F. and Halpern J.Y.* Belief, awareness, and limited reasoning // Artificial Intelligence. 1988. Vol. 34. P. 277-295.
2. *Fitting M.* Intuitionistic Logoc, Model Theory and Forcing, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1969.
3. *Hintikka J.* Impossible possible worlds vindicated // Journal of Philosophical Logic. 1975. Vol. 4 . P. 475-484.
4. *van der Hoek W. and Meyer J.* Possible logocs for belief // Technical Report IR-170. Free University of Amsterdam, 1988.
5. *Kripke S.A.*. Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi // Zeitschrift fьr mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1963. Bd. 9. S. 67-96.
6. *Kripke S.*A. Semantical considerations on modal logic // Acta Philosophica Fennica. 1963. Vol 16. P. 83-94.
7. *Levesque H.J.* A logic of implicit and explicit belief // AAAI-84. Austin, Texas, 1984. P. 198-202.
8. *Rantala V.* Impossible world semantics and logical omniscience // Acta Philosophica Fennica. 1982. Vol. 35. P. 106-115.
9. *Wansing H.* A general possible worlds framework for reasoning about knowledge and belief // Studia Logica. 1990. Vol. 49. P. 523-539.