В.И.Шалак

МНОГОЗНАЧНАЯ СЛАБАЯ РЕЛЕВАНТНАЯ ЛОГИКА RS (relevant scaled)*

Abstract. *In this article we define semantics for many-valued propositional logic. Distinctive feature of this semantics is interpretation of implication connective as arithmetic subtraction.*

Рассмотрим двузначную интерпретацию классической логики высказываний, взяв в качестве истинностных значений не {0,1}, а {-1,1}. Конъюнкцию и дизъюнкцию интерпретируем обычным образом посредством функций минимума и максимума, а отрицание посредством обычного арифметического отрицания.

Истинностная таблица для импликации будет выглядеть следующим образом:

p	q	p⊃q
1	1	1
-1	1	1
1	-1	-1
-1	-1	1

Имликации приписывается выделенное истинностное значение 1 лишь в том случае, если истинностное значение, сопоставленное консеквенту больше или равно значения, сопоставленного антецеденту. Выражая условные суждения посредством импликативных формул, мы гарантируем, что переход от условия к заключению не приведет к уменьшению истинностного значения. Некоторым недостатком данного определения импликации является определенная потеря информации о соотношении истинностных значений антецедента и консеквента. Было бы неплохо, если бы в определении имликации эта информация сохранялась. Например, следующим образом:

p	q	p⊃q
1	1	0
-1	1	2
1	-1	-2
-1	-1	0

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00403.

В первой и последней строках таблицы импликации сопоставлен 0, так как не было ни прироста, ни понижения истинностного значения консеквента относительно антецедента. Во второй строке импликации сопоставлено значение 2, так как именно на столько отличается значение консеквента относительно антецедента, а в третьей строке по аналогичным основаниям импликации сопоставлено значение –2. Выделенными значениями будем считать {0,1,2}. Однако, как мы видим, сохранение информации о соотношении значений антецедента и консеквента привело к выходу за пределы исходного множества истинностных значений. Если мы возьмем истинностную матрицу, состоящую из {-2,-1,0,1,2}, и по аналогичным правилам построим таблицу для импликации, то опять выйдем за пределы исходного множества значений. Единственная возможность сохранить данное определение импликации – перейти к бесконечному множеству значений, взяв в качестве его множество всех целых чисел, а в качестве выделенных значений – все неотрицательные числа.

Def 1. **Язык RS**

1. p, q, r… $\in$ Var - множество пропозициональных переменных;
2. &, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ - логические связки;
3. (,) - скобки.

Def 2. **Формулы RS**

1. Var$\subseteq$Frm;
2. Если A, B$\in$Frm, то $\neg$A, (A&B), (A$\vee$B), (A$\rightarrow$B) $\in$Frm;
3. Ничто другое формулой не является.

Пусть **Z** – множество целых чисел, а Val=$\mathbf{Z}^{\mathrm{Var}}$ - множество всех приписываний значений пропозициональным переменным.

Распространим Val на множество всех формул.

Def 3. Пусть v$\in$Val

4. v($\neg$A) = -v(A);
5. v(A&B) = min(v(A), v(B));
3. v(A$\vee$B) = max(v(A), v(B));
6. v(A$\rightarrow$B) = v(B)-v(A).

Def 4. Формула A **RS-общезначима** (|=A) е.т.е. для всех v$\in$Val имеет место v(A)$\geq$0.

Примеры общезначимых формул.

|=A$\rightarrow$A

$|=(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$
$|=(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$
$|=A\to\neg\neg A$
$|=\neg\neg A\to A$
$|=(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$
$|=A\&B\to A$
$|=(A\to B)\&(A\to C)\to(A\to B\&C)$
$|=A\to A\vee B$
$|=(A\to C)\&(B\to C)\to(A\vee B\to C)$
$|=A\&(B\vee C)\leftrightarrow(A\&B)\vee(A\&C)$
$|=A\vee(B\&C)\leftrightarrow(A\vee B)\&(A\vee C)$
$|=(A\to B)\vee(B\to A)$
$|=(A\to((A\to B)\to B)$
$|=\neg(A\&\neg A)$
$|=(A\vee\neg A)$

$|=A,\ |=A\to B\Rightarrow\ |=B$
$|=A,\ |=B\Rightarrow\ |=A\&B$
$|=B\Rightarrow\ |=(A\&\neg A)\to B$

Аномальные общезначимые формулы.

$|=\neg(A\to A)\&(A\to A)$ – переход от A к A не увеличивает и не уменьшает имеющейся у нас информации.

Формулы, не являющиеся общезначимыми.

$|\neq A\&\neg A$
$|\neq(A\&\neg A)\to B$
$|\neq(A\to(A\to B))\to(A\to B)$
$|\neq(A\to B)\&(B\to C)\to(A\to C)$
$|\neq(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\&C))$
$|\neq(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$
$|\neq(A\to(B\to C))\to(A\&B\to C)$

Def 5. **Арифметический образ формулы.**

Определим функцию α, отображающую формулы логики **RS** в термы стандартной арифметики целых чисел. $\alpha(A)$ будем называть арифметическим образом формулы A.

1. Если $p\in Var$, то $\alpha(p) = p$;
2. $\alpha(\neg A) = -\alpha(A)$;
3. $\alpha(A\&B) = \min(\alpha(A),\alpha(B))$;
4. $\alpha(A\vee B) = \max(\alpha(A),\alpha(B))$;
5. $\alpha(A\to B) = \alpha(B)+(-\alpha(A))$.

Def 6. Терм t называется **элементарным**, если он имеет вид $P_1+\ldots+P_g$, где $P_i=\in\{p,-p\}$ для некоторого $p\in Var$.

В арифметике имеют место следующие тождества.

Id1. $--x = x$
Id2. $-(x+y) = (-x)+(-y)$
Id3. $–\min(x,y) = \max(-x, -y)$
Id4. $-\max(x, y) = \min(-x,-y)$
Id5. $x+\min(y,z) = \min(x+y,x+z)$
Id6. $x+\max(y, z) = \max(x+y,x+z)$
Id7. $\min(x,\max(y, z)) = \max(\min(x,y),\min(x,z))$
Id8. $\max(x,\min(y,z)) = \min(\max(x, y),\max(x,z))$
Id9. $x+y = y+x$
Id10. $x+(y+z) = (x+y)+z$
Id11. $\min(x,y) = \min(y,x)$
Id12. $\min(x,\min(y,z)) = \min(\min(x,y),z)$
Id13. $\max(x,y) = \max(y,x)$
Id14. $\max(x,\max(y,z)) = \max(\max(x,y),z)$

В дальнейшем мы будем отождествлять термы, отличающиеся лишь в силу свойств коммутативности и ассоциативности Id9-Id14 для +, min, max.

Def 7. Определим на арифметических образах формул частичные функции β, γ, δ и κ.

1. $\beta(p) = p$;
2. $\beta(-p) = -p$;
3. $\beta(--A) = \beta(A)$;
4. $\beta(-(A+B)) = \beta(-A)+ \beta(-B)$;
5. $\beta(-\min(A,B)) = \max(\beta(-A), \beta(-B))$;
6. $\beta(-\max(A,B)) = \min(\beta(-A), \beta(-B))$;
7. $\beta(\min(A,B)) = \min(\beta(A), \beta(B))$;
8. $\beta(\max(A,B)) = \max(\beta(A), \beta(B))$.

1. $\gamma(\min(A,B)) = \min(\gamma(A), \gamma(B))$;
2. $\gamma(\max(A,B)) = \max(\gamma(A), \gamma(B))$;
3. $\gamma(A+\min(B,C)) = \min(\gamma(A+B), \gamma(A+C))$;
4. $\gamma(A+\max(B,C)) = \max(\gamma(A+B), \gamma(A+C))$;
5. $\gamma(t)=t$, если t – элементарный терм.

1. $\delta(\min(A,\max(B,C)) = \max(\delta(\min(A,B)),\delta(\min(A,C)))$;
2. $\delta(t) = t$, если t - элементарный терм.

1. $\kappa(\max(A,\min(B,C)) = \min(\kappa(\max(A,B)),\kappa(\max(A,C)))$;

2. $\kappa(t) = t$, если t - элементарный терм.

Def 8. Арифметические конъюнктивные **АКНО** и арифметические дизъюнктивные **АДНО** нормальные образы формул логики **RS**.

Для произвольной формулы A логики **RS** будем называть терм $\kappa\gamma\beta\alpha(A)$ арифметическим конъюнктивным нормальным образом **АКНО** этой формулы.

Для произвольной формулы A логики **RS** будем называть терм $\delta\gamma\beta\alpha(A)$ арифметическим дизъюнктивным нормальным образом **АДНО** этой формулы.

Очевидно, что **АКНО** имеет вид $\min(K_1,\ldots,K_n)$ где $n\geq 1$ и $K_i=\max(D_{i1},\ldots,D_{ik})$, где $k\geq 1$ и $D_j=L_1+\ldots+L_g$ где $g\geq 1$ и $L_s=\in\{p,-p\}$ для некоторого $p\in Var$.

Очевидно, что **АДНО** имеет вид $\max(D_1,\ldots,D_n)$, где $n\geq 1$ и $D_i=\min(K_{i1},\ldots,K_{ik})$, где $k\geq 1$ и $K_j=L_1+\ldots+L_g$ где $g\geq 1$ и $L_s=\in\{p,-p\}$ для некоторого $p\in Var$.

Распространим Val на множество арифметических образов формул.

Def 9. Пусть $v\in Val$

1. $v(-A) = -v(A)$;
2. $v(A+B) = v(A)+v(B)$;
3. $v(\min(A,B)) = \min(v(A), v(B))$;
4. $v(\max(A,B)) = \max(v(A), v(B))$.

Лемма 1. Для $v\in Val$, $A\in Frm$.

1. $v(A) = v(\alpha(A))$;
2. $v(A) = v(\kappa\gamma\beta\alpha(A))$;
3. $v(A) = v(\delta\gamma\beta\alpha(A))$.

Доказательство очевидно и следует из определений *Def 3* - *Def 9* и тождеств Id1.-Id14.

Теорема 1. Булева формула A общезначима в **RS** е.т.е. A общезначима в классической логике высказываний.

С использованием Леммы 1.

Теорема 2. Формула A логики **RS** общезначима е.т.е. общезначимы арифметические неравенства $\kappa\gamma\beta\alpha(A)\geq 0$ и $\delta\gamma\beta\alpha(A)\geq 0$.

С использованием Леммы 1.

Лемма 2.

1. Для всякой $A\in Frm$ и для всякого $v\in Val$, если $v(A)<0$, то существует такое $u\in Val$, что $u(A)<v(A)$.

2. Для всякой $A \in Frm$ и для всякого $v \in Val$, если $v(A)>0$, то существует такое $u \in Val$, что $u(A)>v(A)$.

В качестве искомого $u \in Val$ достаточно взять приписывание, отличное от $v \in Val$ лишь тем, что для всякой переменной $p \in Var$, имеющей вхождение в формулу A, $u(p)=v(p)*2$. Доказательство следует из Леммы 1 и свойств **АДНО** и **АКНО**.

Теорема 3.

1. Если $|=A$ и не содержит связок &, $\vee$, то при любом $v \in Val$ имеет место $v(A)=0$.
2. Если $|=A$ и не содержит связок &, $\vee$, то для любой $|=B$ имеет место $|=A \rightarrow B$.
3. Если $|=A$, то для любой $|=B$ имеет место $|=\neg A \rightarrow B$.
4. Если $|=A \rightarrow B$, но $|\neq A$ и $|\neq B$, то существует хотя бы одна пропозициональная переменная $p \in Var$, которая одновременно является подформулой формулы A и подформулой формулы B.

Доказательство легко следует из Лемм 1 и 2. Для пункта 4, рассуждая от противного, достаточно показать, что если $|\neq A$ и $|\neq B$, то существует и может быть построено такое приписывание $v \in Val$, что $v(A)>v(B)$, т.е. $|\neq A \rightarrow B$.

Заключительные замечания

Очевидно, что ограничение в семантике множеством целых чисел не является существенным. С равным успехом мы можем интерпретировать формулы на множестве всех рациональных или действительных чисел.

Дальнейшие обобщения построенной логики могут быть произведены по пути интерпретации формул на множестве кортежей значений.