С.А.Павлов

НОВЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ И ОБОБЩЕНИЮ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *New formulation of the classical logic with truth and falsehood predicates is proposed. The generalization of this logic on the domain of symbolic expressions is realized.*

Целью этой работы является построение языка, в котором можно выражать как синтаксис, так и семантику и онтологию классической пропозициональной логики. Совместное рассмотрение синтаксиса и семантики может быть интересно и полезно для явного и формального выражения их соотношений и связей между их положениями. Также интересно выявить положения как варьируемые, так и инвариантные, в процессе обобщения классической логики.

1. Стандартная формулировка и интерпретация классической логики

Приведем одну из стандартных формулировок и интерпретаций классической пропозициональной логики.

Язык логики CL

Алфавит CL:

$s, s_1, s_2, \ldots$ пропозициональные переменные;

$\sim, \supset$ логические константы;

(,) технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая пропозициональная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A, B есть ппф, то $(\sim A)$, $(A \supset B)$, есть ппф.

(iii) Ничто иное не является правильно построенной формулой.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф.

Схемы аксиом

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$

A1.3 $((\sim P_1 \supset \sim P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 02-03-18287.

Правило вывода $\dfrac{P_1, (P_1 \supset P_2)}{P_2}$

Интерпретация

Пусть M есть непустое множество пропозициональных переменных. Оценкой множества M называется любое отображение M в $\{1, 0\}$.

Если A есть формула, W(A) есть множество всех пропозициональных переменных, входящих в A, M есть множество пропозициональных переменных такое, что $W(A) \subseteq M$ и v есть оценка множества M, то значение формулы A при v (символически $|A|_v$) определяется индуктивно следующим образом:

1) если A есть пропозициональная переменная q,
то $|A|_v = v(q)$, где $v(q)$ есть значение q при отображении v.

2) если A есть (~B),

$$|{\sim}B|_v = \begin{cases} 0 \text{ если } |B|_v = 1, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0. \end{cases}$$

3) если A есть $(B \to C)$, то

$$|B \supset C|_v = \begin{cases} 1 \text{ если } |B|_v = 1 \text{ и } |C|_v = 1, \\ 0 \text{ если } |B|_v = 1 \text{ и } |C|_v = 0, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0 \text{ и } |C|_v = 1, \\ 1 \text{ если } |B|_v = 0 \text{ и } |C|_v = 0. \end{cases}$$

Формулу A назовем общезначимой (символически $\vDash A$), если для всякого множества пропозициональных переменных M такого, что $W(A) \subseteq M$, и всякой оценки v множества M $|A|_v = 1$.

Другими словами, мы сопоставляем формулы языка пропозиционального исчисления формулам булевой алгебры.

Пусть соответствующая алгебра будет $<\{0, 1\}, -, \leq >$.

2. Формулировка классической логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно»

Сформулируем логику, обогащенную семантическими предикатами «истинно» и «ложно», которая эквивалентна классической пропозициональной логике. Мотивацией для такой новой формулировки классической пропозициональной логики является желательность одновременного формулирования и различения как семантических законов противоречия и исключенного третьего, так и родственных им законов противоречия и исключенного третьего, не включающих в себя термин «истинно».

Отметим, что на необходимость такого различения обращали внимание еще Н.А.Васильев [1], А.Тарский [5], и Я.Лукасевич [2].

Так Н.А.Васильев в своих работах рассматривал металогику и эмпирическую логику и различал две формулировки закона противоречия.

На различие принципа исключенного третьего и принципа двузначности указывал Я.Лукасевич. Принцип двузначности символически записывается как (TA $\veebar$ FA), а закон исключенного третьего как (A $\vee$ ~A).

Чтобы рассматривать эти законы, как в семантической, так и в несемантической формулировках, введем (с необходимыми предосторожностями) в объектный язык логики символы, соответствующие семантическим предикатам «истинно» и «ложно».

Такое рассмотрение с терминами «истинно» и «ложно» в качестве логических операторов было проведено в работах [3, 4] для случая неклассической логики. В них приведены основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности.

Перейдем к формулировке классической логики с предикатами истинности и ложности, обогащенной также связкой полной эквивалентности $\cong$, которую будем обозначать как FC2($\cong$). Предикаты истинности и ложности будем обозначать символами T, F, операторы истинности и ложности будем обозначать символами |, – соответственно, исходную импликацию $\to$.

Формулировка классической логики с предикатом ложности, обогащенная связкой полной эквивалентности

Утверждения об истинности и ложности предложений A и B, будем обозначать как F(q(A)), F(q(B)), где q есть оператор цитирования, а q(A), q(B) имена предложений A и B соответственно.

Язык исчисления FC2($\cong$)

Алфавит FC2($\cong$):

s, s_1, s_2, ...	пропозициональные переменные;
$\to$, $\cong$	логические константы;
F	символ предиката ложности;
q	термообразующий оператор цитирования;
(,)	технические символы.

Правила образования ппф

(i) Всякая пропозициональная переменная есть правильно построенная формула (ппф).

(ii) Если A , B есть ппф, то F(q(A)), (A $\to$ B), (A $\cong$ B) есть ппф.

(iii) Ничто иное не является правильно построенной формулой.

Метапеременные: A, B, C, ... для ппф.

Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие сокращения для формул.

Определим оператор ложности

D1.1 $-A =_{df} F(q(A))$

Определим формулу 0, являющуюся тождественно ложной, которая будет играть роль константы "ложь".

D1.2.1 $0 =_{df} -(-s \to -s)$ (константа "ложь")

Определим отрицание ~.

D1.2.2 $\sim A =_{df} (A \to 0)$ (отрицание)

Для высказывания об истинности предложения A

D1.2.3.1 $T(q(A)) =_{df} F(q(\sim A))$

('|' содержательно означает 'истинно '):

D1.2.3.2 $|A =_{df} - \sim A$

Высказывание об истинности предложения A рассматривается как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения A.

Для высказывания о строгой истинности предложения A:

'⌈ ' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.2.4 $\lceil A =_{df} -(|A \to -A)$

Определим импликацию ⊃, которая фигурирует в правиле вывода.

D1.2.5 $(A \supset B) =_{df} (\lceil A \to \lceil B)$

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию ↔.

D1.3.1 $(A \,\&\, B) =_{df} \sim(A \to \sim B)$.

D1.3.2 $(A \vee B) =_{df} (\sim A \to B)$.

D1.3.3 $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \to B) \,\&\, (B \to A)$

Из всего класса ппф выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемых далее T.F.-формулами (T.F.-ф.)).

(iv) Если A есть ппф, то $(-A)$ есть T.F.-ф.

(v) Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \to P_2)$, есть T.F.-ф.

Пусть P, P_1, P_2, ... есть метапеременные для T.F.-ф.

D1.4.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$

D1.4.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$

D1.4.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$

D1.4.4 $(P_1 \veebar P_2) =_{df} -(P_1 \equiv P_2)$

Схемы аксиом

Имеем следующие группы аксиом:

1) аксиомы классической логики для T.F.-формул:

К схемам аксиом **CL** A1.1 - A1.2 (см. выше) добавляем следующую

A1.3* $((-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$

и также

A1.4 $|P \equiv P$

2) аксиомы, выражающие условия истинности для импликации:

A2.1 $|(A \to B) \equiv (-A \vee |B)$,

A2.2 $-(A \to B) \equiv (|A \wedge -B)$.

3) аксиома, выражающая принцип двузначности:

A3 $(|A \veebar - A)$.

А также добавим аксиому, задающую свойства связки полной эквивалентности $\cong$:

A4 $(A \cong B) \equiv (|A \leftrightarrow |B) \wedge (-A \leftrightarrow -B)$.

Правило вывода $\dfrac{A,\ (A \supset B)}{B}$

Имеем теоремы **FC2($\cong$)**, выражающие семантические законы противоречия и исключенного третьего в слабой формулировке.

T1.1 $\vdash -(|A \wedge -A)$,

T1.2 $\vdash (|A \vee - A)$.

Обратим внимание на то, что, что в аксиомных схемах присутствуют префиксированные операторами истинности или ложности формулы.

Представляет интерес привести теорему о неподвижной точке для предиката истинности и оператора истинности, устанавливающую эквивалентность между префиксированными оператором истинности ппф и не префиксированными ппф, подобную по форме схеме Тарского.

Теорема о неподвижной точке.

T2.1 $\vdash T(q(A)) \leftrightarrow A$.

T2.2 $\vdash |A \leftrightarrow A$.

Из этой теоремы следует возможность элиминации оператора истинности | из языка **FC2($\cong$)**.

Имеем также теоремы, выражающие законы противоречия и исключенного третьего.

T3.1 ⊦ ~ (A & ~A).

T3.2 ⊦ (A V ~A).

Имеется утверждение А.Тарского, о том, что из определения истины следуют семантические законы противоречия и исключенного третьего.

Аналогом схемы Тарского в языке **FC2(≅)** является формула (|A ↔ A). Заменим аксиому A3, выражающую принцип бивалентности, аксиомой A3′, являющуюся аналогом схемы Тарского.

A3′ (|A ↔ A)

В новой формулировке исчисления **FC2(≅)** имеем теорему, выражающую принцип бивалентности

T4′ ⊦ (|A $\veebar$ – A)

и, конечно, теоремы T1.1, T1.2.

Таким образом в предложенной формулировке классической логики, обогащенной семантическими предикатами «истинно» и «ложно», выражаются и имеют место семантические законы противоречия и исключенного третьего наряду с их несемантическими формулировками.

Интерпретация исходных связок и производных логических операторов следующая:

→	0	1
0	1	1
1	0	1

≅	0	1
0	1	0
1	0	1

A	|A	–A
0	0	1
1	1	0

Доказуемы метатеоремы непротиворечивости и семантической полноты.

3. Расширение логики FC2(≅) на область нестандартных формул

Обычно неправильно построенные формулы в логике не рассматриваются. Относительно них можно утверждать две вещи: 1) что они бессмысленны и 2) что они ни истинны, ни ложны. В стандартном языке пропозициональной логики невыразим тот факт, что они ни истинны и ни ложны. Однако в предложенном выше языке утверждения о неистинности и неложности формул, являющихся неправильно построенными, можно выразить следующим образом:

(~*T*(Nonsense & ~*F*(Nonsense),

где словом «Nonsense» обозначено имя некоторой неправильно построенной формулы.

В качестве исходных неправильно построенных формул возьмем символы $\rightarrow$, $\cong$ логических констант. Это ограничение не снизит общности рассмотрения. В этом частном случае будем называть их для определенности нестандартными формулами (нф).

В дополнение к метапеременным A, B, C для ппф введем новую метапеременную N, соответствующую нестандартным формулам, зададим дополнительные правила образования и сформулируем дополнительную аксиому для нф, которая будет аналогична вышеприведенному положению.

(iii)* Символы логических констант $\rightarrow$, $\cong$ есть нестандартные формулы.

(iv)* Если A, B есть нф, то $(A \rightarrow B)$ есть нф.

(v)* Если A, B есть нф, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

(vi)* Если A, B есть нф, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть T.F.-ф.

A5 $(-|\, N \wedge - - N)$

При этом ни одни из ранее принятых аксиом и правил вывода не изменятся.

На следующем шаге обобщения введем новые метапеременные E, E_1, E_2, … для любых формул, как правильно построенных, так и нестандартных, то есть для ппф и нф одновременно. При этом правила (v)* и (vi)* обобщаем до правил (v)** и (vi)** следующим образом.

(v)** Если A, B есть формула, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть ппф.

(vi)** Если A, B есть формула, то $(-A)$, $(A \cong B)$ есть T.F.-ф.

В этом случае, обобщая схемы аксиом A2.1, A2.2, A3.2 на весь универсум формул (как правильно построенных, так и нестандартных), необходимо будет ослабить только аксиому A3, отбросив только формулу $(|E \vee -E)$, соответствующую принципу двузначности в слабой форме.

A3** $-(|E \wedge - E)$.

Назовем полученное исчисление **FC3N($\cong$)**.

Обобщенные таблицы истинности ниже.

$\rightarrow$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	½	1
1	0	½	1

$\cong$	0	½	1
0	1	0	0
½	0	1	0
1	0	0	1

A	|A	–A
0	0	1
½	0	0
1	1	0

Исчисление **FC3N**($\cong$) эквивалентно сильной логике Клини, обогащенной клиниевской же связкой полной эквивалентности, а также трехзначной логике Лукасевича. Последнее может быть понято при учете того, что при построении этого исчисления ослаблялся именно принцип двузначности, что являлось для Лукасевича отправной точкой в построении им трехзначной логики.

В полученной логике необходимые и достаточные условия для утверждения о неподвижной точке ($|A \leftrightarrow A$) усматриваются из следующих теорем.

T5 $\vdash$ $(|A \veebar - A) \supset (|A \leftrightarrow A)$

T5 $\vdash$ $(|A \leftrightarrow A) \supset (|A \veebar - A)$

Имеем также следующие теоремы, имеющие несколько непривычный вид.

T6.1 $\nvdash$ $(\rightarrow \rightarrow \rightarrow)$.

T7.1 $\vdash$ $(\rightarrow \cong \rightarrow)$.

T7.2 $\vdash$ $(\cong \cong \cong)$.

Последние теоремы становятся понятнее, если учесть, что из схемы аксиом A4 подстановкой $\cong$ получается

$$(\cong \cong \cong) \equiv (|\cong \leftrightarrow |\cong) \wedge (-\cong \leftrightarrow -\cong)$$

и из A5 имеем $(-|\cong \wedge - - \cong)$ и $(-T(\mathrm{q}(\cong)) \wedge - F(\mathrm{q}(\cong))$.

Обратим внимание, что при построении логики **FC3N**($\cong$) мы не выходили за рамки языка классической логики **FC2**($\cong$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика (конспект лекции) // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989.
2. *Лукасевич Я.* О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993. С. 190-205.
3. *Павлов С.А.* Формулировка классической логики, обогащенной семантическими терминами «истинно» и «ложно» // Труды научно-исслед. семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М., 2001. С. 74-78.
4. *Павлов С.А.* Секвенциальная формулировка логики с операторами истинности и ложности // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVI. М., 2002. С. 79-85.
5. *Тарский А.* Семантическая концепция истины и основания семантики. // Аналитическая философия: становление и развитие. М., 1998.