В.Е.Комендантский

ТЕОРЕМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРИСТЛИ И МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ В МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИКАХ

Abstract. *In this paper we study proof theory of many-valued logics from the algebraic point of view. We solve the problem posed in [7] and formulate a criterion of correctness of the many-valued resolution based on the Priestley representation theorem with respect to an arbitrary many-valued logic.*

Введение

В этой статье мы исследуем теорию вывода многозначных логик с алгебраической точки зрения. Нашей целью является формулировка критерия применимости к произвольной многозначной логике предложенного в [9] метода резолюций на основе теоремы представления Пристли для дистрибутивных решеток с операторами. Данный метод резолюций, как и все существующие методы резолюций, симулирует разрешающую процедуру первопорядковой логики предикатов, по причине чего любой резолютивный вывод может быть эквивалентным образом представлен, например, в гильбертовском исчислении соответствующей логики. Отличительной особенностью данного метода, благодаря которой он в ряде случаев более эффективен, чем гильбертовский, является использование специальных меток, которые ограничивают область оценки многозначной формулы некоторым подмножеством множества истинностных значений.

Правило бинарной резолюции на основе дуальности Пристли выглядит следующим образом (ср. [9, следствия 5 и 6]):

Из посылок $(\{\alpha\}{:}L^t)\vee C_1$ и $(\{\beta\}{:}L^f)\vee C_2$ выводится $C_1\vee C_2$ при условии, что $\alpha,\beta\in D(A)$ и $\alpha\leq\beta$,

где запись $\{\alpha\}{:}L^t$ (или $\{\alpha\}{:}L^f$) обозначает, что многозначный литерал L общезначим (соответственно, опровержим) на множестве истинностных значений α; C_1 и C_2 суть дизъюнкции литералов с метками указанного вида; D(A) есть множество всех главных фильтров на алгебре истинностных значений A рассматриваемой логики, упорядоченное по включению. Для краткости изложения мы предполагаем, что L, C_1 и C_2 уже унифицированы. Заметим, что упомянутое правило резолюции по сути своей остается классическим, изменения касаются только структуры литералов.

Основные определения метода резолюций для классической логики предикатов первого порядка остаются неизменными, происходит только структурная трансформация многозначных литералов в многосортные классические, поэтому в этой статье не приводятся подробные определения понятий метода резолюций. Вместо этого мы указываем на основополагающую монографию по методу резолюций и автоматическому доказательству теорем в классической первопорядковой логике предикатов [3].

MV-алгебры, исследуемые в этой статье, не определяются. Определение MV-алгебр см., например, работу [5].

Отметим некоторые работы, близкие по тематике к данной статье. Оригинальные теоремы представления для конечнозначных логик были установлены в [4], где в отличие от [9] и данной работы рассматривались квазимногообразия алгебр истинностных значений, а не многообразия. Также в связи с логиками Лукасевича и соответствующей теоремой представления для дистрибутивных решеток с оператором резидуации (см. [9]) следует упомянуть статью [10], где была доказана полнота бесконечнозначной логики Лукасевича относительно реляционной семантики с тернарным отношением достижимости на множестве миров. В свою очередь, в [10] были использованы результаты статьи [1].

В более ранней работе [2] мы уже рассматривали методы резолюций с отмеченными формулами (т.е. с формулами, имеющими метки) для многозначных логик, однако предложенный нами подход был иным, требующим осуществления трудоемких рутинных операций по преобразованию формул к виду, пригодному для подстановки в правило. Поэтому мы считаем, что подход, исследуемый в данной статье, более ценен в случае, когда вывод осуществляет человек, а не машина.

Матрицы и реляционные структуры

Так называемые *натуральные теоремы представления* (см. [9]), к которым относится и теорема Пристли, мотивированы следующими соображениями. Пусть L – это некоторая логика. Если L полна и непротиворечива относительно класса **M** матриц, и этот класс матриц может быть представлен как множество подмножеств реляционных структур в классе **R**, тогда реляционные структуры в **R** являются возможными кандидатами для определения класса $\mathbf{K}_{\mathbf{M},\mathbf{R}}$ моделей Крипке для L. В частности, при определенных условиях полнота и непротиворечивость логики L относительно класса $\mathbf{K}_{\mathbf{M},\mathbf{R}}$ есть прямое следствие полноты и непротиворечивости L относительно **M.**

Пусть **M** – это класс матриц. В ряде случаев можно показать (см. [9, теоремы 13 и 14]), что существует класс **R** реляционных структур таких, что выполняется следующее условие:

Существуют отображения D: $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}$ и O: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{M}$ такие, что

(i) для каждой структуры $K \in \mathbf{R}$ верно $O(K) = (A_K, V_K) \in \mathbf{M}$, где A_K – это алгебра подмножеств множества возможных миров структуры K, а V_K – множество выделенных миров структуры K;

(ii) для каждой матрицы $M = (A, V) \in \mathbf{M}$, если $O(D(M)) = (A_{D(M)}, V_{D(M)})$, то существует инъективный гомоморфизм i: $A \rightarrow A_{D(M)}$ такой, что $i^{-1}(V_{D(M)}) \subseteq V$.

Теорема представления Пристли

Ниже мы приведем основные понятия, необходимые для формулировки базовой теоремы (см. [9]).

Непустое подмножество F решетки L называется *фильтром*, если для любых $x,y \in F$ $x \wedge y \in F$, и для любых $x,y \in L$, если $x \in F$ и $x \leq y$, тогда $y \in F$. Фильтр F, максимальный относительно свойства $0 \notin F$, называется *ультрафильтром*. Фильтр F называется *главным*, если $F \neq L$ и для всех $x,y \in L$, если $x \vee y \in F$, тогда $x \in F$ или $y \in F$. Далее, назовем *порядковым фильтром* множество $F_x = \{y\colon y \geq x\}$, где $x,y \in L$.

Обозначим операцию замыкания произвольного множества как **C**. Множество A называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием $\mathbf{C}(A)$, и *открытым* – если его дополнение замкнуто.

Класс B открытых подмножеств пространства X называется *базисом* X, если каждое открытое подмножество X есть объединение некоторых множеств, принадлежащих B. Класс B_0 открытых подмножеств пространства X называется *подбазисом* X, если класс B, состоящий из пустого множества $\varnothing$, самого пространства X и всех конечных пересечений вида $B_1 \cap \ldots \cap B_n$, где $B_1, \ldots, B_n \in B_0$, есть базис пространства X.

Пусть X и Y – пространства. Взаимно однозначное отображение f: $X \rightarrow Y$, сохраняющее операцию замыкания, т.е. удовлетворяющее $f(\mathbf{C}(A)) = \mathbf{C}(f(A))$, для каждого множества $A \subseteq X$, и $f^{-1}(\mathbf{C}(B)) = \mathbf{C}(f^{-1}(B))$, для каждого $B \subseteq Y$, называется *гомеоморфизмом* X на Y.

Определим *дуал Пристли* для ограниченной дистрибутивной решетки L как частично упорядоченное *топологическое пространство* $D(L) = (FP(L), \subseteq, \tau)$, где FP(L) – это множество главных фильтров на L, а τ – это *топология*, т.е. система замкнутых подмножеств, порожденная подбазисом, состоящим из множеств вида $X_a=\{F\in FP(L): a\in F\}$, для всех $a\in L$, а также из их дополнений.

Пусть A – это ограниченная дистрибутивная решетка. *Гомоморфизмом* (*антиморфизмом*) на A называется функция $k:A\to A$, сохраняющая (обращающая) порядок. *Гемиморфизмом относительно дизъюнкции* на A называется функция f: $A^n \to A$, принимающая значение 0, если любой ее аргумент принимает значение 0, и, если ее i-тый аргумент равен $a_1\vee a_2$, равная дизъюнкции двух функций f, у которых на i-тых аргументных местах находятся a_1 и a_2 соответственно. *Гемиморфизм относительно конъюнкции* определяется двойственным образом: в предыдущем определении 0 заменяется на 1, а дизъюнкция – на конъюнкцию. *Гемиантиморфизмом относительно дизъюнкции* на A называется функция g: $A^n \to A$, принимающая значение 0, если любой ее аргумент принимает значение 1, и, если ее i-тый аргумент равен $a_1\wedge a_2$, равная дизъюнкции двух функций g, у которых на i-тых аргументных местах находятся a_1 и a_2 соответственно. *Гемиантиморфизм относительно конъюнкции* также определяется двойственным образом.

Обозначим как Σ класс всех гомоморфизмов, антиморфизмов, геми(анти)морфизмов относительно дизъюнкции и геми(анти)-морфизмов относительно конъюнкции на произвольной ограниченной дистрибутивной решетке A.

Следующая теорема (см. [9, теорема 14]) устанавливает эквивалентную форму представления для ограниченных дистрибутивных решеток с операторами.

Теорема 1 (теорема представления Пристли*).* *Каждая ограниченная дистрибутивная решетка* L *с операторами из множества* Σ *изоморфна решетке* O(D(L)) *открыто-замкнутых порядковых фильтров на* D(L). *Изоморфизм* $f: L\to O(D(L))$ *задается как* $f(x)=\{F: F\in FP(L)$ *и* $x\in F\}$.

Канонические расширения

Для анализа свойств операторов дистрибутивных решеток в [8] применялся аппарат канонических расширений, позаимствованный в свою очередь из модальных логик. Для формулировки критерия применимости метода резолюций на основе дуальности Пристли нам необходимо дать некоторые определения и привести основные результаты, касающиеся многозначных логик и канонических расширений (см. [8], [9], [6]).

В [8] *каноническим расширением* дистрибутивной решетки A с операторами из Σ названа решетка O(D(A)). Имея это в виду, допустим, что V – это многообразие (т.е. класс алгебр, удовлетворяющих одной и той же системе тождеств) ограниченных дистрибутивных решеток с операторами в классе Σ. Тогда многообразие V *замкнуто относительно канонических расширений*, если оно имеет свойство $O(D(A)) \in V$ для любой решетки $A \in V$. (В [6] используется более общее понятие канонического расширения.)

Пусть J – это множество индексов, а $U \subseteq P(J)$ – ультрафильтр, где P(J) обозначает множество всех подмножеств J. Пусть $\{X_j: j \in J\}$ – это семейство реляционных структур одного и того же типа **R**, где $X_j = (X_j, \{R_j\}_{R \in \mathbf{R}})$ для каждого j. Зададим отношение эквивалентности $\approx_U$, определенное для всех $x,y \in \Pi_{i \in J} X_j$ как $x \approx_U y$, е.т.е. $\{j \in J: x_j = y_j\} \in U$.

Для каждого семейства реляционных пространств $\{X_j: j \in J\}$ (где $X_j = (X_j, \{R_j\}_{R \in \mathbf{R}})$ для каждого j) и для каждого ультрафильтра $U \subseteq P(J)$ факторструктура $((\Pi_{i \in J} X_j)/ \approx_U, \{R_U\}_{R \in \mathbf{R}})$
называется *ультрапроизведением* семейства $\{X_j: j \in J\}$ относительно U, где R_U обозначает факторотношение по $\approx_U$, т.е. $R_U(|x^1|_U, \ldots, |x^n|_U)$, е.т.е. $\{j \in J: R_j(x^1{}_j, \ldots, x^n{}_j)\} \in U$.

Теорема 2 ([8, Следствие 22]). *Пусть* K *– это класс упорядоченных* Σ*-структур, замкнутых относительно ультрапроизведений, и пусть* $K^+ = \{O(X): X \in K\}$. *Тогда замыкание* K^+ *относительно гомоморфных образов, подалгебр и прямых произведений, т.е. многообразие, порожденное* K^+, *замкнуто относительно канонических расширений*.

Следующие теоремы были доказаны в более общей форме в [9] как теоремы 9 и 11 соответственно. В нашей более узкой формулировке они устанавливают тот факт, что, благодаря изоморфизму по теореме представления для ограниченных дистрибутивных решеток с операторами, любая алгебра A истинностных значений одной из соответствующих многозначных логик может быть запечатлена в более экономной форме как дуал Пристли D(A). Этот факт существенен для эффективного метода резолюций.

Теорема 3. *Пусть* A *– ограниченная дистрибутивная решетка. Тогда отображения и отношения на* D(A) *могут быть определены каноническим образом*.

Теорема 4. *Пусть* X = D(A) *– конечное частично упорядоченное множество. Тогда операторы на* O(X) *могут быть определены каноническим образом*.

Пусть $\mathbf{Z}^+$ и $\mathbf{Z}^-$ – это соответственно множества всех неотрицательных и неположительных целых чисел. *Алгебра Чена* C (см. [5, стр. 474]) определяется как $(C, \oplus, \neg, 0)$, где C – это решетка вида $C = \{(0, a): a \in \mathbf{Z}^+\} \cup \{(1, b): b \in \mathbf{Z}^-\}$.

Нулем данной решетки является элемент (0, 0), а единицей – (0, 1). На решетке задается лексикографический порядок. Операция сложения определяется как

$$(i,a)\oplus(j,b) = \begin{cases} (0,a+b), \text{ если } i+j=0 \\ (1,0\wedge(a+b)), \text{ если } i+j=1 \\ (1,0), \text{ если } i+j=2, \end{cases}$$

а операция отрицания определяется как $\neg(i,a) = (i+_2 1, -a)$, где $+_2$ обозначает операцию сложения по модулю 2.

Пусть f – алгебраическая операция. Определим f^σ как нижний предел $\sup\inf f$, а f^π – как верхний предел $\inf\sup f$ (более точное определение см. [6]). Тогда каноническим расширением алгебры A будет алгебра, полученная из A в результате применения σ или π ко всем ее операциям и вложения A в полную решетку.

Лемма 1 ([6]). *Пусть* $C=(C, \oplus, \neg, 0)$ – *это алгебра Чена и пусть* $f=\oplus$. *Тогда* $f^\sigma\neq f^\pi$.

В силу лемм 2 и 3, аксиома MV-алгебры (MV6) $\neg(\neg x\oplus y)\oplus y = \neg(\neg y\oplus x)\oplus x$ не является канонической, поэтому аксиома бесконечнозначной логики Лукасевича $((P\to Q)\to Q) \to ((Q\to P)\to P)$ невыводима методом резолюции на основе теоремы представления Пристли (см. правило во введении).

Лемма 2 ([6]). *Тождество* (MV6) *не выполняется в* $C^\sigma=(C^\sigma,\oplus^\sigma,\neg^\sigma,0)$.

Лемма 3 ([6]). *Тождество* (MV6) *не выполняется в* $C^\pi=(C^\pi,\oplus^\pi,\neg^\pi,0)$.

Теорема 5. *Пусть* **L** – *это произвольная логика Лукасевича, тогда метод резолюций на основе дуальности Пристли корректен относительно* **L**, *е.т.е.* **L** *конечнозначна*.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Так как любое многообразие MV-алгебр, порожденное бесконечным классом MV-алгебр, содержит алгебру Чена C (см. [5, стр. 474]), то в силу лемм 2 и 3 не существует бесконечно порожденных канонических многообразий MV-алгебр. Этот факт по контрапозиции доказывает данную часть теоремы.

($\Leftarrow$) В силу теорем 3 и 4 мы можем задать операторы на O(D(A)) каноническим образом. По определению отображений σ и π операторы на O(D(A)) будут сохранять аксиомы MV-алгебры. Это доказывает корректность правила резолюции. □

В следующей теореме дано решение проблемы, поставленной в [7], т.е. основной проблемы настоящей статьи.

Теорема 6 (Критерий применимости метода резолюций). *Метод резолюций на основе теоремы представления Пристли* *корректен относительно произвольной многозначной логики, если и только если многообразие* V*, порожденное ее алгеброй* A *истинностных значений, замкнуто относительно канонических расширений, т.е. для всех* $A' \in V$ *верно, что* $O(D(A')) \in V$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Вследствие теоремы 2, многообразие, порождённое алгеброй классов эквивалентности произвольной многозначной логики, замкнуто относительно канонических расширений, если эта алгебра находится в классе ограниченных дистрибутивных решёток с операторами в классе Σ.

($\Leftarrow$) Предположим теперь, что многообразие V, порождённое алгеброй A, незамкнуто относительно канонических расширений, т.е. существует $A' \in V$ такая, что $O(D(A')) \notin V$. Следовательно, в V существует алгебра, каноническое расширение которой не удовлетворяет тождествам алгебры A. Отсюда, алгебра A порождает многообразие V такое, что метод резолюций некорректен относительно логики, для которой данное многообразие является характеристическим. □

Отметим, что, согласно данной теореме, алгебра истинностных значений рассматриваемой логики не обязана быть конечной. Следовательно, метод резолюций может быть применим и к некоторым бесконечнозначным логикам.

Заключение

В теореме 6 нами был сформулирован критерий применимости метода резолюций на основе теоремы представления Пристли к многозначным логикам с произвольными алгебрами истинностных значений.

В [9] было показано, что существует общая схема теорем представления как для решеток с операторми из класса Σ, так и для полурешеток с операторами из этого класса. По этой схеме, в частности, можно получить теорему представления для дистрибутивных решеток с оператором резидуации ([9, теорема 17]), к которым принадлежат и MV-алгебры – семантические аналоги логики Лукасевича. Но так как представление решеток с резидуацией осуществляется там посредством топологических дуалов, имеющих принципиально иную структуру (в частности, с тернарными отношениями на топологических пространствах), чем дуалы Пристли, то использованное нами в статье определение канонических расширений не может быть применено для создания метода резолюций в случае логик, основанных на дистрибутивных решетках с оператором резидуации. В силу этого представляет теоретический интерес понятие канонического расширения для таких логик. В случае нахождения подходящей формулировки, можно было бы эффективно решить вопрос о замкнутости соответствующих многообразий относительно представлений, и тогда появилось бы основание для построения метода резолюций для многозначных логик (например, логик Геделя и логик Лукасевича) и релевантных логик по аналогии с методом резолюций для многозначных логик на основе теоремы представления Пристли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карпенко А.С.* Фактор-семантика для бесконечнозначной логики Лукасевича // Неклассические логики. М.: ИФАН, 1985. С. 20-26,.
2. *Комендантский В.Е.* Метод резолюций в смешанной логике Поста // Труды XVI научно-исследовательского семинара логического центра ИФРАН. М.: ИФРАН, 2002. С. 64-74.
3. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Мир, 1983.
4. *Anshakov O., Rychkov S.* On Finite-Valued Propositional Logical Calculi // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1994. Vol. 36, № 4. P. 606-629.
5. *Chang C.C.* Algebraic analysis of many valued logics // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 88. P. 467-490.
6. *Gehrke M., Priestley H.A.* Non-canonicity of MV-algebras // Houston Jounal of Mathematics, 2002.
7. *Komendantsky V.* On automated theorem proving by means of representation theory in Lukasiewicz logics // Smirnov's Readings. 4 international conference. Moscow: IPhRAS, 2003. P. 78-79.
8. *Sofronie-Stokkermans V.* Duality and canonical extensions of bounded distributive lattices with operators, and applications to the semantics of non-classical logics I. // Studia Logica. 2000. Vol 64, № 1. P. 151-172.
9. *Sofronie-Stokkermans V.* Representation Theorems and the Semantics of Non-classical Logics, and Applications to Automated Theorem Proving // Beyond Two: Theory and Applications of Multiple Valued Logic. Springer, 2003. P. 59-100.
10. *Vasyukov V.L.* The Completeness of the Factor Semantics for Lukasiewicz's Infinite-valued Logics // Studia Logica. 1993. Vol. 52. P. 143-167.