И.А.Карпенко, В.М.Попов

ПОГРУЖЕНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ RM В ЕГО ПОЗИТИВНЫЙ ФРАГМЕНТ*

Abstract. *A translation from the calculus* RM [1] *to the positive fragment of* RM *is constructed.*

Исчисление RM [1] погружается в его позитивный фрагмент, т.е. во множество всех таких доказуемых в RM формул, ни в одну из которых не входит негация $\neg$. Далее позитивный фрагмент исчисления RM обозначается посредством RM_+.

Языки $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$ и $L_{\wedge\vee\supset\neg}$ являются стандартно определяемыми пропозициональными языками с алфавитами $<P,\wedge,\vee,\supset,\neg,f,),(>$ и $<P,\wedge,\vee,\supset,\neg,),(>$ соответственно. Здесь P есть множество $\{p_1,p_2,p_3,\ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка каждого из этих языков, $\wedge,\vee,\supset$ есть двухместные логические связки каждого из этих языков, $\neg$ есть одноместная логическая связка каждого из этих языков, f есть нольместная логическая связка языка $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$, а) и (есть технические символы (скобки) каждого из этих языков. Формулы языка L ($L\in\{L_{\wedge\vee\supset\neg f}, L_{\wedge\vee\supset\neg}\}$), называемые L-формулами, строятся обычным образом.

Исчисление RM_f есть исчисление гильбертовского типа над $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$, а исчисление RM есть исчисление гильбертовского типа над $L_{\wedge\vee\supset\neg}$. Для всяких $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул A, B и C аксиомами исчисления RM_f являются $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы:

A1. $(A\supset A)$,

A2. $(A\supset((A\supset B)\supset B))$,

A3. $((A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C)))$,

A4. $((A\supset(A\supset B))\supset(A\supset B)$,

A5. $((A\wedge B)\supset A)$,

A6. $((A\wedge B)\supset B)$,

A7. $(((A\supset B)\wedge(A\supset C))\supset(A\supset(B\wedge C)))$,

A8. $(A\supset(A\vee B))$,

A9. $(B\supset(A\vee B))$,

* Работа выполнена при поддержке грантов РГНФ № 02-03-18196 и № 01-03-00403.

A10. $(((A\supset C)\wedge(B\supset C))\supset((A\vee B)\supset C))$,
A11. $((A\wedge(B\vee C))\supset((A\wedge B)\vee(A\wedge C)))$,
A12. $(A\supset(A\supset A))$,
A13. $((A\supset(\neg B))\supset(B\supset(\neg A)))$,
A14. $((\neg(\neg A))\supset A)$,
A15. $((\neg A)\supset(A\supset f))$,
A16. $((A\supset f)\supset(\neg A))$.

Ничто другое аксиомой исчисления RM_f не является. Аксиомами исчисления RM являются в точности те $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, каждая из которых есть аксиома исчисления RM_f. Правилами исчисления RM_f являются только модус поненс для $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул и адьюнкция для $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул, т.е. соответственно только правила $\alpha,(\alpha\supset\beta)/\beta$ и $\alpha,\beta/(\alpha\wedge\beta)$, где α и β есть переменные по $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулам, а правилами исчисления RM являются только модус поненс для $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул и адьюнкция для $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул, т.е. соответственно только правила $\alpha,(\alpha\supset\beta)/\beta$ и $\alpha,\beta/(\alpha\wedge\beta)$, где α и β есть переменные по $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулам.

Доказательства в исчислениях RM_f и RM строятся обычным для исчислений гильбертовского типа способом. Условимся, как это принято, о том, что (a) доказательством в RM_f (соответственно в RM) $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A (соответственно $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A) является доказательство в RM_f (соответственно в RM), последняя $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула (соответственно $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула) которого есть A, (b) запись "$RM_f \vdash A$" (соответственно "$RM \vdash A$") используется в качестве сокращения для записи "существует доказательство в RM_f $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A", (соответственно "существует доказательство в RM $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A"), (c) синонимом "доказательство в RM_f" является "RM_f-доказательство", а синонимом "доказательство в RM" является "RM-доказательство".

Определение отображения Сд множества F всех $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул в F:

Сд(f) = f,

Сд(p_i) = p_{i+1} (где i принадлежит множеству N всех натуральных чисел),

Сд(($A\bullet B$)) = Сд(A)$\bullet$Сд(B) (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы, а $\bullet\in\{\wedge\vee\supset\}$),

Сд(($\neg A$)) = ($\neg$Сд(A)) (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

Определение отображения $S_{p1/f}$ множества F в F:

$S_{p1/f}(f) = f$,

$S_{p1/f}(p_1) = f$,

$S_{p1/f}(p_i) = p_i$ (где $i \in N$, и $i \neq 1$),

$S_{p1/f}((A \bullet B)) = (S_{p1/f}(A) \bullet S_{p1/f}(B)$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы, а $\bullet \in \{\wedge\vee\supset\}$),

$S_{p1/f}((\neg A)) = (\neg S_{p1/f}(A))$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

Определение отображения $S_{f/p1}$ множества F в F:

$S_{f/p1}(f) = p_1$,

$S_{f/p1}(p_i) = p_i$ (где $i \in N$),

$S_{f/p1}((A \bullet B)) = (S_{f/p1}(A) \bullet S_{f/p1}(B))$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы, а $\bullet \in \{\wedge\vee\supset\}$),

$S_{f/p1}((\neg A)) = (\neg S_{f/p1}(A))$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

Определение отображения $S_{p1/\neg}$ множества F` в F`:

$S_{p1/\neg}(p_i) = p_i$ (где $i \in N$),

$S_{p1/\neg}((A * B)) = (S_{p1/\neg}(A) * S_{p1/\neg}(B))$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, а $* \in \{\wedge\vee\}$),

$S_{p1/\neg}((A \supset p_1)) = (\neg S_{p1/\neg}(A))$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула),

$S_{p1/\neg}((A \supset B)) = (S_{p1/\neg}(A) \supset S_{p1/\neg}(B))$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, а B не есть p_1),

$S_{p1/\neg}((\neg A)) = (\neg S_{p1/\neg}(A))$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула).

Определение отображения $S_{\neg/p1}$ множества F` всех $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул в F`:

$S_{\neg/p1}(p_i)=((p_i \supset p_1) \supset p_1)$ (где $i \in N$),

$S_{\neg/p1}((A \bullet B)) = (((S_{\neg/p1}(A) \bullet S_{\neg/p1}(B)) \supset p_1) \supset p_1)$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, а $\bullet \in \{\wedge\vee\supset\}$),

$S_{\neg/p1}((\neg A)) = (((S_{\neg/p1}(A) \supset p_1) \supset p_1) \supset p_1)$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула).

Лемма 1: пусть $A_1, \ldots, A_n$, где $n \in N$, есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы и упорядоченная n-ка $<A_1, \ldots, A_n>$ есть RM_f-доказательство. Тогда $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A_i))) \in RM_+$.

Лемма 1 доказана возвратной индукцией по n.

Следствие леммы 1: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что если $RM_f \vdash A$, то $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A))) \in RM_+$.

Лемма 2: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула. Тогда

a) $RM_f \vdash (Сд(A) \supset S_{p1/f}(S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A)))))$ и

b) $RM_f \vdash (S_{p1/f}(S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A)))) \supset (Сд(A))$.

Лемма 2 доказана индукцией по построению $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A.

Следствие леммы 2: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула. Если $RM_f \vdash (S_{p1/f}(S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A))))$, то $RM_f \vdash Сд(A)$.

Нижеследующие леммы 3 и 4 являются следствиями того, что множество всех $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул, доказуемых в RM_f, замкнуто относительно подстановки $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы вместо пропозициональной переменной в $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулу.

Лемма 3: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что если $RM_f \vdash A$, то $RM_f \vdash S_{p1/f}(A)$.

Лемма4: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что если $RM_f \vdash$ Сд(A), то $RM_f \vdash A$.

Лемма 5: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что если $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A))) \in RM_+$, то $RM_f \vdash A$.

Доказательство:

Пусть (1) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула и (2) $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A)))$ принадлежит позитивному фрагменту исчисчления RM. Из (2) по определению позитивного фрагмента исчисления RM получаем, что (3) $RM \vdash S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A)))$. Из (3) по определению RM_f получаем, что (4) $RM_f \vdash S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A)))$. Используя (4) и лемму 3, получаем (5) $RM_f \vdash S_{p1/f}(S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A))))$. Из (1), (5) и следствия леммы 2 вытекает (6) $RM_f \vdash$ Сд(A). Из (1) и (6) по лемме 4 получаем, что $RM_f \vdash A$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A верно, что $RM_f \vdash A$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A))) \in RM_+$.

Лемма 6 вытекает из леммы 5 и следствия леммы 1.

Определение p_1-регулярной $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы:

$L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула A называется p_1-регулярной $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулой, если A не есть p_1 и не существует такой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы B, что хотя бы одна из $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул $(p_1\supset B)$, $(p_1\wedge B)$, $(B\wedge p_1)$, $(p_1\vee B)$, $(B\vee p_1)$, $(\neg p_1)$ есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-подформула $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A.

Лемма 7: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула. Тогда $S_{\neg/p1}$(Сд(A)) есть p_1-регулярная $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула.

Лемма 7 доказана индукцией по построению $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы A.

Лемма 8: пусть A есть p_1-регулярная $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула и $RM \vdash A$. Тогда $RM \vdash S_{p1/\neg}(A)$.

Лемма 8 доказана с использованием матриц Сугихары [2].

Лемма 9: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула. Тогда (a)$RM \vdash (S_{p1/\neg}(S_{\neg/p1}(Сд(A)))\supset Сд(A))$ и (b) $RM \vdash (Сд(A)\supset S_{p1/\neg}(S_{\neg/p1}(Сд(A))))$.

Лемма 9 доказана индукцией по построению $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A.

Лемма 10: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A верно, что если $RM \vdash$ Сд(A), то $RM \vdash A$.

Лемма 10 есть следствие того, что множество всех $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул, доказуемых в RM, замкнуто относительно подстановки $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы вместо пропозициональной переменной в $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулу.

Лемма 11: пусть A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула. Тогда верно следующее: $RM_f \vdash A$ т.т.т. $RM \vdash A$.

Доказательство:

(1) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула (условие).

Очевидно, что для доказательства леммы 11 достаточно доказать следующие два утверждения У1 и У2.

У1: если $RM \vdash A$, то $RM_f \vdash A$.

У2: если $RM_f \vdash A$, то $RM \vdash A$.

Утверждение У1 легко доказывается индукцией по длине RM-доказательства $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A.

Докажем У2.

Допустим, что (2) $RM_f \vdash A$.

(3) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула (из (1) и того, что всякая $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

(4) $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A))) \in RM_+$ (из (2) и (3) по лемме 6).

(5) $S_{f/p1}(Сд(A)) = Сд(A)$ (легко доказывается индукцией по построению $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A).

(6) $S_{\neg/p1}(Сд(A)) \in RM_+$ (из (4) и (5)).

(7) $RM \vdash S_{\neg/p1}(Сд(A))$ (из (6) по определению RM_+).

(8) $S_{\neg/p1}(Сд(A))$ есть p_1-регулярная $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула (из (1) по лемме 7).

(9) $RM \vdash S_{p1/\neg}(S_{\neg/p1}(Сд(A)))$ (из (7) и (8) по лемме 8).

(10) $RM \vdash Сд(A)$ (из (9) и (1) по лемме 9 (пункт (a))).

(11) $RM \vdash A$ (из (10) и (1) по лемме 10).

Утверждение У2 доказано.

Лемма 11 доказана.

Теорема: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы A верно следующее: $RM \vdash A$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(Сд(A)) \in RM_+$.

Доказательство:

Пусть (1) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула.

(2) $RM_f \vdash A$ т.т.т. $RM \vdash A$ (из (1) по лемме 11).

(3) A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула (из (1) и того, что всякая $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

(4) $RM_f \vdash A$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A))) \in RM_+$.

(5) $RM \vdash A$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(S_{f/p1}(Сд(A))) \in RM_+$.

(6) $S_{f/p1}(Сд(A)) = Сд(A)$ (см. анализ пятого шага в доказательстве утверждения У2 в рамках леммы 11).

(7) RM $\vdash$ A т.т.т. $S_{\neg/p1}$(Сд(A))$\in RM_{+}$.

Теорема доказана.

Таким образом, композиция Сд$\bullet S_{\neg/p1}$ отображений Сд и $S_{\neg/p1}$ есть операция, погружающая исчисление RM в его позитивный фрагмент.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson A. R., Belnap N. D., jr.* Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 1. Princeton, 1975. P. 339-341.
2. *Sugihara T.* Strict implication free from implicational paradoxes // Memoirs of the Faculty of Liberal Arts. Fukui University. Series I, 1955. P. 55-59.