

А.С.Карпенко

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ В ФИЛОСОФСКОЙ ЛОГИКЕ*

Abstract. *In this paper is shown a number of tendencies which are essential to the contemporary development of the philosophical logic PL. Firstly, it is the fact that it contains almost all non-classical logic. Secondly, though it sounds strange, now we have the algebraization of PL going on. The third tendency, the most important one, is the approximation of different ways of human reasoning by means of deductive methods in computer programs. The reader's attention is attracted to a currently discussed problem: could it be that logic would ground of Artificial Intelligence? At last, we should pay attention to the general tendency of the development of logic at the end of XX-the beginning of XXI centuries. A hundred years ago there was posed a problem of the foundations of mathematics. And nowadays we have a problem with the same role, namely the problem of the foundations of logic itself. The following topics correspond to it:*

- (i) *What is a logical consequence?*
- (ii) *What are logical conceptions (operations)?*
- (iii) *What is a logical system?*
- (iv) *What is a logic?*

1. Введение

Современное развитие логики и сравнение двух логических журналов: «*The Journal of Symbolic Logic*» и «*Journal of Philosophical Logic*», издаваемых под эгидой Международной Ассоциации Символической Логике, созданной в 1936 году, показывает сближение тем, методов и результатов в публикуемых работах. На IX Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки (Упсала, Швеция, 1991) Г. фон Вригт справедливо констатировал: «С логикой случилось то, что она расплавилась в разнообразных исследованиях математики...» [1992, с. 89]. Тем не менее современные исследования в логике (о тенденциях развития логики в конце XX в. см. в работе [Карпенко, 2000]) можно четко разбить на три основных раздела:

- I. Математическая (символическая) логика.
- II. Философская логика.
- III. Неклассические (нестандартные) логики.

Сразу оговоримся, что третий раздел, в особенности в таких своих направлениях, как:

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-06-07009.

1. Интуиционистская и суперинтуиционистские логики¹,
2. Модальные и временные логики,
3. Многозначные и нечеткие логики,
4. Релевантные и паранепротиворечивые логики, –

безоговорочно относится к философской логике в силу тех сугубо философских предпосылок, из которых возникли эти направления. Тем не менее, мы все-таки выделим развитие неклассических логик в отдельный раздел, который все более становится похожим на первый раздел. Стоит отметить, что как раз в области неклассических логик российскими логиками были достигнуты результаты высочайшего мирового уровня. И именно здесь в конце XX века со всей остротой был поставлен вопрос «Что такое логическая система?» и вообще «Что такое логика?»

В данной работе мы ограничимся в основном рассмотрением второго раздела, но заметим, что предполагается издание гораздо более полной работы, охватывающей все три раздела, под названием «Современное состояние исследований по логике: ретроспективы и перспективы».

Перед тем как перейти непосредственно к «Философской логике», дадим краткую характеристику того, что понимается под «Математической логикой». В предисловии к «Справочнику по математической логике», изданному в 1977 г. (см. русский перевод с многочисленными добавлениями [Барвайс (ред.), 1982]), Дж. Барвайс пишет: «Математическая логика традиционно подразделяется на четыре раздела: теория моделей, теория множеств, теория рекурсии и теория доказательств». Однако за истекшие четверть века положение дел несколько изменилось, благодаря той огромной роли, которую играет логика в компьютерных науках. Отсюда усиление значимости теории доказательств, а в теории рекурсии на первое место выходят проблемы вычислимости и сложности. Это учитывалось на очередном ежегодном собрании Ассоциации Символической Логики в Urbana-Champaign в июне 2000 г. при проведении специальной дискуссии на тему «Перспективы математической логики в двадцать первом столетии». По итогам дискуссии под таким же названием опубликована работа четырех авторов С.Р. Басса, А.С. Кечриса, А. Риллэя и Р.А. Шора [Buss *et al.*, 2001].

Причем, в указанной работе ни одно из направлений неклассических логик даже не упоминается, а ссылки на российских логиков крайне редки (что характерно для *всех* западных обзоров по логике). Однако имеется обзор В.А. Успенского «Математическая логика в бывшем Советском Союзе: Краткая история и текущие тенденции» [Uspensky, 1997], который посвящен, в основном, отечественным логикам.

¹ Сюда же относится и *марковский конструктивизм*, получивший широкое признание за рубежом.

Остается сделать еще одно, но весьма существенное замечание, в какой-то степени объясняющее довольно-таки низкий уровень исследований в нашей стране, относящихся непосредственно ко второму разделу (II).

Уникальная история России XX века предопределила и уникальное развитие логики в ней, во многом непонятное для западного историка науки. В жестко тоталитарной системе *истина* становится предметом чисто идеологических манипуляций, а ложь и террор становятся самоцелью. Одной из особенностей развития логики в бывшем Советском Союзе был часто выдвигаемый тезис о союзе логиков-математиков и логиков-философов. Это и не удивительно: в сложившейся системе логики-философы искали поддержки у логиков-математиков, у которых еще оставалась возможность для научных публикаций и даже в зарубежных изданиях, в то время когда в единственном советском философском журнале, выходившем в 20-е и 30-е годы («Под знаменем марксизма»), был опубликован ряд статей, где формальная логика сопоставлялась с диалектикой и диалектической логикой. Первая объявлялась буржуазной, а вторая пролетарской, и формальная логика предавалась анафеме. Гибельная атмосфера этих лет для философии и логики описана в книге В.А. Бажанова [1995], которая недвусмысленно называется «Прерванный полет» (см. также [Карпенко, 2001]). Даже когда в 1947 г. формальная логика была возвращена в систему среднего и высшего образования, ее положение не было независимым. Уже в начале 50-х годов в ходе навязанной дискуссии было зафиксировано, что высшей ступенью мышления является диалектическая логика, низшей – формальная. На этом фоне все 50-е и даже 60-е годы прошли в обоюдной полемике.

Все это надо учитывать, если мы хотим провести сравнительный анализ развития логики у нас в стране и за рубежом. *Логика террора такова, что места для логики не остается.*

2. Философия логики или философская логика

Философская логика является исключительно широкой областью логических исследований, требующих философского осмысления основных понятий, применяемых в современной логике, и результатов, полученных средствами математической логики. Однако термин «философская логика» весьма неопределен, многозначен и единого употребления не имеет. Различными специалистами в современной логике и самой философии он понимается по-разному, а скорее, каждым по-своему. Даже если философская логика понимается как особая научная дисциплина, определить ее предмет, границы применения и методы однозначно не удастся. Более того, не удастся строго разделить казалось бы два разных направления исследований: *философскую логику и философию*

логики. Зачастую одно подменяется другим, а порой их вообще не считают нужным различать.

Термин «философская логика» появился в англоязычной логико-философской литературе и получил широкое применение в 50–60-е годы XX в. (когда в СССР логики-философы ожесточенно выясняли, к какой ступени мышления они принадлежат). С одной стороны, кризис в основаниях математики (обнаружение парадоксов в теории множеств и ограничительные теоремы А. Тарского и К. Гёделя) потребовал глубокого осмысления самого концептуального аппарата логики. С другой стороны, появление и бурное развитие неклассических логик, в первую очередь модальной логики, привлекло широкое внимание логиков с философской ориентацией.

2.1. Философия логики

Сначала обозначим ту область исследований, которая получила название «философия логики». Для логиков-математиков философией логики является развитие теории множеств и соответствующие вопросы о способе образования множеств и о природе числа. Обнаружение парадоксов в теории множеств и, в особенности, парадокса Рассела поставил вопрос о природе самой математики. *Логицизм* пытался определить основные понятия математики в логических терминах (Г. Фреге в 1884 г. и Б. Рассел в 1903 г.) Это уже не только техническая, но и философская проблема: можно ли всю математику вывести из нескольких (или одного) логических терминов? В этом смысле грандиозное построение, предпринятое А.Н. Уайтхедом и Б. Расселом в «Principia Mathematica», оказалось неуспешным. И хотя в их логико-математической теории не обнаружено парадоксов, но из чисто логических аксиом оказалось невозможным, например, вывести существование бесконечных множеств. В § 3 нами будет рассмотрена по сути дела концепция *нового логицизма*, инспирированного А. Тарским в 1966 г.² *Интуиционизм* как еще один ответ на обнаружение парадоксов поставил принципиальные вопросы о различии конечного и бесконечного, отличии потенциальной бесконечности от актуальной. Возникла проблема существования и обоснования доказательств, и самое главное, проблема статуса классических логических законов. Все

² И тут уж никак нельзя не упомянуть концепцию *неологицизма*, которая принадлежит А.С. Есенину-Вольпину и разработана им в 1970 г., но впервые опубликована (в силу его правозащитной деятельности) лишь в 1993 г. См.: [Есенин-Вольпин, 1993]. В.К. Финн [1996 а] характеризует неологицизм как философию обоснованного знания, где под обоснованием понимается применение различных приемов рассуждений (в том числе включающих дедукцию и индукцию). Отметим, что сущностью неологицизма является расширение прерогатив логики не только на естественнонаучное знание, но и на гуманитарное знание.

это является философской проблематикой. *Формалистическая программа* Д. Гильберта тоже вызвала оживленную философскую дискуссию, в особенности – проблема *финитизма*. Еще одним способом избежать парадоксов в математике является *аксиоматическая теория множеств*. Все эти четыре подхода к **обоснованию математики** требуют глубочайшего философского осмысления (см. [Klibansky (ed.), 1968], [Fraenkel *et al.*, 1973], [Chaitin, 2000], а также книгу Перминова [2001], в которой критикуются философские основы классических программ обоснования математики). Программе Гильберта в контексте результатов Гёделя о неполноте посвящена гл. 7 в книге [Гончаров, Ершов и Самохвалов, 1994].

На самом деле выше сказанное относится больше к философии математики, чем к философии логики, но задача философского осмысления применения логики к решению различных проблем математики остается. Убедительным примером здесь являются ограничительные теоремы К. Гёделя о неполноте достаточно богатых теорий (1931), которые говорят о том, что нет и в принципе не может быть адекватного формализма, охватывающего всю математику. Философские следствия этих результатов обсуждаются по сей день и привлекли к себе огромное внимание не только логиков профессионалов, но и философов, и методологов. Однако сошлемся на работы специалистов: на философскую статью М. Даммета [Dammatt, 1963] и прекрасные книги К. Подниекса [1992] и Р. Смьюльяна [Smullyan, 1992]. К этому следует добавить также философскую дискуссию по поводу тезиса Чёрча-Тьюринга, утверждающих, что все вычислительные устройства эквивалентны между собой. Если считать человеческий мозг вычислительным устройством, то в таком случае нет препятствий для компьютеризации человеческой логики. (См. об этом в конце обзора.)

Интересно, что философией логики занялись математики, получившие в ней глубокие результаты (Г. Фреге, Б. Рассел, Л. Брауэр, К. Гёдель, У. Куайн, Р. Карнап и др.). Куайн в 1940 г. опубликовал книгу под названием «Математическая логика», а в 1970 г. – под названием «Философия логики» [Quine, 1970] (перездана в 1986), в которой под логикой понимает систематическое изучение логических истин, а философия логики становится инструментом для анализа естественного языка. Куайн обсуждает в этой книге следующие темы, которые он относит к философии логики: «Значение и истина» (проблема высказываний и предложений, высказывания как информация, теория смысла языковых выражений, истина и семантическое согласие); «Грамматика» (рекурсивное задание грамматики, категории, пересмотр цели грамматики, имена и функторы, критерий лексики; время, события и глаголы, пропозициональные установки и модальность); «Истина» (определение истины по Тарскому, парадоксы в объектном языке, связь между семантическими и логическими парадоксами); «Логическая истина» (в терминах структуры, в терминах модели, в

терминах подстановки, в терминах доказательства, в терминах грамматики); «Сфера (scope) логики» (проблема тождества, теория множеств, квантификация); «Девиант (deviant) логики» (под этим понимаются *неклассические логики*, в первую очередь, многозначная логика, интуиционистская логика, ветвящиеся кванторы); «Основания логической истины» (место логики, логика и другие науки).

Таким образом, Куайн сконцентрировал свое исследование вокруг главной проблемы философии логики: *что есть истина?* Однако впервые семантическое определение понятия истины для большой группы формализованных языков было дано А.Тарским в работе 1933 г.³, притом одновременно указаны границы такого определения. Продолжению этой тематики посвящен специальный выпуск журнала «Synthese» 126, № 1-2 (2001). В контексте философии логики проблемы истинности рассмотрены в монографии [Engel, 1992]. Значительная часть книги [Soames, 1998] посвящена теории истины Тарского и теории истины Крипке и вообще охватывает широкий круг проблем современного интереса к понятию *истины*.

Из недавних монографий по философии логики отметим книги С.Хаак, получившую широкую известность: [Haack, 1978] (переведенную на ряд языков) и [Haack, 1996], а также монографию [Read, 1995].

Через тридцать лет после выхода книги Куайна на сайте «Философия: философия логики»⁴ появились следующие разделы: «Кондиционалы и следование», «Противоречие и противоречивость», «Тождество», «Неформальная логика», «Логика и знание», «Логика и онтология», «Парадоксы», «Проблемы индукции», «Семантика логики», «Определения истины», «Неопределенность». Обратим также внимание на сайт “Factasia” [Jones, 2002], созданный в 1994 г., где можно найти всеобъемлющий философский подход к пониманию логики, ее значению и применениям.

Как отмечается в электронной “Encyclopedia Britannica” (1994-1999): «Многообразие логических семантик стало центральной областью исследований в философии логики». Вопросы логической семантики рассматриваются в книгах [Van Benthem, 1986] и [Смирнова 1986], первая из которых стала классической. Однако главным вопросом, и уже давно, является не вопрос о том, что такое семантика, а разработка единого семантического подхода, охватывающего совершенно различные логические системы, срав-

³ Русский перевод этой основополагающей работы был сделан только в 1999 г. См.: [Тарский, 1999].

⁴ http://dirt.netscape.com/Society/Philosophy/Philosophy_of_Logic/. Здесь можно найти много других сайтов, имеющих отношение к философии логики. Также постоянно развивается WWW-сервер сектора логики Института философии РАН (<http://iph.ras.ru/~logic/>).

нение различных семантических концепций и распространение их на целые классы логик. Именно этому посвящена монография Р.Эпштейна [Epstein 1990] (2-е издание в 1995 г.), в которой развивается названная им «семантика приписывания множеств» (set assignment semantics). Такой же фундаментальный труд [Epstein 1994] посвящен первопорядковым логикам⁵. Наличие бесконечных классов логик совершенно по-иному ставит вопрос о семантических основаниях логики. Исследование классов семантик, для которых различные неклассические логики являются полными, становится ныне одной из наиболее популярных тем. Точно так же трансформируется и *теория моделей*. Если изначально она имела дело с взаимоотношением между формальным языком и его интерпретацией в математических структурах, то сейчас логика становится инструментом для изучения самых различных структур и их классификации (см. [Barwise and Feferman (eds.), 1985]).

Конечно, сфера философии логики значительно шире. К проблематике последней относится теория пропозициональной формы как высказывания о некоторых положениях дел (вещей) в мире, и вообще учение о логической форме (см. монографию [Sainsbury, 1991]), учение о логических и семантических категориях, теория референции и предикации, идентификация объектов, проблема существования, учение о пресуппозициях, отношение между аналитическими и синтетическими суждениями, проблема научного закона, информативность логических законов, онтологические допущения в логике и многое другое. И даже такие, казалось бы чисто логические вопросы, также относятся к области философии логики: сущность и общая природа отношения следования, или логической выводимости между любыми высказываниями или множествами высказываний, смысл логических связок, значение фундаментальных теорем, полученных в математической логике, и в связи с этим тщательный анализ таких понятий, как «индукция», «вычислимость», «разрешимость», «доказуемость», «сложность» и опять же «истина».

2.2. Философская логика

В отличие от философии логики первоначально философской логикой называлась *модальная логика*, т.е. логический анализ таких философских понятий, как «возможность» и «необходимость». Исторически эти два понятия, особенно начиная с Аристотеля, постоянно привлекали к себе внимание философов, а с развитием символической логики появилась уникальная возможность проанализировать указанные модальности и их взаимоотношения точными методами. То же самое случилось и с такими философ-

⁵ Имеется сайт, посвященный логической семантике с персоналиями, начиная от Г.Фреге (<http://www.phil.muni.cz/fil/logika/til/inks>).

скими понятиями, как «будущее» и «прошлое». С развитием модальной логики в сферу логических исследований стали попадать все новые виды модальностей: временные, модально-временные (не механическое соединение, а синтез модальных и временных операторов), физические или причинные, деонтические, эпистемические и др. В вышедшем в 80-е годы «Справочнике по философской логике» в 4-х томах [Gabbay and Guenther, 1983-1989] (в дальнейшем HPL) подведен некоторый итог развития философской логики. Так, во 2-м томе рассматриваются расширения классической логики S_2 , например, такие, как модальная, временная, деонтическая логика и др., а в 3-м томе – альтернативы классической логике, например, такие, как многозначная, интуиционистская, релевантная логика и др. Заметим, что такое деление неклассических логик не является убедительным. И дело не в том, что есть логики, которые не относятся ни к одному из этих подразделений, например, силлогистика, логические системы Лесневского, комбинаторная логика, инфинитарные логики и т.д. Несколько неожиданным оказалось то, что логики, которые первоначально строились как ограничение некоторых классических законов и принципов, на самом деле являются расширением классической логики: например, ряд многозначных логик точно так же является расширением S_2 , как и модальные логики. Вопрос о том, что считать неклассической логикой, стал предметом оживленного обсуждения. Поэтому не удивительно, что в последнее время стал употребляться более нейтральный термин, а именно *нестандартные логики*. Имеется сайт с кратким описанием 29 нестандартных логик и краткой библиографией работ к каждой из них [Suber, 2000].

Обратим внимание, что в каждой из этих логик возникает своя философия логики, а значит все те философские проблемы, которые были перечислены выше, потому что определение истинности формулы, логического следования, понятие высказывания и смысл логических операций в большинстве логик различные. Кроме этого, в каждой философской логике возникает своя дополнительная философская проблематика. Например, в модальных логиках такой являются проблемы референции, кросс-идентификации, т.е. идентификации объектов в различных возможных мирах, и в связи с этим возникает проблема квантификации. В многозначных логиках стоит сложнейшая философская проблема интерпретации множества истинностных значений, обычно выраженного числами: рациональными, натуральными, целыми, действительными. Много философских проблем ставит интуиционистская логика, например, наличие у нее двух разнородных и не сводимых друг к другу классов семантик: реализуемой и моделей Крипке.

Языковой и техникой аппараты философской логики намного богаче и, главное, более гибкие, чем в символической логике, что позволило приступить к анализу и реконструкции

чисто философских проблем, и даже таких фундаментальных, как проблема логического и теологического фатализма, детерминизма и случайности, асимметрии времени и т.д. (см. в связи с этим [Карпенко, 1990]). *Введению* в философскую логику посвящены монографии [Wolfram, 1989] и [Grayling, 1997]. Отметим единственную монографию на русском языке с названием «Философская логика», под которой понимается «общая семантика различных логических исчислений» [Шуман, 2001].

То, что сейчас понимается под философской логикой, полнее всего отражает большой сборник статей, в основном представляющих обзоры по наиболее важным направлениям в современной философской логике [Jacquette (ed.), 2002]. Сборник содержит 46 статей, разбитых на 14 разделов: I. «Историческое развитие логики»; II. «Символическая логика и обычный язык»; III. «Философские измерения логических парадоксов»; IV. «Истина и определенная дескрипция в семантическом анализе»; V. «Понятия логического следования»; VI. «Логика, существование и онтология»; VII. «Метатеория и сфера и границы логики»; VIII. «Логические основания теории множеств и математики»; IX. «Модальные логики и семантика»; X. «Интуиционистская, свободная и многозначные логики»; XI. «Индуктивная, нечеткая и квантово-вероятностная логики»; XII. «Релевантные и паранепротиворечивые логики»; XIII. «Логика, механизация и когнитивная наука»; XIV. «Механизация логического вывода и обнаружение доказательств». Отметим, что последний раздел особенно показателен и не случайно он отнесен к философской логике (см. заключительную часть данного обзора).

Обратим внимание, что на исследование нестандартных логик претендуют и философия логики (см. монографии В.Куайна и С.Хаак) и философская логика. В последнем случае это становится явной тенденцией, проявившейся уже в книге Н.Решера [Rescher, 1968] и четко обозначенная уже в первом издании HPL. Эта тенденция еще больше усиливается в новом 18-томном издании «Справочника по философской логике» [Gabbay and Guenther, 2001-?]. Здесь уже отказались от разделения неклассических логик на расширяющие S_2 и альтернативные к ней. Другая тенденция заключается в том, что к философской логике присоединяют чуть ли не все, что напрямую не относится к выше рассмотренным четырем разделам математической логики. Поэтому не удивительно, что во 2-й том нового HPL включена статья под названием «Алгебраическая логика» [Andrjka, Njmeti and Sain, 2001]. Важнейшей областью исследований в алгебраической логике является определение необходимых и достаточных условий для построения алгебраической семантики, т.е. для построений алгебры Линденбаума (алгебры формул). Работой здесь, уже ставшей классической, является [Blok and Pigozzi, 1989]. То, что не по всякому логическому исчислению можно построить алгебру Линденбаума

(как, например, для знаменитых паранепротиворечивых логик Н. да Косты C_n), стало дополнительным стимулом для развития новых семантических методов. Еще ранее, а именно в начале 70-х годов (Н. да Коста, Д. Скотт, Р. Сушко) появилась так называемая *семантика оценок* (valuation semantics) или *бивалентная* (bivalence) *семантика* (см. [da Costa, Vizziu and Otávio, 1996]). Если обычно функцией оценки является алгебраическая оценка, т.е. гомоморфизм алгебры формул в однотипную алгебру, то теперь это ограничение снимается и оценкой является просто функция, которая ассоциирует одно из двух бивалентных значений с каждой формулой, т.е. двузначные оценки рассматриваются как характеристические функции множеств формул. Имеется несколько способов доказательства того, что любая пропозициональная логика имеет бивалентную семантику.

Возвращаясь к проблематике алгебраической логики, подчеркнем, что ее аппарат является хорошим инструментом для выяснения такого сложного вопроса, как взаимоотношение между различными логическими системами, и вообще для уточнения статуса логики. О последнем говорит название книги П. Халмша и С. Гиванта «Логика как алгебра» [Halmos and Givant 1998], где показывается, что стандартные результаты в логике хорошо соотносятся с известными алгебраическими теоремами. Такой всеобъемлющий охват логики алгебраическими методами предсказывал еще выдающийся российский логик А.В. Кузнецов в блестящей статье «Алгебра логики» для Философской Энциклопедии [Кузнецов, 1960], но даже он не мог предвидеть необычайно широкую сферу деятельности алгебраической логики. В монографии «Алгебраические методы в философской логике» [Dunn and Hardegree, 2001] основное внимание сконцентрировано на теоремах представления как инструменте для доказательства теорем о полноте. Этот же самый инструмент является основным при изучении формальной феноменологии (!) в монографии В.Л. Васюкова [1999].

Основной вывод на сегодня таков: *законы логики есть не что иное как законы алгебры*. Все это происходит на фоне непомерного возрождения психологизма в логике в нашей стране. За последнее десятилетие издано большое число учебников и учебных пособий по логике, а также справочников по философии и даже энциклопедических изданий, содержащих статьи по логике, где утверждается (за редчайшим исключением)⁶, что логика изучает *законы мышления*. Однако не только математическое развитие логики, но и в некоторой степени философское развитие логики показывает, что нет больше законов мышления, отличных от законов алгебры (см. [Da Costa, Vizziu and Otávio, 1995, p. 121]). И с этим трудно не согласиться.

⁶ Этими исключениями, например, являются следующие учебные пособия по современной логике для гуманитариев: [Гладкий, 2001] и [Анисов, 2002].

Вообще, понятие философской логики противоречиво. С одной стороны, сюда относятся, как уже говорилось, все те логические исследования, которые не являются чисто математическими и как бы не имеют отношения к символической логике, понимаемой многими логиками-философами как «игра в символы». С другой стороны, современное развитие модальной логики, временной, интуиционистской и особенно многозначной, есть не что иное, как разделы символической логики: те же методы символизации и аксиоматизации и, главное, во многом те же чисто технические задачи и проблемы. Показательным здесь является построение новых теорий множеств на основе неклассических логик, являющихся по своему происхождению чисто философскими, а именно многозначные, модальные, релевантные, паранепротиворечивые теории множеств, при построении которых пытаются избежать следствий, вытекающих из теорем Гёделя. Особый интерес в связи с этим представляют паранепротиворечивые теории множеств (см., например, [Priest, 1979] и недавнюю работу [Daynes, 2000], где рассмотрена система Цермело–Френкеля с аксиомой выбора, но без аксиомы фундирования).

3. Основания логики

Теперь мы должны обратить внимание на главную тенденцию развития логики в конце XX и начале XXI века. Как сто лет назад остро встал вопрос об основаниях математики, так сейчас стоит вопрос об основаниях самой логики, в связи с чем обсуждаются следующие проблемы:

- (i) Что есть логическое следование?
- (ii) Что есть логические понятия (операции)?
- (iii) Что есть логическая система?
- (iv) Что есть логика?

Если обратиться к одному авторитетному изданию по истории и развитию логики [Kneale and Kneale, 1962, p. 1] (9-е издание в 1985 г.), то в нем можно найти следующее традиционное определение предмета логики: «Наука, которая исследует принципы правильных или приемлемых рассуждений». Однако такое определение оставляет полностью открытым вопрос о точной сфере данного предмета, т.е. о сфере действия логики. Для традиционной логики – это *силлогистические* рассуждения, и существует ровно 24 правильных силлогизма. В свою очередь, математическая логика исследует *математические* рассуждения: «Если... его исследования посвящены в первую очередь изучению математических рассуждений, то предмет его занятий может быть назван математической логикой» [Мендельсон, 1984, с. 7] (книга выдержала четыре издания на английском и три на русском языке). Неформальная логика изучает *неформальные* рассуждения, а философская логика, выходит, изучает *философские* рассуждения.

Чтобы избежать подобной бессмысленности, нужно выделить то ядро или те базовые понятия, с которыми данная наука имеет дело. Таким ядром несомненно является понятие *логического следования*.

Именно А. Тарский еще в 1936 г., как один из создателей современной логики, выделяет ее суть в работе с характерным названием «О понятии логического следования» (см. [Tarski, 1983]). Однако возникают чисто методологические проблемы: в каких терминах, или, как бы мы сейчас сказали, какова парадигма возможного ответа. Ответы на вопрос о сфере логики, о ее базисных понятиях, которыми оперирует и которые использует концепция логического следования, могут быть совершенно различными: теоретико-модельными, семантически теоретико-множественными, или теоретико-доказательными, или конструктивными, или комбинаторными, и т.д. Как мы увидим, ответ самого А. Тарского находится всецело в рамках семантического подхода: «Предложение X логически следует из предложений класса K , если и только если каждая модель класса K есть также модель предложения X » [Tarski, 1983, p. 417].

В последнее время концепция логического следования Тарского вызывает повышенный интерес, точнее, вокруг нее идет бурная дискуссия. Сама работа Тарского носит скорее философский, нетехнический характер и оставляет много места для различных конфликтующих интерпретаций. Некоторые считают определение Тарского с точки зрения современной математической логики неудовлетворительным [Corcoran, 1972], другие вообще его отвергают, как, например, Дж. Этчемэнд сначала в статье [Etchemendy, 1988], а затем в специально посвященной этой теме монографии [Etchemendy, 1990]. Интересный анализ работы Тарского предложен [Sagillo, 1997], который выделяет три основных концепции логического следования, каждое из которых охватывает важную сторону аргумента. Интересно заключение автора, что Тарский не говорит о том, что есть логическое следование, а скорее о том, на что логическое следование похоже. В защиту Тарского выступил Г.Рэй [Ray, 1996] (см. ответ ему в [Hanson, 1999]), а также М.Гомез-Торренте [Gómez-Torrente, 1996] (см. также [Gómez-Torrente, 2000]). Особый интерес представляет первая статья М.Гомеза-Торренте, где идеи Тарского анализируются в историческом логико-философском контексте, в котором они и были предложены.

Основные возражения против определения понятия логического следования Тарским следующие. Он нигде в данной работе не оговаривает, что предметная область должна варьироваться, как принято в современной логике (на это уже обращается внимание в [Corcoran, 1972, p. 43]; кстати, он же является редактором второго издания избранных трудов А.Тарского [Tarski, 1983]). Логические свойства, в частности общезначимость самого аргумента логиче-

ского следования, должны быть независимы от отдельно выбранного универсума рассуждений, в котором язык оказывается интерпретируемым. Иначе получается, что многие утверждения о мощности предметной области при преднамеренной интерпретации языка, которые могут быть выражены с помощью только логических констант, оказываются логическими истинами. Однако из более ранних и более поздних работ видно, что Тарский осознает термин «логика» так, что он исключает из логических истин любые утверждения о мощности индивидуальной области, пусть даже «логической». Другое возражение направлено против принятия Тарским ω -правила (правило бесконечной индукции) при формализации первопорядковой арифметики. Однако на самом деле имеется в виду лишь некоторая версия этого правила в простой теории типов в ее собственном виде. В связи с этими возражениями стоит сделать несколько общих замечаний.

Тарскому были хорошо известны работы Гёделя, как о полноте, где теорема доказывается исходя из истинности утверждений при всех возможных интерпретациях, так и о неполноте (ω -неполноте) первопорядковой арифметики. В первом случае устанавливается совпадение логического следования в первопорядковой классической логике (в дальнейшем РС) с синтаксическим следованием, во втором – нет. Из работ Тарского ясно следует, что он рассматривает логическое следование и дедуцируемость как различные понятия и первое значительно шире второго. Основной замысел Тарского состоял в том, чтобы дать определение логического следования, применимого для очень широкого класса языков, настолько широкого, что, как мы увидим далее, возникают проблемы уже другого уровня, относящиеся к вопросу о том, что есть логика?

А пока отметим, что понятие логического следования заняло центральное место в логике и потому все большее значение приобретает следующий вопрос: *Что значит для заключения A следовать из посылок Σ ?* Следующий критерий считается общепринятым: *A следует из посылок Σ , если и только если любой случай, в котором каждая посылка в Σ является истинной, есть случай, в котором A истинна.* Обратим внимание, что выдающийся российский логик А.А.Марков связывает этот принцип с определением того, что есть логика: «Логика можно определить как науку о хороших способах рассуждения. Под "хорошими" способами рассуждения при этом можно понимать такие, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты» [Марков, 1984, с. 5]. В итоге сутью логического следования является сохранение истины во всех случаях. Имеется много путей, когда, используя понятие логического следования, данного Тарским, можно представить общезначимыми все законы РС. При этом мы получаем стандартное определение самой классической логики вкупе со всеми ее логическими операциями. Например, конъюнкция двух формул $A \wedge B$

истинна при ситуации (в возможном мире) w , если и только если A истинна в w и B истинна в w .

Но тут возникает еще больше вопросов. На каком основании полученную логику мы называем классической и что это значит? К этому вопросу мы еще вернемся. Что означает стандартное задание истинностных условий для логических связок? И, наконец, что считать логическими операциями? Понятие истины напрямую связано с пониманием логического следования, данного Тарским, а это, в свою очередь, приводит к объектам, которые мы называем «логическими законами»: последние суть *сохраняющие истину выводы*. Но как мы можем дать определение логического закона, не определившись с тем, что считать логическими константами (операциями), – и это при естественной изменчивости и нестабильности самих нелогических объектов действительности. Если все считать логическими терминами: переменные, числа, кактусы и т.д., – тогда теоретико-модельная интерпретация каждого термина зафиксирована и, следовательно, существует только одна модель. Это сделало бы понятие логической истины бессодержательным.

В работе «О понятии логического следования» Тарский оставляет открытым вопрос о том, что считать логическими понятиями (операциями), а что экстра-логическими. Здесь он сообщает, что никакого объективного основания ему не известно для строгого разграничения этих двух групп терминов (см. [Tarski, 1983, p. 418]). Очевидно, что эта проблема не давала покоя Тарскому, и через тридцать лет он возвращается к ней в лекции «Что есть логические понятия?», прочитанной в 1966 г. в Лондонском Bedford College, затем в том же году на Юбилейной сессии в Тбилиском государственном университете, а позже, в 1973 г., в SUNY Buffalo (США). Доклад опубликован уже после смерти Тарского в 1983 г. (см. [Tarski, 1986]). Основная идея заключается в том, что логические понятия (операции) должны быть инвариантны относительно подходящей группы преобразований области рассуждений. Тарский расширяет сферу применения Эрлангерской программы Ф.Клейна, где предложена классификация различных геометрий соответственно трансформациям пространства, относительно которых геометрические понятия инвариантны. Например, понятия метрической геометрии Эвклида инвариантны относительно изометрических трансформаций. Также алгебра может рассматриваться как изучение понятий, инвариантных относительно автоморфизмов таких структур, как кольца, поля и т.д. Тогда, по Тарскому, логическими понятиями являются те, которые инвариантны относительно любых *взаимнооднозначных* преобразований универсума на себя, т.е. относительно любых перестановок универсума рассуждений (предметной области). В неявном или почти явном виде идея инвариантной перестановочности уже содержалась в различных работах: логико-математических (впервые

[Mostowski, 1957]), лингвистических (см. [Keenan and Stavi, 1986] и [Van Benthem, 1989], философских (см. [Peacocke, 1976], [McCarthy, 1981] и [Simons, 1988]), а также в ряде статей в сборнике с весьма актуальным названием «Границы логики» [Shapiro (ed.), 1996]. Тезис Тарского явился основой с некоторой естественной модификацией для определения логичности, данного в книге Г.Шер [Sher, 1991, p. 53] опять же о границах логики: операция является логической, если она инвариантна относительно каждой биекции между областями.

Наконец в работе [McGee, 1986] показано, что если тезис Тарского принимается, то логическими операциями являются в точности те, которые определяются в полном (full) инфинитарном языке $L_{\infty, \infty}$ (в этой же работе рассматривается и обобщение Шер, т.е. дается характеристика логических операций относительно изоморфной инвариантности). Напомним, что язык $L_{\infty, \infty}$ есть язык обычной первогопорядковой логики с равенством (язык Фреге), но допускает конъюнкции и дизъюнкции произвольной длины, а также произвольной длины последовательности кванторов всеобщности и существования. Язык этот очень богат – в него погружается вся второепорядковая логика. Последняя разрешает квантификацию по произвольным функциям, определенным на области рассуждения, точно так же как обычную квантификацию по элементам из этой области. Поскольку множества и отношения могут быть представлены их характеристическими функциями, то второепорядковая логика охватывает также квантификацию по произвольным множествам и отношениям. Не только арифметика, но и теория множеств становится *частью* второепорядковой логики (натуральные числа, множества, функции и т.д. являются логическими понятиями), а значит и вся (или почти вся) теоретико-множественная проблематика, включая континуум-гипотезу и много других важных математических утверждений, погружается во второепорядковую логику (см. монографию [Manzano, 1996]). Таким образом, *математика есть часть логики*. В зависимости от выразительных средств новой логики мы приходим к логике натуральных чисел, логике действительных чисел, логике топологических пространств и т.д. Все это мы назвали бы *новым логицизмом*.

В связи с этими вопросами особый интерес представляет статья С. Фефермана [Feferman, 1999a], в которой он критикует тезис Тарского-Шер, выдвигая в качестве возражения то, что происходит ассимиляция математики логикой. Однако главное его возражение заключается в том, что тезис Тарского-Шер не дает никакого естественного объяснения тому, как логические операции ведут себя на предметных областях различного размера. Поэтому Феферман вводит понятие операций, которые *гомоморфно инвариантны* на функционально-типовых (functional-type) структурах. Именно такие операции, по Феферману, являются логическими и, самое примечательное, они в точности совпадают с операциями

первопорядковой логики без равенства. Правда, здесь опять возникает проблема, считать или нет равенство логической операцией? Обсуждение этого вопроса можно найти у Куайна [Quine, 1986, pp. 61 ff.]. Он склоняется к положительному ответу, в качестве довода (кроме всего прочего) приводя дедуктивную полноту первопорядковой логики с равенством. Достоинством своего подхода Феферман считает то, что операции **PC** определимы в терминах гомоморфно инвариантных операций одноместного типа. При этом он ссылается на обзор [Keenan and Westerstehl, 1997], где показана центральная роль одноместных предикатов в человеческом мышлении на примере естественного языка.

Было бы странным, если бы только в 1999 г. дали точную характеристику **PC** в терминах ее операций. На самом деле уже в 60-е годы А.В. Кузнецовым была обобщена теорема о функциональной полноте логики высказываний на предикатный случай. К сожалению, это доказательство не опубликовано по сей день. Значительно позже эта теорема была доказана Дж.Цукером (см. [Zucker, 1978]), т.е. показано, что определенное множество логических операций адекватно как для **PC**, так и для **PC(=)**. Причем предпочтение отдается **PC(=)**. Автор исходит из основного допущения, что для того чтобы считаться логической операцией, ее «значение» должно полностью содержаться в аксиомах и правилах вывода. Таким образом, в отличие от семантического подхода Тарского-Шер-Фефермана для характеристики логических операций использован теоретико-доказательный подход.

Характеризация логических операций ведет к характеристике *самой логики*. Однако характеристику **PC** можно дать в терминах фундаментальных теоретико-модельных свойств теории *T* в первопорядковом языке. Этими свойствами являются:

Теорема компактности (для счетных языков). Если каждое конечное множество предложений в T имеет модель, то T имеет модель.

Компактность имеет место, поскольку во всех выводах используется только конечное множество посылок. Это свойство было выявлено уже К. Гёделем в работе о полноте **PC** (1930 г.). Ранее были доказаны еще два свойства первопорядковой логики.

Теорема Лёвенгейма–Скулема о спуске. Если T имеет какую-нибудь модель, то T имеет и счетную модель.

Теорема Лёвенгейма–Скулема о подъеме. Если T имеет бесконечную модель, то T имеет и несчетную модель.

Понадобилось довольно-таки продолжительное время, пока П.Линдстрём [Lindström, 1969] установил, что эти свойства являются характеристическими для **PC** в следующем смысле:

Теорема Линдстрёма. *Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно \wedge , \neg , \exists и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма–Скулема.*

Эта работа стала парадигмальной для важнейших исследований в логике последней четверти XX века. По существу теорема Линдстрёма дает определение первопорядковой логики, на самом деле $\mathbf{PC}(=)$, в терминах ее глобальных свойств. Но из этих свойств следует серьезное ограничение на выразительные средства первопорядковой логики. Наиболее простой бесконечной математической структурой являются натуральные числа и наиболее фундаментальным математическим понятием является понятие *конечности*. Однако из теоремы компактности следует, что такие центральные понятия, как конечность, счетность, вполне-упорядоченность и т.д., не могут быть определены в первопорядковой логике. На самом деле, конечное не различимо от бесконечного. В свою очередь, из теоремы Лёвенгейма–Скулема следует, что первопорядковая логика не различает счетность и несчетность и отсюда никакая бесконечная структура не может быть охарактеризована с точностью до изоморфизма. Более того, многие лингвистические понятия, дистинкции и конструкции выходят далеко за сферу применения \mathbf{PC} (см. [Muskens, 1995], [Lcunning, 1996]).

Имеется много интересных логик, которые богаче первопорядковой логики, такие, как *слабая логика второго порядка*, которая пытается построить понятие *конечного* в логике некоторым естественным образом (разрешается квантификация по конечным множествам); логики с различными *экстра-кванторами* типа «существует конечно много», «существует бесконечно много», «большинство» и т.д.; логики с формулами бесконечной длины; логики высших порядков⁷. Однако не имеет значения, как мы будем расширять первопорядковую логику – в любом случае теряются или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма–Скулема, или оба вместе, а также интерполяционное свойство и в большинстве случаев дедуктивная полнота. Но вот Г. Булос [Boolos 1975], защищая второпорядковую логику, спрашивает: почему логика обязательно должна обладать свойством компактности? Интересно, что в 1994 году на страницах «The New Encyclopedia Britannica» спрашивается, почему свойство Лёвенгейма–Скулема должно соответствовать внутренней природе логики? (Vol. 23, p. 250).

⁷ Интересно, что статья о логике высшего порядка [Van Benthem and Doets 1983] попала не в «Справочник по математической логике» [Барвайс (ред.) 1982], а в первый том «Справочника по философской логике». Интерес к логике высших порядков, объясняют авторы, в основном исходит из (логистической) проблемы оснований математики и из разработки формальной семантики естественного языка (Р.Монтегю).

Построение различных расширений **PC**, особенно логик с обобщенными кванторами, в последние десятилетия привлекло к себе большое внимание лингвистов, математиков, философов, когнитологов. Некоторым итогом развития этого направления является фундаментальный труд «Модельно-теоретические логики» [Barwise and Feferman (eds.) 1985], где Дж. Барвайс приходит к следующему выводу: «Нет обратной дороги к точке зрения, что логика является первопорядковой». Этому же мнению придерживаются С. Шапиро и Г. Шер (см. [Shapiro, 1991] и [Sher, 1991]).

Однако второпорядковая логика является слишком сложной и порой с ней трудно справляться. Второпорядковые логики не являются рекурсивно перечислимыми дедуктивными системами. Основные проблемы в них возникают с логическими истинами. Например, появляются утверждения, которые логически истинны тогда и только тогда, когда имеет место обобщенная континуум гипотеза. Все эти трудности и многие другие являются неизбежным следствием огромной мощности выразительных средств второпорядковых языков. Поэтому неудивительно, что появились и появляются ослабления второпорядковой логики, а в новом HPL опубликована статья «Системы между первопорядковой и второпорядковой логикой» [Shapiro, 2001]. Ослабления могут достигаться за счет ограничительных версий понимания схем (Σ_1^1 формулы и Π_1^1 формулы), ограничения на аксиому выбора и ограничения на принцип индукции для арифметики и т.д. Также хорошо известна монадическая второпорядковая логика. Как правило, большинство из этих новых языков характеризует понятие «конечности» и разрешает категоричную характеристику натуральных чисел. Таким образом, дедуктивная неполнота является характеристическим свойством этих систем.

Видимо, одной из наиболее интересных работ в этой области является статья Я.Хинтикки [Hintikka 1994], а также статья с громким названием «Революция в логике?» [Hintikka & Sandu 1996], и вообще целый комплекс работ Хинтикки, связанный с применением созданной им **IF-логики** (Independence Friendly – дружественной к независимости). Основная идея Хинтикки состоит в осознании того, что кванторы обычной первопорядковой логики являются *зависимыми*. Последнее означает, что если мы имеем дело с выражениями типа «для всех x имеются некоторые y , такие, что $R(x,y)$ », то выбор подобных y не независим, а детерминирован выбором x -ов, иначе говоря, между x и y существует некоторая функциональная зависимость. Особенностью **IF-логики** является ее неполнота, что означает невозможность дать список аксиом, из которых все значимые формулы первопорядковой **IF-логики** могут быть выведены по чисто формальным правилам. Но в то же время она удовлетворяет свойствам компактности и Лёвенгейма–Скулема (о свойствах **IF-логики**, а также ее достоинствах и недостатках см. также [Sandu, 1998], [Eklund and Kolak, 2002]).

Видимо, стоит согласиться с Дж. ван Бентемом и К.Дэтсом [Van Benthem and Doets, 1983, p. 326], что никакая специфическая логическая теория не является *священной*. Это можно считать ответом на статью А.Царпа «Какая логика является верной логикой?» [Tharp, 1975].

Однако тематика абстрактной логики и общетеоретические проблемы обоснования математики несколько отстают перед новыми тенденциями в развитии логики конца XX века. Логика становится все более насущной в компьютерных науках, искусственном интеллекте и программировании. Подобное приложение логики порождает большое число новых логических систем, но уже нацеленных непосредственно на их практическое применение. Именно этим и обусловлен выход сборника статей (в Англии и через год в США) под названием «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.), 1994].

Вообще-то говоря, вопрос стоит так: существует ли одна «истинная» логика, а если нет, то как ограничить наше понимание логики или, более конкретно, логической системы? Возникают и другие вопросы: существует ли реальное различие между синтаксисом и семантикой с точки зрения приложений? И, конечно, стоит вопрос о традиционных свойствах логических систем: полноте, устранении сечения, интерполяционном свойстве и др.

Еще больше проблем возникает с расширением или сужением классической пропозициональной логики. Оказывается, логик (логических систем) не просто много, а *континуально* много. Первый результат подобного рода принадлежит российскому логичу В.А. Янкову [1968] и касается мощности класса расширений интуиционистской логики. В свое время этот факт даже не был сразу осознан со всеми вытекающими отсюда последствиями. Сейчас открытие континуального класса логик – самое заурядное дело.

Необычайное многообразие логических систем, порождаемое, с одной стороны, серьезной критикой «основных» и не только основных законов логики высказываний, с другой стороны, почти неограниченным расширением понятия логической истины (по существу процесса обратного первому), а также различными спецификациями понятия логического следования и развитием компьютерных наук, – все это подводит нас к самому главному вопросу: ***Что есть логика?***

Интересно замечание Р.Джеффри в книге с весьма примечательным названием «Формальная логика: ее сфера и ее границы» [Jeffery, 1991], что данное Тарским определение логического следования не позволяет нам выяснить, что такое логика, поскольку должны приниматься во внимание *случаи*, включенные в определение логического следования. Мы можем специализировать случаи как «возможные миры», но тогда возникает сложнейший круг проблем, связанный с выяснением вопроса, что это за сущности

такие «возможные миры» (см. интересную монографию [Bradley and Swartz, 1978]). Более того, наши *случаи* могут рассматриваться как ситуации в смысле Дж. Барвайса и Дж. Перри [Barwise and Perry, 1983]. Ситуации могут рассматриваться не только как *неполные* части мира, но как противоречивые, а также одновременно как неполные и противоречивые. И тогда в результате получаем совершенно новые логики, принципиально отличные от классической, такие как интуиционистская, релевантная, паранепротиворечивая, параклассическая и т.д.

Если сутью логики является сохранение истины во всех случаях, то различные *логики* получаются различными экспликациями этих случаев. Отсюда появился подход в логике, названный «логическим плюрализмом» (см. [Beall and Restall, 2000])⁸. На самом деле, логический плюрализм в логике появился задолго до того, как обратились к серьезному анализу того понимания логического следования, которое было предложено А.Тарским, а именно с критики основных законов логики, предпринятой в начале XX века Л.Брауэром, Н.А.Васильевым и Я. Лукасевичем. К тому же понимание логики имело и совсем другую традицию, весьма отличную от Тарского и идущую от Г.Фреге и Б.Рассела.

Определение логики, данное Фреге, необычайно красиво: «Логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины» (см. [Фреге, 2000, с. 307])⁹. Может показаться удивительным, что такое понимание логики продержалось почти сто лет и с некоторой модификацией вошло в основание уже упоминавшейся книги У. Куайна «Философская логика», где предметом логики, напомним, является «систематическое изучение логических истин». Этот почти столетний период подобного осознания задачи логики был назван М.Дамметтом «логицистическим засильем». И есть весьма веские основания в смене парадигмы, ставшей, в первую очередь, результатом развития компьютерных наук.

Стоит заметить, что традиционный подход к пониманию логики весьма подкупает тем, что логике в нем можно попытаться определить посредством совокупности логических законов, ее задающих. С современной точки зрения «логический закон» – это «теорема формальной системы». Не вдаваясь в детали того, что такое формальная система и доказательство в ней, ограничимся тем пониманием, которое уже было дано: законы логики *с необходимостью* сохраняют истинность. Такое понимание законов логики восходит еще к Аристотелю, но тут мы сталкиваемся с вопросом необычайной сложности: что есть истина? В конечном счете мы можем попытаться договориться, что толковать под логическими законами относительно того или иного понимания

⁸ Создан интернетовский проект «Логический плюрализм» с участием Г.Ресталла (<http://pluralism.pitas.com/>).

⁹ При этом Фреге ссылается на свою неуклюжесть и беспомощность языка.

истины. Различные концепции истины, например, корреспондентная, когерентная или прагматическая не диктуют специфичности той или иной логики. Но уже случай с интуиционистским пониманием того, что есть истина, говорит о непримиримости позиций. В первых интерпретациях интуиционистской логики (до появления крипковской семантики) понятие истины вообще не возникает. К тому же мы опять сталкиваемся с проблемой определения логического закона, не определившись с тем, что считать логическими константами (операциями). Как мы видели, расширение классической первопорядковой логики приводит к тому, что множество логических истин в лучшем случае не является конечно аксиоматизируемым.

Ровно через сто лет после выхода в свет знаменитой работы Г.Фреге «Исчисление понятий» (1879) (см. [Фреге, 2000]), в которой вводятся предикаты, отрицание, условная связь (the conditional) и кванторы как основа логики, а также идея формальной системы, в которой демонстрации должны осуществляться посредством явно сформулированных синтаксических правил, – после ста лет триумфального развития логики как самостоятельной науки, вызывающей поклонение, удивление, а порой горькое отрешение и даже мщение у ее бывших адептов и мистический страх у большинства остальных, вдруг появляется статья Я.Хэкинга под названием «Что есть логика?» [Hacking, 1979]. Хэкинг высоко оценивает введение Г.Генценом структурных правил, работа с которыми позволяет выражать те аспекты логических систем, которые не имеют непосредственного отношения к логическим константам¹⁰. Именно представление и развитие логики в виде секвенциального исчисления, где принципы дедукции задаются правилами, позволяющими переходить от одних утверждений о выводимости к другим, позволило Хэкингу определить логику как науку о дедукции¹¹. Не случайно статьей Хэкинга открывается уже упоминавшийся нами сборник работ под названием «Что есть логическая система?» [Gabbay (ed.), 1994]. В этом же сборнике публикуется статья Дж.Ламбека под названием «Что есть дедуктивная система?» [Lambek, 1994], в которой выделяются *пять* стилей дедуктивных систем: (1) гильбертовский (дедукция вида $f: \rightarrow B$, для формулы B); (2) стиль Ловера ($f: A \rightarrow B$, для формул A и B); (3) генценовский интуиционистский стиль ($f: A_1 \cdots A_m \rightarrow B$); (4) генценовский классический стиль ($f: A_1 \cdots A_m \rightarrow B_1 \cdots B_n$), и (5) стиль Шютте (Schütte) ($f: \rightarrow B_1 \cdots B_n$). Сам Ламбек отдает предпочтение генценовским стилям в силу введения структурных правил. Отметим, что Ламбек уделяет особое внимание равенствам между выводами. В связи с этим обратим внимание на работу

¹⁰ Это важное открытие сделано Г.Генценом в 1935 г. См. [Генцен, 1967].

¹¹ Заметим, что именно такому пониманию логики посвящена вся книга В.А.Смирнова [1972] (переиздана в 1999 г.)

Г. Минца [Минц 1977], где строится дедуктивная система **НСС** гильбертовского типа, в которой определяется отношение эквивалентности для выводов. Это превращает **НСС** в замкнутую категорию: объектами являются формулы, а морфизмами – классы эквивалентности выводов. Подобный подход к теории доказательств стал особенно актуальным под влиянием теории категорий и компьютерных наук.

4. Компьютеризация логики

В. Карниелли в рецензии на [Gabbay (ed.) 1994] выдвигает *основное* предположение: «Нет доказательств, нет логики» [Cagnelli, 1996, p. 6417]. Именно теория доказательств в последнее время все больше привлекает к себе внимание (см., например, двухтомник [Schwichtenberg and Troelstra, 2000]). В это же время появляется сайт «Теория доказательств накануне 2000 г.», созданный С. Феферманом [Feferman, 1999b], где сформулировано 10 проблем, на которые поступают ответы ведущих логиков, работающих в данной области.

Однако в последней четверти XX в. теория доказательств претерпела значительные изменения и напрямую стала применяться в компьютерных науках. Мы имеем здесь в виду *автоматический поиск доказательств*. В нашей стране исследования в этой области с 60-х годов проводились группой Ю. М. Маслова. Классической монографией по автоматическому доказательству, переведенной на русский язык, стала книга [Chang and Lee, 1973], в которой развивается *метод резолюций* для первопорядковой логики (см. также монографию [Gallier, 1986]).

В течение двух последних десятилетий многие теоретические идеи автоматического доказательства были воплощены в компьютерных программах, так называемых *пруверах*. Эти программы осуществляют поиск выводов в различных логических исчислениях. Так, в середине 80-х годов в Аргоннской Национальной Лаборатории в США был создан резолютивный прuver OTTER для первопорядковой логики, его описание находится в [McCune, 1994]. И по сей день его создатели работают над развитием программы и увеличением быстродействия ее отдельных участков. В 90-х годах появился SCOTT (см. отчет [Slaney, 1992]) – программа австралийского Проекта Автоматического Доказательства, надмножество OTTER, позволяющая использовать в процессе построения выводов семантические ограничения и тем самым существенно сократить время работы программы.

Отечественные логики, сотрудники философского факультета МГУ и Института философии РАН, создали свой интерактивный прuver DEDUCTIO, который подробно изложен в [Смирнов и др., 1996]. Отличительным достоинством DEDUCTIO является широкая область его возможного использования: аксиоматический

вывод, натуральный, аналитико-табличный. Имеется сайт с библиографией по прuverам, созданный в Канаде (1997-2001), содержащий более 3000 ссылок¹².

Применение логики в компьютерных науках стало настолько широким, что можно говорить о главном феномене развития логики конца XX в. Уже в 70-е годы появился термин «Вычислительная логика», а затем и «Компьютерная логика».

Особая тема – создание искусственного интеллекта¹³. В книгах [Turner, 1984] и [Dix, Del Cerro and Furbach, 1998] предлагаются различные нестандартные логики для искусственного интеллекта. Логическому подходу к искусственному интеллекту посвящено две книги (но с разными подзаголовками) на французском языке в 1988 г. и 1989 г. (см. соответственно переводы на рус. язык: [Тейз, Грибомон, Луи и др., 1990] и [Тейз, Грибомон, Юлен и др., 1998]). О логико-философском подходе к искусственному интеллекту см. сборник статей [Thomason (ed.), 1989]. Обратим внимание на многочисленные справочники (укажем только последние тома: [Abramsky, Gabbay and Maibaum (eds.), 1995] и [Gabbay, Hogger and Robinson (eds.), 1998]).

Создание искусственного интеллекта (в дальнейшем ИИ) от навязчивой идеи перешло в плоскость серьезного обсуждения и фундаментальной проблемой, дискутируемой сейчас, является следующая: может ли реально логика стать основанием ИИ? Здесь надо иметь в виду, что логическая дедукция является дискретным процессом, чего нельзя однозначно сказать о человеческом мышлении. Имеются сторонники *сильной* концепции ИИ (механисты), утверждающие, что человеческий мозг (разум) может быть точно смоделирован цифровым компьютером или машиной Тьюринга. С наиболее известной критикой против механистов выступил Дж. Лукас [Lucas, 1961] в философской статье, неоднократно переизданной. Лукас в основном опирается на теоремы Гёделя о неполноте, утверждающих существование абсолютно неразрешимых арифметических предложений, т.е. таких, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Этим, по Лукасу, существенно ограничивается вычислительная сфера деятельности машин. Дж. Вебб в своей книге [Webb, 1980] апеллирует к эффективности результата Гёделя, заключая, что Гёдель «впервые установил ... что из высказывания “Я могу найти ограничения в любой машине” несомненно следует, что Я не машина». К ним также присоединился известный физик и космолог Р. Пенроуз [Penrose, 1989] (книга переведена на русский язык в 2003 г.), который, кроме всего прочего, включая и

¹² <http://www.ora.on.ca/biblio/biblio-prover-html>.

¹³ В 1979 г. основана Американская Ассоциация по Искусственному Интеллекту, издающая свой журнал “Artificial Intelligence” и проводящая ежегодные международные конференции, симпозиумы и школы-семинары (<http://www.aaai.org/>).

физические аргументы, опирается также на неразрешимость проблемы разрешимости для массовых проблем, т.е. на отсутствие в принципе единого алгоритма для решения математических задач (доказано А.Тьюрингом в 1937 г., а затем А.Чёрчем в 1941 г.) Лукас и Пенроуз аргументируют, что есть человеческие процедуры (методы вычисления), которые не могут быть смоделированы машиной Тьюринга. Но если сила человеческого разума превосходит любую машину, тогда он каким-то образом постигает истину, не доступную машине. Так считает и Гёдель в своих неопубликованных работах (см. [Wang, 1974, pp. 324-326] и [Wang, 1996], а также третий том работ самого Гёделя [Gödel, 1995]). Однако проблема заключается в том, чтобы представить в явном виде примеры подобных вычислительных процессов.

Существует большая литература содержащая критику позиции Лукаса–Пенроуза (см., например, [Minsky, 1968], а также книгу Д. Хофштадтера [Hofstadter, 1979], привлекшую большое внимание и переведенную на рус. язык в 2001 г.). Через три с лишним десятилетия Лукас [Lucas, 1996] усиливает, или пытается усилить, свою позицию, а Пенроуз в новой книге [Penrose, 1994] посвящает более 200 стр. ответам своим критикам и изобретению весьма интригующих аргументов. Интересно, что как механисты, так и антимеханисты понимают и принимают силу и универсальность ограничительных теорем Гёделя. Но создается несколько парадоксальное впечатление, что для первых это означает ограниченность человеческих вычислительных способностей, а для вторых наоборот: вычислительные способности человека намного «сложнее» машины и, главное, человек оперирует с абстрактными объектами (см. [Kreisel, 1972]). Особо обратим внимание на недавнюю работу профессионального логика С. Шапиро [Shapiro, 1998], где обстоятельно анализируются аргументы противоборствующих сторон. Здесь отмечается, что расширение вычислительных возможностей человека ведет к тому, что он становится не только *непогрешимым*, но и *всеведущим*. Если вспомнить, какая ожесточенная дискуссия шла в Средние века (и продолжается сейчас на Западе) относительно совместимости догматов о всеведении Бога и свободы воли человека, то понятно, какой тяжкий груз проблем придется решать. Наконец, приведем интересное рассуждение П. Бенаккеррафа в статье «Бог, дьявол и Гёдель» [Benacerraf, 1967]. Если идеализированные версии человеческих существ есть машины Тьюринга, тогда они не в состоянии выполнить сократовский призыв: «Познай самого себя». Если идеальный человек есть машина Тьюринга, то он не сможет знать, которой из машин Тьюринга он является (в силу тезиса Чёрча–Тьюринга все машины Тьюринга тем более эквивалентны). Отсюда возникает классическая проблема о границах человеческого познания и, конечно, опять же о границах логики.

Между рассуждениями искусственного интеллекта и рассуждениями человеческого интеллекта лежит целая пропасть. По всей видимости, преодолеть эту пропасть невозможно, но именно на этом бесконечном пути преодоления лежит магистральное развитие логики, основная функция которой – *аппроксимация* различных способов человеческих рассуждений. Предельным случаем аппроксимации, и пока наиболее эффективным и плодотворным, как раз и является формализованный дедуктивный метод, доведенный до степени компьютерных программ.

Существуют, конечно, и развиваются другие методы аппроксимации: гипотетико-дедуктивный, индукция и абдукция, формализация правдоподобных рассуждений (см. [Финн, 1988]). В последнее время бурно развиваются *немонотонные логики*¹⁴ и различные теории *аргументации* (отметим только работу [Финн, 1996b] как наиболее приближенную к формально-логическому моделированию).

Однако все-таки будущее за компьютеризацией логики и ее применением в компьютерных науках и информатике. Тем более что мы еще не знаем полностью, чего можно ждать от принципиально новых компьютеров: квантовых, нейронных и др. Обратим внимание на весьма примечательный факт. В 1960 г. нобелевский лауреат Е.П. Вигнер написал статью о труднообъяснимой эффективности математики в естественных науках, как бы подтверждая слова Галилея о том, что «книга природы написана на языке математики». Нечто подобное справедливо для отношения логики к computer science. В настоящее время концепции и методы логики занимают одно из центральных мест здесь и она может быть даже названа исчислением computer science. Как раз статья шести американских логиков [Halpern *et al.*, 2001], вышедшая в начале нового века, посвящена этой теме.

В предисловии Д. Габбая к каждому тому нового HPL справедливо отмечается, что предыдущий «Справочник по философской логике» стал библией для логического сообщества. Основная интенция нового издания состоит в том, чтобы в наиболее полной мере отразить исключительное значение логики в компьютерных науках, в разработке формализованных (вычислительных) языков типа комбинаторной логики и λ -исчислений и в искусственном интеллекте. Габбай предсказывает, что недалек тот день, когда ученый в области компьютерных наук проснется с осознанием

¹⁴ Немонотонные рассуждения, в отличие от классических, интуиционистских, классически-модальных и т.д., позволяют адекватно оперировать с не полной и изменяющейся информацией. С 1994 г. проводится Международная школа-семинар по немонотонным рассуждениям (<http://www.medg.lcs.mit.edu/nm/>). Отметим большой обзор [Brewka, Dix and Konolige, 1995] и монографии [Antoniou and Williams, 1997] и [Bochman, 2001].

того, что его профессиональный род деятельности принадлежит формальной философии.

ЛИТЕРАТУРА¹⁵

- [Анисов, 2002] А. М. Анисов. *Современная логика*. М.: ИФ РАН, 2002.
- [Бажанов 1995]. В. А. Бажанов. *Прерванный полёт. История «университетской» философии и логики в России*. М.: МГУ, 1995.
- [Барвайс (ред.), 1982] Под ред. Д. Барвайса. *Справочная книга по математической логике*. В 4-х частях. М.: Наука, 1982.
- [Васюков, 1999] В. Л. Васюков. *Формальная феноменология*. М.: Наука, 1999.
- [фон Вригт, 1992] Г. Х. фон Вригт. Логика и философия в XX веке // *Вопр. философии*, 8: 80-91, 1992.
- [Генцен, 1967] Г. Генцен. Исследование логических выводов // Г. Генцен. *Математическая теория логического вывода*. М.: Наука, 1967.
- [Герасимова (ред.), 2003] Под ред. И. А. Герасимовой. *Мысль и искусство аргументации*. М.: Прогресс-Традиция, 2003.
- [Гладкий, 2001] А. В. Гладкий. *Введение в современную логику*. М.: МЦНМО, 2001.
- [Гончаров, Ершов и Самохвалов, 1994] С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов и К. Ф. Самохвалов. *Введение в логику и методологию науки*. М.: ИНТЕРПРАКС, 1994.
- [Есенин-Вольпин, 1993] А. С. Есенин-Вольпин. Об антитрадиционной (ультраинтуиционистской) программе оснований математики и естественнонаучном мышлении. *Семиотика и информатика*, 33: 13-67, 1993. (Переиздано в: А. С. Есенин-Вольпин. *Философия. Логика. Поэзия. Защита прав человека: Избранное* / Сост.: А. Ю. Даниэль, С. М. Лукашевский, В. К. Финн; Под общ. ред. В. К. Финна и А. Ю. Даниэля. М.: РГГУ, 1999).
- [Зиновьев, 2003] А. А. Зиновьев. Комплексная логика // *Вопр. философии*, 1: 29-37, 2003.
- [Карпенко, 1990] А. С. Карпенко. *Фатализм и случайность будущего. Логический анализ*. М.: Наука, 1990.
- [Карпенко, 2000] А. С. Карпенко. Логика на рубеже тысячелетий // *Логические исследования*, 7: 7-60. М.: Наука, 2000.
- [Карпенко, 2001] А. С. Карпенко. Логика в России // *Новая Философская Энциклопедия*. Т. 2. С. 409-414. М.: Мысль, 2001.
- [Кузнецов, 1960] А. В. Кузнецов. Алгебра логики. *Философская Энциклопедия*. Т. 1. С. 33-38. М.: Мысль, 1960.
- [Марков, 1984] А.А. Марков. *Элементы математической логики*. М.: МГУ, 1984.
- [Мендельсон, 1984] Э. Мендельсон. *Введение в математическую логику*. М.: Наука, 1984.

¹⁵ За образец составления использованной литературы (ссылки) взято новое издание “*Handbook of Philosophical Logic*”.

- [Минц, 1977] Г. Е. Минц. Замкнутые категории и теория доказательств // Г. Е. Минц и В. П. Оревков (ред.) *Теоретическое применение методов математической логики*. П. С. 83-114. Ленинград, Наука, 1977. (Англ. пер.: Closed categories and the theory of proofs // G. Mints. *Selected Papers in Proof Theory*. P. 183-212. Bibliopolis and North-Holland, 1992).
- [Перминов, 2001] В. Я. Перминов. *Философия и основания математики*. М.: Прогресс-Традиция, 2001.
- [Подниекс, 1992] К. М. Подниекс. *Вокруг теоремы Гёделя*. Рига: Зинатне, 1992. (Расширенный перевод книги на англ. языке имеется на сайте <http://www.ltn.lv/~podnieks/gt.html>).
- [Смирнов, 1972] В. А. Смирнов. *Формальный вывод и логические исчисления*. М.: Наука, 1972. (Переиздано с комментариями: В. А. Смирнов *Теория логического вывода*. С. 16-233. М.: РОССПЭН, 1999).
- [Смирнов и др., 1996] В. А. Смирнов, В. И. Маркин, А. Е. Новодворский и А. В. Смирнов. *Доказательство и его поиск*. В сер. «Логика и компьютер». Вып. 3. М.: Наука, 1996.
- [Смирнова 1986] Е. Д. Смирнова. *Логическая семантика и философские основания логики*. М.: МГУ, 1986.
- [Тарский, 1999] А. Тарский. Понятие истины в языках дедуктивных наук // *Философия и логика Львовско-Варшавской школы*. С. 19-155. М.: РОССПЭН, 1999.
- [Тейз, Грибомон, Луи и др., 1990] А. Тейз, П. Грибомон, Ж. Луи и др. *Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию*. М.: Мир, 1990.
- [Тейз, Грибомон, Юлен и др., 1998] А. Тейз, П. Грибомон, Г. Юлен и др. *Логический подход к искусственному интеллекту: От модальной логики к логике баз данных*. М.: Мир, 1998.
- [Финн, 1988] В. К. Финн. Правдоподобные выводы и правдоподобные рассуждения // *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика*, 28: 3-84. М.: ВИНТИ, 1988.
- [Финн, 1996а] В. К. Финн. Неологицизм – философия обоснованного знания // *Вопр. философии*, 8: 89-99, 1996. (Переиздано в [Финн, 2001. С. 22-37]).
- [Финн, 1996б] В. К. Финн. Об одном варианте логики аргументации // *Научно-техническая информация*. Сер. 2, N 5-6: 3-19, 1996. (Переиздано в [Финн, 2001. С. 206-251]).
- [Финн, 2001] В. К. Финн. *Интеллектуальные системы и общество*. Сборник статей. М.: РГГУ, 2001.
- [Фреге, 2000] Г. Фреге. *Логика и логическая семантика*. М.: АСПЕКТ ПРЕСС, 2000.
- [Шуман, 2001] А. Н. Шуман. *Философская логика: Истоки и эволюция*. Минск : ЭКОНОМПРЕСС, 2001.
- [Янков, 1968] В. А. Янков. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // *Доклады Академии Наук СССР*, 181: 33-34, 1968.

- [Abramsky, Gabbay and Maibaum (eds.), 1995] S. Abramsky, D. M. Gabbay and T. S. E. Maibaum (eds). *Handbook of Logic in Computer Science*. Vol. IV. *Semantic Modelling*. Oxford: Oxford Science Publications, 1995.
- [Andrůka, Nřmeti, and Sain, 2001] H. Andrůka, I. Nřmeti and I. Sain. Algebraic logic. In D. Gabbay and F. Guentner (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [Antoniou and Williams, 1997] G. Antoniou and M. A. Williams. *Non-monotonic Reasoning*. Cambridge: The MIT Press, 1997.
- [Barwise and Feferman (eds.), 1985] J. Barwise and S. Feferman (eds.) *Model-Theoretic Logics*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [Barwise and Perry, 1983] J. Barwise and J. Perry. *Situations and Attitudes*. Cambridge, MA: MIT Press, 1983.
- [Beall and Restall, 2000] J. Beall and G. Restall. Logical pluralism // *Australian Journal of Philosophy*, 78: 475-493, 2000.
- [Benacerraf, 1967] P. Benacerraf. God, the devil, and Gůdel // *The Monist*, 5: 9-32, 1967.
- [Blok and Pigozzi, 1989] W. J. Blok and D. Pigozzi. *Algebraizable logics* (monograph). *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1989, № 396.
- [Bochman, 2001] A. Bochman. *Logical Theory of Nonmonotonic Inference and Belief Change*. Berlin: Springer, 2001.
- [Boolos, 1975] G. Boolos. On second-order logic // *Journal of Philosophy*, 72: 509-527, 1975.
- [Bradley and Swartz, 1978] R. Bradley and N. Swartz. *Possible Worlds: An Introduction to Logic and its Philosophy*. Oxford: Blackwell, 1978.
- [Brewka, Dix and Konolige, 1995] G. Brewka, J. Dix and K. Konolige. *Non-monotonic Reasoning: An Overview*. Stanford: CSLI Publications, 1995.
- [Buss et al., 2001] S. R. Buss, A. S. Kechris, A. Rillay and A. Shore. The prospects for mathematical logic in the twenty-first century // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7: 169-196, 2001.
- [Carnielli, 1996] W. A. Carnielli. Review of [Gabbay (ed.) 1994] // *Mathematical Review*, 96k: 03008, 1996.
- [Chaitin, 2000] G. J. Chaitin. A century of controversy over the foundations of mathematics // C. Calude and G. Paun (eds.) *Finite versus infinite*. London: Springer-Verlag, 2000. P. 75-100. (Статья доступна в электронном виде: <http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/lowell.html>).
- [Chang and Lee, 1973] C. Chang and R. C. T. Lee. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. New York: Academic Press, 1973.
- [Corcoran, 1972] J. Corcoran. Conceptual structure of classical logic // *Philosophy and Phenomenological Research*, 33: 25-47, 1972.
- [Da Costa, Břziau and Otůvio, 1995] Paraconsistent logic in a historical perspective // *Logique et Analyse*, 150-151-152: 111-125, 1995.
- [Da Costa, Břziau and Otůvio, 1996] N. C. A. da Costa, J-Y. Břziau and O. A. S. Otůvio. Malinowski and Suszko on many-valued logics: On the reduction of many-valuedness to two-valuedness // *Modern Logic*, 6, N 3: 272-299, 1996.

- [Daynes, 2000] A strictly finitary non-triviality proof for a paraconsistent system of set theory deductively equivalent to classical *ZFC* minus foundation // *Archive for Mathematical Logic*, 39: 581-598, 2000.
- [Dix, Del Cerro and Furbach (eds.), 1998] J. Dix, F. L. Del Cerro and U. Furbach (eds.) *Logics in Artificial Intelligence*, Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1489. Berlin: Springer, 1998.
- [Dummett, 1963] M. Dummett. The philosophical significance of Gödel's theorem // *Ratio*, 5: 140-155.
- [Dunn and Hardegree, 2001] J. M. Dunn and G. Hardegree. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [Eklund and Kolak, 2002] M. Eklund and D. Kolak. Is Hintikka's logic first-order? // *Synthese*, 131, N 3: 371-388, 2002.
- [Engel, 1992] P. Engel. *Norm of truth: An introduction to the philosophy of logic*. University of Toronto Press, 1992.
- [Epstein, 1990] R. L. Epstein. *The semantic foundations of logic. Vol. 1: Propositional logic*. Dordrecht: Kluwer, 1990 (2nd ed., 1995).
- [Epstein, 1994] R. L. Epstein. *The semantic foundations of logic. Vol. 2: First-order logic*. Dordrecht: Kluwer, 1994.
- [Etchemendy, 1990] J. Etchemendy. Tarski on truth and logical consequence // *The Journal of Symbolic Logic*, 53: 51-79, 1988.
- [Etchemendy, 1990] J. Etchemendy. *The Concept of Logical Consequence*. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1990.
- [Feferman, 1999a] S. Feferman. Logic, logics, and logicism // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40, N 1: 31-54, 1999.
- [Feferman, 1999b] S. Feferman. *Proof Theory on the Eve of the Year 2000*. <http://www-logic.stanford.edu/proofsurvey.html>.
- [Fraenkel et al., 1973] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy and D. van Dalen. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1973. (Имеется перевод на рус. яз. с первоначальной версии: А.Френкель и И.Бар-Хиллел. *Основания теории множеств*. М.: Мир, 1966).
- [Gabbay, Hogger and Robinson (eds.), 1998] D. M. Gabbay, C. J. Hogger and J. A. Robinson (eds.) *Handbook of Logics in Artificial Intelligence and Logic Programming. Vol. V. Logic Programming*. Oxford: Oxford Science Publications, 1998.
- [Gabbay and Guenther (eds.), 1983 – 1989] D. Gabbay and F. Guenther (eds.) *Handbook of philosophical logic*. Vols. I – IV. Dordrecht: Reidel, 1983 – 1989.
- [Gabbay and Guenther (eds.), 2001 – ?] D. Gabbay and F. Guenther. (eds.) *Handbook of philosophical logic*. Vols. 1 – 18. 2nd Edition. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001 – ?
- [Gabbay (ed.) 1994] D. M. Gabbay. *What is a logical system?* Oxford: Clarendon Press, 1994 (and New York, 1995).
- [Gallier, 1986] J. H. Gallier. *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*. Harper & Row, 1986.
- [Gödel, 1995] K. Gödel. *Collected Works III*, editor in chief S. Feferman. Oxford: Oxford University Press, 1995.

- [Gómez-Torrente, 1996] M. Gómez-Torrente. Tarski on logical consequence // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37, N 1: 125-151, 1996.
- [Gómez-Torrente, 2000] M. Gómez-Torrente. Note on formality and logical consequence // *Journal of Philosophical Logic*, 29, N 5: 529-533, 2000.
- [Grayling, 1997] A.C. Grayling. *Introduction to philosophical logic*. Blackwell Publishers, 1997 (2nd ed).
- [Haack, 1978] S. Haack. *Philosophy of Logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- [Haack, 1996] S. Haack. *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism*. Chicago: University of Chicago Press, 1996.
- [Hacking, 1975] I. Hacking What is logic? // *The Journal of Philosophy*, 76, N 6, 1979. (Переиздано в [D. M. Gabbay, (ed.) 1994. P. 1-33]).
- [Halmos and Givant, 1998] P. Halmos and S. Givant. *Logic as Algebra*. Washington, 1998.
- [Halpern *et al.*, 2001] Y. Halpern, R. Harper, N. Immerman, P. G. Kolaitis, M. Y. Vardi and V. Vianu. On the unusual effectiveness of logic in computer science // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 7, N 2: 213-236, 2001.
- [Hanson, 1999] Ray on Tarski on logical consequence // *Journal of Philosophical Logic*, 28, № 6: 605-616, 1999.
- [Hintikka J. 1994] J. Hintikka. What is true elementary logic? // K. Gavroglu., J. Stachel and M. Wartofsky. (eds.) *Physics, Philosophy and the Scientific Community*. P. 301-326. Dordrecht: Kluwer, 1994.
- [Hintikka and Sandu, 1996] J. Hintikka and G. Sandu A revolution in logic? // *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1, N 2: 169-183, 1996.
- [Hofstadter, 1979] D. R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*. Hassocks, Sussex: Harvester Press. (Русский перевод: Д. Хофштадтер. *Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда*. Самара: Издательский дом «Бахрах-М», 2001).
- [Jacquette, 2002] D. Jacquette. *A Companion to philosophical logic*. Blackwell: Blackwell Companions to Philosophy, 2002.
- [Jeffery, 1991] R. Jeffery. *Formal Logic: its Scope and its Limits*. McGraw Hill. 3d edition, 1991.
- [Jones, 2002] R. B. Jones. *Factasia* (<http://www.rbjones.com/rbjpub/>).
- [Keenan and Stavi, 1986] E. L. Keenan and J. Stavi. A semantic characterization of natural language determiners, *Linguistic and Philosophy*, 9: 253-326, 1986.
- [Keenan and Westerstehl, 1997] E. L. Keenan and D. Westerstehl. Generalized quantifiers in linguistics and logic // J. van Benthem and A. ter Meulen (eds.) *Handbook of Logic and Language*. P. 837-893. Amsterdam: Elsevier, 1997.
- [Klibansky, 1968] R. Klibansky. *Contemporary philosophy. A Survey. Vol. 1. Logic and Foundation Mathematics*. La Nuova Italia, Firenze 1968.
- [Kneale and Kneale, 1962] W. Kneale and M. Kneale. *The Development of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1962.
- [Kreisel, 1972] G. Kreisel. Which number theoretic problems can be solved in recursive progressions on Π_1^1 path through 0? // *The Journal of Symbolic Logic*, 37: 311-334.

- [Lambek, 1994] J. Lambek. What is a deductive system? // [Gabbay D. M. (ed.), 1994. P. 141-159].
- [Lindstrum, 1969] P. Lindstrum. On extensions of elementary logic // *Theoria*, 35: 1-11, 1969.
- [Lunning, 1997] U. Lunning. Plurals and collectivity // J. van Benthem and A. ter Meulen (eds.) *Handbook of Logic and Language*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1997.
- [Lucas, 1961] J. R. Lucas. Minds, machines, and Gödel // *Philosophy*, 36: 112-137, 1961.
- [Lucas, 1996] J. R. Lucas. Minds, machines, and Gödel: A retrospect // P. J. R. Millican and A. Clark (eds.) *Machines and thought: The Legacy of Alan Turing, Vol. 1*. Oxford: Oxford University Press, 1996.
- [Manzano, 1996] M. Manzano. *Extensions of first order logic*. Cambridge, Cambridge University Press, 1996.
- [McCarthy, 1981] T. McCarthy. The idea of a logical constant // *Journal of Philosophy*, 78: 499-523, 1981.
- [McCune, 1994] W. W. McCune. *Otter 3.0 Reference Manual and Guide. Technical Report ANL-94/6*. Aragonne National Laboratoty (www-unix.mcs.anl.gov/otter/).
- [McGee, 1996] V. McGee. Logical operations // *Journal of Philosophical Logic*, 78: 499-523.
- [Minski, 1968] M. L. Minski. Matter, mind and models // M. L. Minski (ed.) *Semantic Information Processing*. Cambridge: The MIT Press, 1968.
- [Mostowski, 1957] A. Mostowski. On a generalization of quantifiers // *Fundamenta Mathematicae*, 44: 12-36, 1957.
- [Muskens, 1995] R. Muskens. *Meaning and Partiality*. Studies in Logic, Language and Information. Stanford: CSLI Publications, 1995.
- [Peacocke, 1976] C. Peacocke. What is a logical constant? // *Journal of Philosophy*, 73: 221-241, 1976.
- [Penrose, 1989] R. Penrose. *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and the Laws Physics*. Oxford: Oxford University Press, 1989. (Русский перевод: Р. Пенроуз. *Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики*. М.: УРСС, 2003).
- [Penrose, 1994] R. Penrose. *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*. Oxford: Oxford University Press, 1994.
- [Priest, 1979] G. Priest. Logic of paradox // *Journal of Philosophical Logic*, 8: 219-224, 1979.
- [Quine, 1970] W. V. Quine. *Philosophy of Logic*. N.Y.: Englewood Cliffs, 1970 (Reprinted in 1986).
- [Ray, 1966] Logical consequence: A defense of Tarski // *Journal of Philosophical Logic*, 25, N 6: 617-677, 1966.
- [Read, 1995] S. Read. *Thinking About Logic: An Introduction to the Philosophy of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [Rescher, 1968] N. Rescher. *Topics in philosophical logic*. Dordrecht: Reidel, 1968.
- [Sagbillo, 1997] J. Sagbillo. Logical consequence revisited // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 3, N 2: 216-241, 1997.

- [Sainsbury, 1991] M. Sainsbury. *Logical Forms: An Introduction to Philosophical Logic*. Blackwell Publishers, 1991.
- [Sandu, 1998] G. Sandu. If-logic and truth definition // *Journal of Philosophical Logic*, 27, N 2: 143-164, 1998.
- [Schwichtenberg and Troelstra, 2000] H. Schwichtenberg and A. S. Troelstra. *Basic Proof Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [Searle, 1987] J. R. Searle. Minds and brains without programs // C. Blakemore and S. Greenfield, editors. *Mindwaves*. Oxford: Basil Blackwell, 1987.
- [Shapiro, 1991] S. Shapiro. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1991.
- [Shapiro (ed.), 1996] S. Shapiro. *The limits of Logic*. Aldershot: Dartmouth, 1996.
- [Shapiro, 1998] S. Shapiro. Incompleteness, mechanism, and optimism // *The Bulletin of Symbolic Logic*, 4, N 3: 273-302, 1998.
- [Shapiro, 2001] S. Shapiro. Systems between first-order and second-order logics // D. Gabbay and F. Guenther (eds.) *Handbook of philosophical logic. Vol. I*. P. 127-179. 2nd Edition. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [Sher, 1991] G. Y. Sher. *The Bounds of Logic. A Generalized Viewpoint*. Cambridge: The MIT Press, 1991.
- [Simons, 1988] P. M. Simons. Bolzano, Tarski, and the limits of logic // *Philosophia Naturalis*, 24: 378-405, 1988.
- [Slaney, 1992] J. Slaney, *FINDER (Finite Domain Enumerator): Notes and Guide. Technical Report TR-ARP-1/92*. Canberra: Australian National University, 1992.
- [Smullyan, 1992] R. M. Smullyan. *Gödel's Incompleteness Theorems*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [Soames, 1998] S. Soames. *Understanding Truth*. New York: Oxford University Press, 1998.
- [Suber, 2000] P. Suber. *A Bibliography of non-standard logics* (<http://www.earlham.edu/>).
- [Tarski, 1986] A. Tarski. On the concept of logical consequence // A. Tarski. *Logic, Semantics, Metamathematics*, second edition. P. 409-420. Indianapolis: Hackett, 1983.
- [Tarski, 1986] A. Tarski. What are logical notions? // *History and Philosophy of Logic*, 7: 143-154, 1986.
- [Tharp, 1975] L. Tharp. Which logic is the right logic? // *Synthese*, 31: 1-21.
- [Thomason (ed.), 1989]. R. H. Thomason (ed.) *Philosophical Logic and Artificial Intelligence*. Dordrecht: Kluwer, 1989.
- [Turner, 1984] R. Turner. *Logics for Artificial Intelligence*. Chichester: Ellis-Horwood, 1984. (2nd ed. 1985).
- [Uspensky, 1997] V. A. Uspensky. Mathematical logic in the former Soviet Union: Brief history and current trends // M. L. Dalla Chiara *et al.* (eds.) *Logic and Scientific methods*. P. 457-483. Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [Van Benthem and Doets, 1983] J. Van Benthem and K. Doets. Higher-order logic // [Gabbay and Guenther (eds.), 1983 – 1989]. Vol. I. P. 275-329.

- [Van Benthem, 1986] J. van Benthem. *Essays in Logical Semantics*. Dordrecht: Kluwer, 1986.
- [Van Benthem, 1989] J. van Benthem. Logical constants across varying types // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30: 315-342.
- [Wang, 1996] H. Wang. *From Mathematics to Philosophy*. London: Routledge and Kegan Paul, 1974.
- [Wang, 1996] H. Wang. *Logical journey from Gödel to philosophy*. Cambridge: The MIT Press, 1996.
- [Webb, 1980] J. Webb. *Mechanism, Mentalism and Metamathematics: An Essay on Finitism*. Dordrecht: Reidel, 1980.
- [Wolfram, 1989] S. Wolfram. *Philosophical logic. An Introduction*. L.-N.Y.: Routledge, 1989.
- [Zucker, 1978] J. I. Zucker. The adequacy problem for classical logic // *Journal of Philosophical Logic*, 7: 517-535, 1978.