В.Х.Хаханян

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ШТРИХ-РЕАЛИЗУЕМОСТИ КЛИНИ

Abstract. *We describe A.Dragalin's method of construction of models for HA as functional algebraic models and we prove that there does not exist such a model for slash-realizability of Kleene.*

В одной из своих работ А.Г.Драгалин предложил очень общий подход к построению моделей для нестандартных логик, в частности, для интуиционистской логики, в стиле равномерных алгебр, см.[1]. Приводимое изложение (достаточно ясное, но без очевидных деталей) сопровождается примерами для арифметики (см. там же). Однако в последнем из примеров, рассматривая модель для штрих-реализуемости Клини (см. [3, столбец C]), автор приводит «...модель, соответствующую штрих-реализуемости Клини...» ([1, стр. 194]). Но связь между приводимой моделью и реализуемостью Клини такова: «... $\|\varphi\| = T \Leftrightarrow ((|\varphi) \wedge HA \vdash \varphi)$»; см. также [1, стр.195]; сравни с [2]. Конечно, с помощью приведенной модели (соответствующей как раз формульной реализуемости из [2]) можно доказать свойства дизъюнктивности и экзистенциальности для арифметики HA (именно этот результат и стремится получить автор, используя подходящую равномерную алгебру). Однако штрих-реализуемость Клини (да и другие модели типа равномерной алгебры для HA) не совпадают с выводимостью в интуиционистской арифметике.

Как отмечалось выше, в [1] дается ряд примеров, в которых для той или иной модели HA (в первую очередь для моделей типа реализуемости) приводится соответствующая этой модели функциональная алгебраическая модель (ФАМ). Сейчас мы достаточно кратко опишем и охарактеризуем общую схему построения ФАМ для арифметики. Известно, что при исследовании HA употреблялось большое количество моделей типа реализуемости. Естественно попытаться рассмотреть эти модели с некоторой единой точки зрения. Алгебраическое исследование таких моделей приводит к рассмотрению существенно неполных псевдобулевых алгебр (ПБА), в которых верхние и нижние грани существуют лишь для некоторых семейств, которые задаются структурой языка. Ниже мы опишем один из вариантов такого рассмотрения, предложенный А.Г.Драгалиным (см. [1], [2]).

Функциональная псевдобулева алгебра (ФПБА) задаётся набором < B,D,F >, где B – ПБА, это алгебра истинностных значений, D – непустое множество (объектная область), а F – семейство функций (или семейство форм) ФПБА. Всякий элемент из F есть функция нескольких аргументов (может быть нульместных), всюду определенная на элементах из D и со значениями в ПБА. На F накладываются следующие ограничения:

1. F замкнуто относительно операций: а) добавления фиктивного аргумента; б) перестановки аргументов; в) отождествления аргументов.
2. F содержит ноль и единицу ПБА в качестве нульместных функций.
3. F замкнуто относительно псевдобулевых операций $\wedge$, $\vee$, $\supset$.

Последнее означает следующее. Если f, g есть две формы из F с одним и тем же количеством аргументных мест, то найдётся функция h из семейства форм такая, что для любых элементов a_1, ..., a_n из D (далее D – это множество объектов) $h(a_1,...,a_n)=f(a_1,...,a_n)\wedge g(a_1,...,a_n)$ или кратко $h=f\wedge g$. Аналогично, требуется существование форм $f\vee g$ и $f \supset g$.

4. Наше множество форм должно быть замкнуто относительно операций взятия верхних и нижних граней. Это означает следующее. Пусть фиксировано некоторое аргументное место, например x_1. Если f из семейства форм, то требуется, чтобы существовали формы g и h от аргументов $x_2,...,x_n$ такие, чтобы для любых объектов a, $a_2,...,a_n$ было выполнено $g(a_2,...,a_n)=\wedge\{f(a,a_2,...,a_n) \mid a\in D\}$, $h(a_2,...,a_n)=\vee\{f(a,a_2,...,a_n) \mid a\in D\}$, т.е. требуется существование соответствующих пересечений и объединений в ПБА. Будем записывать это так: $g(x_2,...,x_n)=\forall x f(x,x_2,...,x_n)$, $h(x_2,...,x_n)=\exists x f(x,x_2,...,x_n)$. Определение ФПБА на этом завершено. Заметим, что совершенно не требуется, чтобы ПБА была полной, т.е. чтобы содержала все нижние и верхние грани своих подмножеств.

Далее рассматриваются логико-математические языки без выделенного равенства и функциональных символов, т.е. каждый язык задается набором <Cnst, Pr> – констант и предикатных символов. Функциональная алгебраическая модель (ФАМ) для языка <Cnst, Pr> определяется набором A=<B, D, F, *Cnst, Pr*>, где <B, D, F> есть ФПБА, функция *Cnst* сопоставляет каждой константе с нашего языка объект *c* =*Cnst*(c), а каждому предикатному символу P нашего языка сопоставляется элемент $\llbracket P \rrbracket$=*Pr*(P) из семейства форм F. Дополнительно предполагается, что семейство форм нашей модели A удовлетворяет и такому условию: это семейство замкнуто относительно операции фиксации аргумента объектной области *c*, где c есть константа нашего языка, что означает следующее: если $f \in F$, $f=f(x_1,...,x_i,...,x_n)$, $c \in Cnst$, тогда найдется функция $g \in F$ такая, что для всех объектов $a_1,...,a_n$ $g(a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n) = f(a_1,...,c,...,a_n)$.

Если задана ФАМ A языка Q, то можно определить значение в модели для всякой формулы языка Q. Значением $\|\varphi\|$ формулы φ будет при этом некоторая форма ФПБА $\|\varphi\| \in F$. Заметим, что, в отличие от обычных алгебраических моделей (см. *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики, М., Наука, 1972), значение приписывается не формулам, оцененным объектами модели, а просто формулам языка Q, в том числе и формулам с параметрами.

Для определения значения формулы в модели будем помечать аргументные места форм переменными языка Q. С этой целью линейно упорядочим все переменные языка Q каким-либо фиксированным способом. Если дана формула φ, то все ее параметры выпишем в список $x_1,....x_n$ в упомянутом выше линейном порядке. В качестве значения формуле φ будет сопоставляться форма $f \in F$ от аргументов $x_1,....x_n$.

Теперь определим значение $\|\varphi\|$ индукцией по построению формулы φ.

1) Если φ – атомарная формула вида $P(u_1, ...u_n)$, где u_i –переменные или константы, а $x_1,....x_n$ – стандартный список параметров φ, то $\|P(u_1, ...u_n)\|$ есть форма от аргументов $x_1,....x_n$, получающаяся из $\|P\|$ с помощью фиксации аргументов соответствующими константами.
2) Значение $\|\perp\|$ есть нуль алгебры B.
3) Если φ имеет вид $(\psi\wedge\eta)$, $(\psi\vee\eta)$, $(\psi\supset\eta)$, то форму $\|\varphi\|$ вычисляем следующим образом. Сначала найдем $\|\psi\|$ и $\|\eta\|$. Затем с помощью тривиальных операций перестановки и добавления фиктивных аргументов получим из $\|\psi\|$ и $\|\eta\|$ формы $f_1(x_1, ..., x_n)$ и $f_2(x_1, ..., x_n)$ от параметров формулы φ и, наконец, вычислим $\|\varphi\|$ как форму $f_1\wedge f_2$, $f_1\vee f_2$ или $f_1\supset f_2$.
4) Если φ имеет вид $\forall x\psi(x)$ или $\exists x\eta(x)$, то определим $\|\varphi\|=\forall x\|\psi(x)\|$ или, соответственно, $\|\varphi\|=\exists x\|\eta(x)\|$. Разумеется, если у формулы нет параметра x, то никаких изменений при определении формы $\|\varphi\|$ не происходит. Если φ – предложение нашего языка, то соответствующая форма оказывается нульмерной и принадлежит ПБА. Предложение φ истинно в модели A, если $\|\varphi\|=T$ – единица нашей ПБА. A есть модель для теории H, если все нелогические аксиомы H

будут истинны в A. Теорема о корректности для нашего класса моделей имеет следующий вид.

Теорема. *Если A – ФАМ для языка Q, φ – предложение языка Q, выводимое в интуиционистской логике предикатов, то* $\|\varphi\|$=T *(единица ПБА)*.

Доказательство теоремы проводится индукцией по длине вывода формулы φ.

Теперь рассмотрим некоторые виды реализуемости в языке арифметики. Сам язык арифметики HA при этом следует модифицировать так, чтобы избежать употребления функциональных символов. Это делается с помощью стандартной процедуры: каждому n-местному функциональному символу $f(x_1, ..., x_n)$ сопоставляется (n + 1)-местный предикатный символ $y = f (x_1,..., x_n)$ и все аксиомы, относящиеся к этому функциональному символу, естественным образом заменяются на аксиомы, относящиеся к предикатному символу. Соответственно, несколько изменяются и другие аксиомы. Например, принцип арифметической индукции приобретает вид $\varphi (0) \wedge \forall xy (\varphi (x) \wedge (y = Sx) \supset \varphi (y)) \supset \forall x\varphi (x)$. Мы считаем, что наш язык (мы его по-прежнему будем обозначать через HA) имеет один сорт переменных x, y, z,.. и семейство констант 0, 1, 2,.... для каждого натурального числа.

Все функциональные алгебраические модели для языка HA, которые мы рассмотрим ниже, будут иметь одну и ту же объектную область, т.е. в моделях A = <B, D, F, *Cnst, Pr*> область D будет одной и той же. А именно объектная область D состоит, во-первых, из всех констант 0, 1, 2,... для натуральных чисел и, во-вторых, из счетного семейства символов [x], [y], [z],..., которые мы будем называть каналами. Канал изображает константу – натуральное число, «о котором ничего не известно».

Функция *Cnst* во всех моделях ниже определяется тривиальным образом: константе n языка сопоставляется объект $n \in$D. Таким образом, в рассматриваемых примерах модель задается определением B, F и *Pr*. Оцененная формула – это, по определению, формула φ, в которой все вхождения параметров замещены объектами из D (константами или каналами).

Приведем теперь две наиболее простых ФАМ. Каждую формальную теорию, например HA, можно рассматривать как функциональную алгебраическую модель. По существу это известная алгебра Линденбаума–Тарского. В качестве алгебры B истинностных значений следует взять просто множество всех оцененных формул, а в качестве множества F форм – множество всех формул.

Каждая формула задает форму относительно операции замещения параметров.

Основное отношение на B определяется очевидным образом: $a \leq b \Leftrightarrow HA \vdash a' \supset b'$, где a', b' получены из a, b путем согласованного превращения каналов в переменные. Псевдобулевы операции над формами при этом будут совпадать с синтаксическими операциями над соответствующими формулами. Если определить $\| \varphi \| = \varphi$ для атомарных формул, то для всякого предложения φ будем иметь $\| \varphi \| = T \Leftrightarrow HA \vdash \varphi$.

Однако можно определить и более интересную и неожиданную модель HA, где в качестве форм будут фигурировать формулы. Для всякой арифметической формулы φ через Pr (φ) обозначим формулу с теми же параметрами, что и у φ, содержательный смысл которой таков: Pr (φ) утверждает, что в исчислении HA выводится замкнутая формула, полученная из φ замещением ее параметров натуральными числами из некоторого списка *y*, который есть полный список всех параметров φ. Формула Pr (φ) строится стандартным образом по формуле φ, с подробностями можно ознакомиться, например, в статье: *Feferman S.* Arithmetization of metamathematics in general setting // Fundamenta Math., 1960. N. 49, P.35-92. Для всякой формулы φ через $\Box\varphi$ обозначим формулу $\varphi \wedge Pr(\varphi)$.

В качестве алгебры B возьмем вновь множество всех оцененных формул, а в качестве множества F форм – множество всех формул, но теперь основное отношение определим иначе: $a \leq b \Leftrightarrow HA \vdash \Box\, a' \supset b'$. Для атомарных формул положим $\| \varphi \| = \varphi$.

Псевдобулевы операции в этой модели определяются следующим образом (здесь слева стоит знак операции в нашей модели, а справа – формула, являющаяся значением):

$(\varphi) \wedge (\psi) = (\varphi \wedge \psi)$; $(\varphi) \vee (\psi) = (\Box\varphi \vee \Box\psi)$; $(\varphi) \supset (\psi) = (\Box\varphi \supset \psi)$; $\neg(\varphi) = (\neg \Box\varphi)$; $\forall x(\varphi) = (\forall x\varphi)$; $\exists x\, (\varphi) = (\exists x\, \Box\varphi)$; $\perp=(0=1)$

Реализуемость, соответствующая этой модели, была использована Бизоном (*Beeson M.* The nonderivability in intuitionistic formal system of theorems on the continuity of effective operations // J. of Symbolic Logic, 1975. N. 40, P. 321-346). Связь с реализуемостью Бизона можно теперь выразить следующей эквивалентностью: $\| \varphi \| = T \Leftrightarrow HA \vdash \varphi^{p}$.

Далее в работах [1] и [2] рассматривается отмеченная во введении штрих-реализуемость Клини и для нее строится подходящая ФАМ, однако нетрудно видеть, что, доказывая свойства эффективности логических связок, эта ФАМ совпадает с выводимостью в интуиционистской арифметике. Мы докажем, что не существует модели ФАМ для штрих-реализуемости Клини (и тем не менее существует модель типа ФАМ для формализованной и содержательной реализуемостей Клини: см. [1] или [2]).

Предположим, что некоторая ФАМ A есть модель для штрих-реализуемости Клини. Тогда (по определению) имеется такое отображение формул языка арифметики в множество форм F, что для всякой формулы φ: $|$-реализуема φ тогда и только тогда, когда $F_\varphi \in 1$ (F_φ – форма из ФПБА модели ФАМ A, соответствующая формуле арифметики φ, а 1 есть единица ПБА, использованной при построении ФАМ). Рассмотрим два различных, неразрешимых в HA утверждения φ и η (т.е. в HA не выводимы утверждения φ, $\neg\varphi$, η и $\neg\eta$). Так как в HA не выводятся формулы φ и η, то формулы $\neg\varphi$ и $\neg\eta$ являются невыводимыми, $|$-реализуемыми формулами языка арифметики. Если в ФАМ A им соответствуют формы $F_{\neg\varphi}$ и $F_{\neg\eta}$ соответственно, то эти формы принадлежат единице ПБА, а тогда форма $F_{\neg\varphi} \vee F_{\neg\eta} = F_{\neg\varphi\vee\neg\eta}$ (последняя соответствует в ФПБА из модели A формуле $\neg\varphi\vee\neg\eta$) также принадлежит единице нашей ПБА и, следовательно, формула $\neg\varphi\vee\neg\eta$ является $|$-реализуемой. Но это влечет, что в HA выводима формула $\neg\varphi$ или в HA выводима формула $\neg\eta$, что невозможно в силу выбора φ и η. Таким образом, доказана

Теорема. *Не существует ФАМ, соответствующей штрих-реализуемости Клини.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Драгалин А.Г.* Функциональные алгебраические модели // Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, 1979. Вып. XIII, С. 184-195
2. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств М.: Наука, 1979. С. 60-61.
3. *Kleene S.C.* Realizability: a retrospective survey // Lecture Notes in Math.1973. N. 337. P.96.