Б.И.Федоров

ОБРАЗЕЦ ИСТОРИЧЕСКИ-ЛОГИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

Abstract. *In the paper the author describes his method of comparative historical analysis of logical conceptions, theories and concrete fundamental results in history of logic. The method is used in analyzing of the deductive conception of B. Bolzano (1781-1848). On the grounds of this application the author finds some results, which can be perspective for the research in history of logic.*

Реконструкция, как правило, содержательно излагаемых логических идей или теорий прошлого предполагает, на наш взгляд, три основных этапа. На первом этапе выявляются специфические особенности толкования и научно-практического использования фундаментальных логических категорий, таких, как понятие, представление, высказывание (суждение), субъект, предикат, рассуждение, вывод, доказательство, логическая форма, модель, выполнимость, логическая истинность, модальность, отношение логического следования и других логических отношений. На этом же этапе происходит уточнение смысла основных логических положений теории, выясняется зависимость вывода или доказательства от выбора тех или иных логических средств, от всякого рода явных или скрытых допущений. Здесь же прослеживается влияние философско-методологической позиции изучаемого автора на трактовку основных логических проблем. Второй этап реконструкции связан с так называемой «промежуточной» формализацией исследуемой содержательной теории. Главным моментом на этом этапе является обнаружение и/или создание таких выразительных средств, например, искусственного языка, синтаксис которого позволяет максимально учесть и адекватно отобразить все те уточнения реконструируемой логической теории, которые были обнаружены и сформулированы содержательно на первом этапе. Третий этап или собственно реконструкция прошлых идей или теорий состоит в «погружении» предварительно формализованного материала в выразительные средства языка современной логики таким образом, чтобы полученные результаты позволяли увидеть реальные перспективы использования прошлых идей в развитии современной логики и методологии научного познания.

Предполагая осуществить поэтапную реконструкцию логических идей прошлого на примере дедуктивной теории Б.Больцано (1781-1848), проведем вначале сравнительный анализ его понимания главных логических категорий в контексте идей традиционной логики.

Основное содержание дедуктивной теории Больцано мы находим в специальном разделе «О выводах» во 2-ом томе его «Наукоучения» – Wissenschaftslehere. Versuch einer ausfьhrlichen und grцsstenteil neuen Darstellung der Logik mit steter Rьcksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Sulzbach, 1837. In 4 Bдnde (далее WL), § 223-268, а также в некоторых его математических сочинениях. Она связана с его философско-методологическими идеями и без глубокого понимания этой связи, без учета того, что саму логику Больцано трактует как теорию изложения науки, без учета особенностей использования им логико-семантических средств естественного (немецкого) языка нельзя рассчитывать на адекватное представление и современную реконструкцию дедуктивной теории Больцано.

Всякое высказывание состоит из понятий или представлений. Представление связано с субъективным чувственным образом, но с точки зрения логики, как считает Больцано, предмет представления и понятия один и тот же. Под понятием или представлением он понимает «те составные части предложения, которые сами, однако, целого предложения не составляют». (WL I, 216).

Структуру любого повествовательного предложения Больцано предлагает выражать с помощью так называемой «стандартной формы», то есть в виде выражений «...имеет...» или «неверно (ложно), что... имеет...» Вместо многоточия слева от слова «имеет» помещается та часть предложения, в которой говорится о предмете (мысли) всего предложения. Эту часть предложения Больцано называет «субъектным представлением». Справа от слова «имеет» помещается та часть предложения, которую он называет «предикатным представлением» и которая говорит что-то о предмете предложения. Таким образом, Больцано стремится любое повествовательное предложение выразить в субъектно-предикатной форме, используя, однако, вместо традиционной связки «есть» («суть») связку «иметь».

При сведении повествовательных предложений к стандартному виду в логике Больцано большую роль играют понятия предметности *(Gegenständlichkeit)* и беспредметности представлений, а также особое употребление конкретных представлений – «конкрет» и абстрактных представлений – «абстракт». Утверждение беспредметности (пустоты, противоречивости) некоторого представления всегда равнозначно отрицанию его предметности (WL II, 401). Предметность и беспредметность являются такими характеристиками представлений или понятий, которые относятся к их логическому объему. Для того чтобы можно было судить о предметности или беспредметности некоторого представления, необходимо, чтобы оно было выражено в форме так называемой «конкреты», было конкретным представлением, то есть выражалось с помощью слов, которые обозначают предметы, но не признаки или свойства, или отношения предметов. Если взять предложение стандартной формы «А имеет b», то здесь обнаруживаются три вида представлений, исчерпывающие все составные части предложения. Прописные буквы латинского алфавита Больцано использует в этом случае для обозначения субъектных представлений предложения, для представлений об отдельном или нескольких предметах, о которых идет речь в предложении. Именно такие представления, которые обозначают реальные или мыслимые предметы, он и называет *конкретами* (WL I, 259). Относительно любой конкреты предполагается, что всегда можно решить, имеет ли она определенный объем или ее объем пуст. Строчные буквы латинского алфавита Больцано использует для обозначения предикатных представлений в предложениях. Предикатные представления приписываются в предложении субъектным или, иначе говоря, последние обладают первыми. Предикатные представления как представления о признаках реальных или мыслимых предметов он называет *абстрактами* (WL I, 260). Согласно Больцано, в отличие от конкрет установить объемы абстракт не предполагается возможным. Так, например, нельзя указать логического объема представлений «мудрый», «человечный», «красный» и т.п. Но любая абстракта может быть превращена в соответствующую ей конкрету, и наоборот. Поэтому можно установить практически объем любого представления.

Для превращения абстракт в конкреты и обратно Больцано пользуется в «Наукоучении» особенностью немецкого языка. Он образует существительные (которым в немецком языке соответствуют его конкреты) из любой знаменательной части речи с помощью суффиксов *keit* или *heit,* а также определенного артикля *das.* Исключение образуют местоимения, которые в предложении сами могут заменять существительные. Например, из абстракт «сильный», «мудрый», «бежать» он образует соответствующие конкреты: «сила», «мудрость», «бег». Вновь образованные конкреты обладают объемом и уже можно судить об их предметности или беспредметности.

Особыми абстрактами в логической теории Больцано выступают сами предметность и беспредметность как свойства любых конкрет. Они не должны, согласно Больцано, превращаться в соответствующие конкреты (например: в «предмет» и в «пустое»).

Больцано считает, что объем понятия «предмет вообще» или «пустота» не имеет каких-либо границ и практически не может быть указан. Предметность или беспредметность, употребляемые им как особые абстракты, всегда, появляясь в предложении, занимают место предикатного представления.

Метод превращения абстракт в конкреты позволяет Больцано провести отождествление понятий, входящих в субъекто-предикатную структуру предложения с их объемами, то есть с классами объектов. В этом нельзя не видеть влияния его математических исследований, предшествующих созданию теории множеств.

Третью составную часть предложения стандартного вида – представление «иметь» Больцано называет представлением об отношении. Оно само не говорит ни о предметах, ни о признаках, но «как бы принадлежит и к тем и к другим в предложении», соединяет субъектное и предикатное представление в предложении, определяет форму самого предложения и «относится целиком к логике» (WL I, 383). Вопрос о предметности или беспредметности относительно представления «иметь» является с точки зрения Больцано неправомерным.

И все же чисто лингвистический способ превращения абстракт в конкреты и обратно не вполне устраивает Больцано, так как им затруднительно пользоваться при выделении логической формы предложений. Поэтому он вводит в употребление особый термин «нечто», играющий важную роль как в преобразованиях абстракт в конкреты, так и в сведении повествовательных форм предложений к стандартному виду. Слово «нечто» как особая конкрета имеет, согласно Больцано, неопределенный (безграничный) объем. Под этим словом следует понимать универсум – мир предметов вообще или предметную область вообще, или любой (неопределенный, не конкретный) предмет вообще из этого мира. Конкрета «нечто» всегда обладает предметностью. Противоположной конкрете «нечто» является у Больцано конкрета «ничто» как отрицание первой. Конкрета «ничто» не имеет никакого объема, всегда беспредметна, имеет пустой объем.

Для того чтобы конкрета «нечто» имела определенный объем, необходимо, по мнению Больцано, научиться ограничивать эту предметную область вообще. «Задание границ» Больцано предлагает осуществлять путем выделения среди «предметов вообще» лишь тех, которые обладают некоторым определенным свойством или совокупностью их. Так, например, если из «нечто» выделить такое «нечто, которое (есть. – *Б.Ф.*) живое существо, живущее в Греции», или «нечто, которое (есть. – *Б.Ф.*) честный человек», то мы, согласно Больцано, уже имеем дело с вполне определенным объемом конкреты «нечто» (WL I, 459). Напротив, относительно конкреты «ничто» выделение какого-либо определенного непустого объема оказывается невозможным потому, что сама эта конкрета беспредметна.

Таким образом, ограничение объема «нечто» происходит за счет абстракт и относительного местоимения «который», в результате чего сама абстракта становится уже конкретой с определенным объемом. Этот же способ использования «нечто» позволяет Больцано в дальнейшем решать проблему сведения любых повествовательных предложений к стандартному виду. Добавление абстракты как некоего характеристического признака к «нечто» ограничивает объем «предмета вообще» рамками той области, на которую распространяется признак прибавляемой абстракты. При образовании конкрет из абстракт Больцано часто использует такую форму записи:

[нечто] (*а* + *в* + *с* + ...),

где на месте *а,в,с*, ... могут стоять различные абстракты (свойства), а заключенная в круглые скобки «сумма абстракт» означает, что из области «нечто» («предметов вообще») выделяется некоторая область, обладающая одновременно свойствами *а,в,с*, ... Таким образом, выражение [нечто] (*а* + *в* + *с* + ...) превращается в «сложную» (составную) конкрету, содержание которой (как содержание представления) определяется частями *а,в,с*,..., из которых она составлена. Примером подобного образования будет, например, выражение: «нечто, которое благоразумное, осторожное и нравственное». Отсюда можно образовать также равнозначное выражение, превратив, например, абстракту «благоразумное» с помощью уже отмеченного лингвистического метода в существительное – конкрету «благоразумность, которая осторожна и нравственна». Объемы обоих представлений совпадают! (см.: WL I, 441-442). Последнее представление выразилось бы следующим образом:

[*A*] (*в* + *с* + ...),

где *A* – «благоразумность», *в* – «осторожное», *с* – «нравственное».

Теперь при превращении абстракт в конкреты и наоборот нет необходимости всякий раз переходить от прописных букв к строчным и наоборот, или снимать и навешивать суффиксы *keit* и *heit* на слова. Для решения этой задачи достаточно использовать представление «нечто» в качестве единственной конкреты. Все другие конкреты можно получить путем приписывания справа к представлению «нечто» соответствующей абстракты. Больцано сам в большинстве случаев использует подобный способ преобразования абстракт в конкреты.

Метод превращения абстракт в конкреты и обратно позволяет Больцано по существу двояким образом использовать предикаты (в виде собственно предикатов-абстракт и в виде конкрет как индивидных переменных). Этот метод можно сопоставить с современной проблемой, состоящей в преодолении различий между структурой предложений обычного языка и структурой их аналогов – формул в логических исчислениях.

Сам Больцано довольно часто заменяет субъектные представления, обозначаемые прописными буквами латинского алфавита *A,B,C,…*, на выражения: [нечто] *а*, [нечто] *в*, [нечто] *с,…*, считая употребление обычных предметных переменных равнозначным со специфицированной формой их употребления. Лишь записанная отдельно (без абстракт) конкрета «нечто» выступает в указанном выше смысле в роли так называемой чистой предметной переменной. Подобное употребление «нечто» Больцано использует, когда хочет сказать об универсальности некоторого предиката: «[нечто] имеет (*а* + *в* + …)» или что для него одно и то же, «всякое [нечто] имеет (*а* + *в* + …)». Приписывая к «нечто» абстракты, можно образовывать подлежащие (субъекты) суждений, а употребляя абстракты отдельно, мы получаем собственно предикаты. Обычная структура суждения получает у Больцано две основные формы выражения. Например: «[нечто] (*а* + *в* + …) имеет (*с* + *d* +…)». Здесь «чистые» абстракты, стоящие на месте предиката (после слова «иметь») образуют единый предикат как конъюнкцию свойств *а,в,с,d,…* Второе выражение образуется в том случае, когда место предиката занимает особая абстракта – предметность, которую можно понимать также как особый предикат – «существует». В роли же субъекта выступает аналог специфицированной переменной. Например: «[нечто] (*а* + *в* + не-*с* +…) имеет предметность». Могут употребляться также отрицания указанных выражений.

Проведем теперь «промежуточную» формализацию для представления высказываний по методу Больцано.

Формальная система Б1

N– знак конкреты «нечто»
G– знак абстракты «предметность»
a,b,c,… – знаки простых абстракт
$\in$ – знак отношения «имеет»
$\sim$ – знак внутреннего отрицания
$\rceil$ – знак внешнего отрицания
(,) – технические знаки

Определение абстракты

1. Простая абстракта есть абстракта.
2. Если x – абстракта, то ~ x – абстракта.

Определение термина

1. Конкрета «нечто» есть термин.
2. Если $x_1,x_2,\ldots,x_k$ (где $k > 0$) – абстракты, то выражение $Nx_1,\ldots,x_k$ – термин.

Определение элементарной формулы

1. Если T – термин, $x_1,x_2,\ldots,x_k$ - абстракты, то выражение $(T \in x_1,\ldots,x_k)$ – элементарная формула.
2. Если T – термин, то выражение $(T \in G)$ – элементарная формула.

Основными объектами логики Больцано считает термины (абстракты и конкреты) и предложения (высказывания), образуемые из терминов с помощью логических констант (например, «иметь»). Стремясь к обобщению различных способов выражения суждений в естественном языке и к преодолению ограничений на «количество» субъектов и предикатов, Больцано ставит своей задачей нормализацию их путем сведения к стандартному виду, перед тем как перейти к использованию их в качестве логических форм в учении о выводе. При этом, согласно Больцано, «неправомерно отождествлять форму “Ложно, что *A* имеет *в*” с формой “*A* имеет не-*в*”, поскольку при ложности “*A* имеет *в*” или *A* не является предметным представлением (т.е. пусто – *Б.Ф.*), или хотя бы одному *A* не присуще свойство *в*» (WL II, 420).

Обобщенно стандартный вид предложений имеет следующее написание:

(1) «…имеет…»

(2) «Ложно, что …имеет…»

Поскольку, за исключением предметности и беспредметности, любая абстракта может быть превращена в соответствующую конкрету, и наоборот, Больцано считает удобным использовать вместо (1) и (2) также формы:

(1)$^{/}$ «то, что … имеет, имеет…»

(2)$^{/}$ «Ложно, что то, что … имеет, имеет….».

В предложении стандартного вида «*A* имеет *в*», согласно Больцано, субъектное представление *A* всегда берется во всем своем объеме. Поэтому полная запись указанного предложения имеет следующий вид:

«каждое *A* имеет *в*».

Однако Больцано не употребляет всякий раз такую форму записи, а пишет просто «*А* имеет *в*».

Случаи же, когда в предложении берется лишь определенная часть конкреты, Больцано отмечает особо. Когда объем *А* точно не определен (как, например, в предложении формы: «Некоторые *А* имеют *в*»), используется выражение: «*А*, которое (есть. – *Б.Ф.*) *в*, имеет предметность», что позволяет Больцано сохранять стандартный вид:

«…имеет…»

Редукция повествовательных предложений к стандартному виду осуществляется им без формулирования каких-либо правил. В любом предложении Больцано старается выделить субъект и предикат, которые соединялись бы связкой «иметь». Когда же предикат в явном виде не обнаруживается, то его место занимает особая абстракта – предметность. Например, предложение «Если *А* есть *В*, то *С*» Больцано редуцирует в предложение «Представление о свойствах *А*, в отношении которого утверждается, что наряду со свойством *в* оно должно обладать еще и свойством *с*, имеет предметность». К стандартному виду, согласно Больцано, сводимы, например, предложения: «*А* должен», «*А* желает», «*А* существует» и т.п., которые принимают вид: «*А* имеет долженствование», «*А* имеет желание», «[нечто] *а* имеет предметность» и т.п. (WL II, 226).

Сводя различные типы повествовательных предложений к стандартному виду, Больцано считает необходимым особо выделить среди них те, которые он называет «важнейшими формами» предложений. Именно такие предложения используются им в разделе «Учение о выводах».

«К важнейшим формам предложений, – говорит Больцано, – по моему убеждению, принадлежат те, в которых выступают высказывания о самих представлениях, предложениях и об отношениях между ними. Причем представления или предложения в таких высказываниях должны рассматриваться в качестве переменных» (WL II, 393). Не приводя более конкретной причины и критерия выделения «важнейших форм» предложений стандартного вида, он предлагает учитывать в своем учении о выводах лишь следующие.

I. «*А* имеет *в*».

II. «Ложно, что *А* имеет *в*».

III. «Представление [нечто] (*а* + *в* + *с* + …) имеет предметность».

IV. «Представление о единственном представлении *А* имеет предметность».

V. «Представление о нескольких представлениях *A* имеет предметность».

VI.«Представление об *n* представлениях *A* имеет предметность».

VII.«Представления *A,B,C*,… имеют свойство находиться в отношении… (совместимости, несовместимости, подчинения и т.д.)».

VIII.«Предложения *A,B,C*,… имеют свойство быть в отношении совместимости» (или – *A,B,C*,… – совместимы)».

IX.«Предложения *A,B,C*,… имеют свойство быть выводимыми из предложений *M,N,O*,…»

X. «Предложения *A,B,C*, и *M,N,O*,… находятся в отношении равнозначности».

XI.«Предложения *A,B,C*,… находятся в отношении противоречия».

XII.«Представление об истинных (ложных) предложениях среди предложений *A,B,C*,… имеет предметность».

XIII.«Предложение *M* имеет свойство с вероятностью *n* выводиться из предложений *A,B,C*,…».

Больцано считает, что можно использовать также отрицание каждой из указанных форм. В этом случае отрицание формы II, согласно ему, совпадает с формой I.

Рассмотрим, например, основные свойства форм: (I) – «*A* имеет *в*», (II) – «Ложно, что *A* имеет *в*» и (III) – «Представление [нечто] (*a* + *в* + *c* +…) имеет предметность», в которых, как частный случай, выразимы все силлогистические выводы «прежней» логики. Субъектные представления в (I) и (II) берутся во всем своем объеме, то есть субъект здесь всегда распределен. Объем предложения, согласно Больцано, полностью определяется объемом субъектного представления и «если последний есть беспредметное представление, то и предложение не имеет никакого предмета, о котором в нем идет речь» (WL II, 25). Таким образом, суждения вида (I) и (II) предполагают экзистенциальную трактовку, так как требуют для своей истинности непустоты или предметности субъекта. Он считает, что по сравнению с «прежней» логикой его способ редукции предложений к стандартному виду позволяет преодолеть неопределенность в объеме субъекта частных суждений. Например, суждение «некоторые люди смертны» Больцано записывает в соответствии с (III): «(каждое) представление о людях, которые смертны, имеет предметность».

В отличие от субъекта, предикат в (I) и (II) не распределен. Представление, стоящее на месте предиката, никогда не берется во всем своем объеме. Так как отрицание Больцано относит не к связке «иметь», а к предикату, то общеотрицательное суждение «прежней» логики «Все *S* не суть *P*» он интерпретирует как «Всякое *S* суть не-*P*». Но в таком случае предикат «не-*P*» нельзя считать распределенным.

Рассмотрим зависимость между «предметностью» терминов и истинностью предложения. Предложение вида (I) истинно только тогда, когда предметному субъектному представлению *A* присуще свойство, обозначаемое предикатным представлением *в*. Ложным предложение вида (I) оказывается в том случае, когда субъектное представление оказывается беспредметным, то есть пустым, или когда предметному представлению *A* не присуще свойство, обозначаемое предикатным представлением *в*. Легко видеть, что когда предложение вида (I) истинно, тогда ложно предложение вида (II), и наоборот. Если предложение вида (I) истинно, то его субъектное представление *A* имеет предметность (не является пустым по своему объему). Очевидно, предложение вида (III) истинно, когда никакое сочетание (*a* + *в* + *c* +…) с «нечто» не дает беспредметную конкрету. В противном случае (III) – ложно. «Если истинно предложение "*A* имеет *в*", то истинным будет и предложение "*A*, которое *в*, имеет предметность" или "представление об *A*, которое обладает свойством *в*, имеет предметность" (WL II, 400). Указанная зависимость между предложениями, которым можно поставить в соответствие общеутвердительную и частноутвердительную формы суждений «прежней», по выражению Больцано, логики («Все *S* суть *P*», «Некоторые *S* суть *P*»), выступает «экзистенциальной предпосылкой» логической теории Больцано. В интерпретированной Я.Лукасевичем аристотелевской силлогистике выражение «некоторые *S* суть *S*» выступает в качестве аксиомы лишь при условии, что на место *S* следует подставлять непустые термины. Указанная аксиома выражает «экзистенциальную предпосылку» логики Аристотеля и позволяет получать вывод суждения «некоторые *S* суть *P*» из суждения «все *S* суть *P*».

У Больцано же общезначимой следует считать не форму «некоторые *S* суть *S*», но «если все *S* суть *P*, то некоторые *S* суть *P*», поскольку он допускает в своей логической системе беспредметные представления (пустые термины). Если в выражении «некоторые *S* суть *S*» вместо переменной *S* подставить беспредметное представление (что допустимо в логике Больцано), то в соответствии с рассмотренными условиями истинности, образуется ложное предложение. Но, с другой стороны, из этих условий истинности вытекает, что всякое истинное предложение не включает в свой состав пустых, беспредметных представлений. Поэтому выражение «все *S* суть *P*» истинно в том случае, когда на месте *S* стоит предметное представление, то есть когда имеется по крайней мере один предмет «*S*», который одновременно есть «*P*», поскольку все *S* суть *P*. В этом случае, если истинно предложение «все *S* суть *P*», истинным будет и предложение «некоторые *S* суть *P*». Отличие экзистенциальных предпосылок и способа выражения общеотрицательного суждения у Больцано и Аристотеля приводит к тому, что из 24 модусов аристотелевской силлогистики в логике Больцано оказываются «правильными» только 22.

Истинное суждение, согласно Больцано, не должно включать в свой состав беспредметных представлений «Обе части *А* и *в* в истинном предложении всегда должны быть предметными представлениями» (WL II, 17). Очевидно, здесь достаточно уже лишь требования непустоты субъекта. Если предикат – беспредметное представление, то по экзистенциальной предпосылке образуется противоречивое, а следовательно беспредметное, согласно Больцано, субъектное представление. Например, из выражения «человек имеет всемогущность» образуется ложное предложение «представление о человеке, который всемогущ, имеет предметность», поскольку у Больцано предикат «всемогущность» может приписываться только «богу» и субъект оказывается беспредметным. Таким образом, общие суждения получают у Больцано экзистенциальную трактовку.

Используя формальную систему Б1, введем определение формулы, чтобы выразить с его помощью первые три «важнейшие формы» предложений логики Больцано.

Определение формулы

1. Элементарная формула есть формула.
2. Если А – формула, то $\rceil$A – формула.

Предложения формы: I, II, III логики Больцано получают следующую запись в Б1.

$$\text{I} - (\text{T} \in x_1 \ldots x_k)$$
$$\text{II} - \rceil(\text{T} \in x_1 \ldots x_k)$$
$$\text{III} - (\text{N}\ x_1 \ldots x_k \in \text{G}).$$

Остановим теперь внимание на правилах вывода, которые использует Больцано в своей дедуктивной теории. Понятие вывода и доказательства можно встретить в различных его сочинениях. Общим в них является положенное в основу отношение выводимости (Ableitbarkeit).

Если рассмотрение в аспекте отношения выводимости предложений *A*,*B*,… и некоторого предложения *C*, согласно Больцано, приводит к тому, что из истинности *A*,*B*,… усматривается истинность *C*, а истинность *D,E*,… приводит к истинности *F* и так далее; затем, если рассмотрение предложений *C, E*,… приводит к истинности предложения *H*, а рассмотрение предложений *F, J*, … приводит к суждению *K* и так далее; наконец, если рассмотрение предложений *H,K,L*,… должно привести к суждению *M*, к которому мы стремимся при построении доказательства, то мы можем назвать доказательством суждения *M* не только совокупность всех предложений *A,B,C, D,E*,… *K,L*,…, но также отдельно взятые предложения *A,B*,… доказательством суждения *C*; предложения *D,E,…* доказательством суждения *F* и так далее. Такое доказательство, которое содержит в себе другие доказательства в качестве своей части, Больцано называет *составным*, а в противном случае *простым*. Предложения *A,B, D,E,G*,…, которые выше рассматривались (сами) без доказательства, он считает правильным называть *началами, предпосылками, посылками* или *допущениями* данного доказательства. Остальные предложения, например, такие как *C,F*,… Больцано называет *промежуточными*, а само предложение *M заключением* данного доказательства (см.: WL, IV, 458).

В любом доказательстве Больцано считает необходимым, во-первых, ясно осознать те предположения, из которых должно строиться доказательство, и, во-вторых, все типы (правила) выводов, по которым оно строится. «Никакие заключения не могут быть получены из своих посылок без предварительного знания самих правил, по которым образуется каждый конкретный вывод. Поэтому еще недостаточно указать истинные суждения *A, B, C, D*,…, чтобы достичь знания об истинности некоторого суждения *M*» (WL III, 128). Таким образом, правила, в которых должны описываться зависимости в аспекте отношения выводимости между доказываемым утверждением и допущениями, составляют у Больцано основу доказательства.

Слово «вывод» выступает у него в двух значениях. С одной стороны, он часто использует это слово для обозначения самого перехода от опосредующих суждений к опосредованному суждению. «Если причина появления суждения *M* лежит в появлении суждений *A,B,C*,…, то я назову суждение *M* обусловленным, а последние обусловливающими суждение *M*… Часто действия, которые приводят к получению суждения *M* из суждений *A,B,C*,… называют *заключением* или *выводом*; наконец, если в принятии за истинные *A,B,C*,… лежит причина принятия за истинное суждение *M*, то этот переход мы называем *выводной способностью*» (WL III, 123).

С другой стороны, слово «вывод» Больцано употребляет для высказываний об отношении выводимости в собственном смысле. «*Выводом* мы назовем всякое выражение, подчиненное форме: “Каждая совокупность представлений, которая на месте *i,j*,…, включенных в качестве варьируемых (переменных. – *Б.Ф.*) в предложения *A,B,C*,…, *M,N,O*,…, делает истинными предложения *A,B,C*,…, делает истинными и предложения *M,N,O*,…”» (WL II, 540). Но принятие посылок за истинные, согласно Больцано, еще не гарантирует с необходимостью получения истинного заключения. Нужно, чтобы заключение находилось к посылкам действительно в отношении *выводимости* или *точной выводимости*[1]. А для этого, как считает Больцано, «зависимость между ними должна подпадать под одно из правил вывода, которое само есть выражение отношения выводимости и не касается ничего другого, как только *формы* участвующих в выводе предложений» (WL III, 127).

Как же образуются сами правила вывода, составляющие, как можно было заметить, основу дедуктивной теории Больцано? Беря различные сочетания из одной, двух, трех и более важнейших форм I–XIII или отрицания этих форм и используя понятия логической или точной выводимости, Больцано получает с их помощью ту или иную из указанных выше форм или их отрицаний в качестве заключения. Таким образом, он получает в своем учении о выводе огромное количество правил. «В этом случае, – говорит Больцано, – речь уже будет идти не о конкретных выводах, но о формах вывода (о правилах, по которым уже должен образоваться конкретный вывод» (WL II, 394).

Обоснование «правильности» выбираемой комбинации важнейших форм в качестве посылок или заключений в правилах вывода Больцано проводит чаще всего путем разбора соответствующих содержательных примеров. В то же время он использует и «логические критерии» отбора – это требование *совместимости* посылок в правиле как следствие из определения отношения выводимости. В отдельных случаях он использует также требование независимости посылок, когда между посылками и заключениями можно обнаружить отношение точной выводимости. Однако правила для точной выводимости он специально не рассматривает.

В разделе «О выводах» Больцано не рассматривает *все* (хотя бы только «правильные») выводы, которые можно получить из комбинаций одной, двух, трех и т.д. важнейших форм. И все же число проанализированных им правил достаточно велико – 437! Очевидно, Больцано не ставил своей целью обсудить в «Наукоучении» все правила, но лишь стремился изложить детально сам метод образования таких правил, основывая его на использовании отношения выводимости относительно сочетаний важнейших

---

[1] См.: *Федоров Б.И.* Логика Бернарда Больцано. С. 78-81.

форм предложений стандартного вида I–XIII. Анализ данного метода показывает, что в логико-дедуктивной теории Больцано легко конструируются «новые» правила вывода, о которых не упоминается в «Наукоучении». Среди большого числа рассматриваемых правил вывода Больцано иногда обращает внимание читателя на правила, с помощью которых могут обосновываться другие правила. Обнаруживается, таким образом, как бы подразделение правил вывода на *основные* и *производные*, хотя сам Больцано не говорит о таком подразделении. Во всяком случае, оно не проводится в «Наукоучении» систематически. Отсутствие формализованного языка в его логической теории затрудняет обзор всей системы правил в целом и осложняет решение проблемы их строгого разделения на основные и производные.

В своей дедуктивной теории Больцано впервые в общем виде определил зависимость правил вывода от логических констант, входящих в предложения стандартной формы I–XIII, или их отрицания. Здесь же он выясняет точный смысл ряда констант, таких, например, как «иметь», «равно», «больше», «меньше», и других.

На основе развиваемой в «Наукоучении» дедуктивной теории Больцано пересматривает представления о выводе в «прежней» логике. Так, например, он считает излишним деление выводов на непосредственные и опосредованные. «Теперь любое число предложений *A,B,C,…*, совместимых между собой, можно рассматривать в качестве посылок, а любое число предложений M,N,O,…, становящихся истинными всякий раз, как только истинными становятся первые, можно рассматривать в качестве заключений» (WL II, 540). Нельзя признать правильной, согласно Больцано, и точку зрения традиционной логики, согласно которой выводы в сложных умозаключениях, содержащих более двух посылок, можно получать лишь многократным применением силлогизма. Возражает он и против того положения, что «заключения должны иметь всегда только два термина, полученных из посылок». В соответствии с его пониманием отношения выводимости, посылки и заключения могут иметь любое число терминов. Больцано не делит выводы на категорические, гипотетические, дизъюнктивные и т.п. Он глубоко убежден, что силлогистикой не исчерпываются типы дедуктивных выводов. Он ставит перед собой задачу создать такую дедуктивную теорию, которая не только включала бы в себя прежнюю силлогистику, но и другие выходящие за ее рамки дедуктивные умозаключения. Система правил вывода у Больцано, как будет показано дальше, уже при использовании лишь двух «важнейших форм» I и III действительно позволяет рассматривать силлогистические умозаключения в качестве частных случаев его логико-дедуктивной теории.

В предлагаемой нами реконструкции (формальная система Б1) основные правила вывода для «важнейших форм» I-III дедуктивной теории Больцано получают следующее выражение.

Основные правила Б1

α,β,γ – обозначают списки абстракт (возможно пустые) δ,ε – непустые списки абстракт. Указанные списки не содержат специальной абстракты G– «предметность».

П1. $$\frac{(N\alpha \in \beta x_1, x_2\gamma)}{(N\alpha \in \beta x_2, x_1\gamma)}$$

П2. $$\frac{(N\alpha \in \delta)\ (N\delta \in \varepsilon)}{(N\alpha \in \varepsilon)}$$

П3. $$\frac{(N\beta \in \delta)}{(N\alpha\beta\delta \in G)}$$

П4. $$\frac{(N\alpha\delta\beta \in G)}{(N\alpha\beta \in G)}$$

П5. $$\frac{(N\alpha\delta\beta \in G)}{(N\alpha\delta\beta \in \delta)}$$

П6. $$\frac{(Nx_1 \in x_{k+1})\ldots(Nx_k \in x_{r+k})\ (Nx_1\ldots x_k \in G)}{(Nx_1\ldots x_r \in x_{r+1}\ldots x_{r+k})}$$

П7. $$\frac{(N\alpha \in \beta x_1\delta)}{(N\alpha \in \beta \sim\sim x_1\delta)}$$

П8. $$\frac{(N\alpha \in \delta\beta)}{(N\alpha \in \beta\ )}$$

П9. $$\frac{(N\alpha\beta \in x_1)}{\neg(N\alpha \sim x_1\beta \in G)}$$

П10. $$\frac{\neg(N\alpha x_1\beta \in G)\ (N\alpha\beta \in G)}{(N\alpha\beta \in x_1)}$$

Все правила вывода в своей логико-дедуктивной теории Больцано формулирует как правила прямого вывода заключения из посылок. Именно этими правилами он предлагает пользоваться при построении доказательств в «учебниках» науки в первую очередь. Вряд ли можно думать, что такой крупный математик и логик, каким был Больцано, не понимал определенных преимуществ от использования непрямых (косвенных) методов доказательства.

Очевидно, ориентацию Больцано на прямые методы доказательства в науке можно объяснить лишь его общим философско-методологическим замыслом представления логики как наукоучения. Интересно заметить, что сам Больцано ни в одной своей работе так и не дал примера построения науки с использованием только прямых выводов.

Указанные мысли Больцано можно воплотить в добавлении к формальной системе Б1 двух основных правил

П11. $\dfrac{\neg\neg A}{A}$ П12. $\begin{array}{l} A_k \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ \neg B \\ \hline \neg A_k \end{array}$

Правила вывода, построенные на основе использования «важнейших форм» I–XIII, составляют практическую основу (инструмент) для образования конкретных выводов и доказательств, с которыми, по мнению Больцано, мы постоянно сталкиваемся при написании научных учебников, при обосновании главных и вспомогательных научных положений. Но, все же, составляя основу некоторого конкретного вывода, каждое правило в отдельности не может характеризовать полностью логический вывод вообще. Иначе говоря, само правило не заменяет понятия логического вывода, в котором для Больцано должно раскрываться отношение выводимости. Отношение выводимости в каждом конкретном правиле из форм I–XIII носит ограниченный характер, так как зависит от конкретного сочетания посылок и заключений указанных форм. Лишь высказывания об отношении выводимости между совокупностями предложений (между посылками и заключениями) независимо от формы этих предложений, учитывающие лишь их истинностные значения, позволяют, согласно Больцано, раскрыть сущность логического вывода вообще. Эти высказывания, как отмечалось выше, Больцано часто называет словом «вывод». К числу их следует отнести все те содержательные описания свойств выводимости, которые рассматриваются в «Наукоучении». Из числа этих свойств Больцано выделяет главное, которому должен подчиняться любой логический вывод. Свойство это составляет самую суть отношения выводимости и должно лежать в основе любого доказательного вывода. Речь идет о своеобразном содержательном аналоге «дедукционной теоремы». «Если посылки *A,B,C*,… рассматриваются вместе с предложениями *M,N,O*,… и из этой совокупности выводимы *P,Q,R,…*, то мы можем сказать, что предложения *P,Q,R*,…, становятся истинными всякий раз, как только истинными становятся все *A,B,C*,… и все *M,N,O*,… Мы можем, следовательно, утверждать гипотетическое суждение в качестве заключения из предложений *A,B,C*,…: если есть истинные *M,N,O*,…, то истинны и *P,Q,R*,… Каждая совокупность представлений, которая делает истинными (при замене переменных на постоянные. – *Б.Ф.*) все *A,B,C*,…, делает истинным и предложение о том, что каждая совокупность представлений, которая делает истинными все $M,N,O,\ldots$, делает истинными и все $P,Q,R,\ldots$ Таким образом, из любого вывода с n посылками можно образовать другой вывод с (n-1), (n-2) и даже с одной посылкой. Так, например, из посылок “*A* есть *B*” и “*B* есть *C*” выводимо заключение “*A* есть *C*”. Но было бы справедливым также из одной посылки “*A* есть *B*” получить заключение ““Если “*B* есть *C*”, то “*A* есть *C*””. И даже если вывод $P,Q,R,\ldots$ из совокупности $A,B,C,\ldots$, $M,N,O,\ldots$ был бы *точным*, то таковым был бы и другой» (WL II, 397).

Воспользуемся теперь выразительными средствами языка современной логики для интерпретации, уточнения и окончательной формальной реконструкции дедуктивной теории Больцано.

Построение **формальной системы B_0** будет опираться на первопорядковую логику предикатов.

Исходный базис B_0

A, в, c,…	– индивидные или предметные константы;
X, y, z,…	– индивидные или предметные переменные;
P^n, Q^n, R^n,…	– n-местные предикаторные константы;
S, S_1,…, T, T_1,…	– символы пропозициональных переменных;
$\forall,\exists$	– кванторные символы;
V	– символ универсума рассуждений;
$\varnothing$	– символ пустого множества;
$\rceil$, &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, #	– символы пропозициональных связок;
$\vdash$	– символ отношения выводимости;
И, Л	– символы значений: «истина», «ложь»;
$=,\neq,>,\subseteq,\in,\cap,\cup$	– символы математических отношений.

***Определение терма*:**

1. Произвольная предметная (индивидная) константа есть терм.
2. Произвольная индивидная переменная есть терм.
3. Никаких иных термов нет.

Определение элементарной формулы:

1. Если $Ф$ – n-местная предикаторная константа, а $t_1\ldots t_n$ – термы (где n>O), то выражение $Ф^n(t_1\ldots t_n)$ – элементарная формула.

2. Если $\rceil Ф$ – n-местная предикаторная константа, то выражение $\rceil Ф^n(t_1\ldots t_n)$ – элементарная формула.

3. Если $Ф_i$ и $Фj$ различные n-местные предикаторные константы, то выражения: $(Ф_i{=}Фj)$, $(Ф_i{\neq}Фj)$, $(Ф_i>Фj)$, $(Ф_i\capФj)$, $(Ф_i\cupФj)$ – элементарные формулы.

4. Если $Ф$ – n-местная предикаторная константа, а V – универсум (непустое множество) рассуждений, то выражения: $(Ф\in V)$,

$(V \in \Phi)$, $(\Phi = V)$, $(\Phi \subseteq V)$, $(\Phi \cap V)$, $(\Phi \cup V)$ – элементарные формулы.

5. Произвольная пропозициональная переменная есть элементарная формула.

***Определение формулы*:**

1. Элементарная формула есть формула.

2. Если A – формула, то $\neg A$ – формула.

3. Если A, B – формулы, то выражения: $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ – формулы.

4. Если α – универсальная переменная, то выражения $\forall \alpha\, A$ и $\exists\, \alpha\, A$ – формулы.

Определение числовых кванторов:

1. $\exists_{1}{}_{1} xP(x)$ = опр.$\exists\, xP(x)$ означает: существует *не меньше, чем* один x такой, что $P(x)$.

2. $\exists^{1} xP(x)$= опр.$\neg\, \exists_{1}\, x\, (P(x) \,\&\, \exists_{1}\, y(P(y) \,\&\, (y \neq x)))$ означает: существует *не больше, чем* один x такой, что P(x).

3. $\exists^{1}_{1}\, xP(x)$ = опр.$\exists_{1}\, x\, P(x) \,\&\, \exists^{1}\, x\, P(x)$ означает: существует *точно один* x такой, что $P(x)$.

4. $\exists^{n}_{n}\, xP(x)$ = опр.$\exists^{1}_{1}\, x\, (P(x) \,\&\, \exists^{n\text{-}1}_{n\text{-}1}\, y\, (P(y) \,\&\, (y \neq x)))$ означает: существует *точно n* объектов x таких, что $P(x)$.

***Выражение важнейших форм* I–VI *предложений стандартного вида в языке B_0*.**

I – «A имеет *в*» = опр.$\forall\, x(P(x) \supset Q(x))$.

II – «Ложно, что A имеет *в*» = опр. $\forall\, x \neg (P(x) \supset Q(x))$.

III – «Представление [нечто] (*а* + *в* + *с* +…) имеет предметность» = опр. $\exists x\, (P(x) \,\&\, Q(x) \,\&\ldots\&\, R(x))$.

IV – «Представление о единственном представлении A имеет предметность = опр. $\exists^{1}_{1}\, x\, P(x)$.

V – «Представление о нескольких представлениях A имеет предметность» = опр. $\exists_{1}\, x\, P(x)$.

VI – «Представление об n представлениях A имеет предметность» = опр.$\exists^{n}_{n}\, xP(x)$.

Анализ «правильных» правил вывода, полученных Больцано в разделе «О выводах», показывает, что некоторые из них оказываются такими, что могут быть использованы при обосновании правильности других (производных).

Выделяя в разделе «О выводах» те комбинации «важнейших» стандартных форм, которые могут играть роль *основных* по отношению к другим комбинациям, мы предлагаем следующее их обобщенное выражение в формальной системе $\boldsymbol{B_O}$.

Основные правила вывода B_0[2]

P1 (ср.: WL II, 401)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset(\Phi_i(\alpha)\ \&\ \Phi_j(\alpha))}{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset(\Phi_j(\alpha)\ \&\ \Phi_i(\alpha))}\ \text{(двойная черта)}$$

P2 (ср.: WL II, 412-419)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset(\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha))),\forall\alpha((\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&(\Phi_m(\alpha))\supset(\Phi_{m+1}(\alpha)\&\ldots\&_n\Phi_n(\alpha))}{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset(\Phi_{m+1}(\alpha)\&\ldots\&\Phi_n(\alpha)))}$$

P3 (ср.: WL II, 399)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset(\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha)))}{\exists\alpha(\Phi(\alpha)\&(\Phi_1(\alpha))\&\ldots\&(\Phi_m(\alpha)))}$$

P4 (ср.: WL II, 428; 452)

$$\frac{\exists\alpha(\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha))}{\exists\alpha(\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_{m-1}(\alpha))}$$

P5 (ср.: WL II, 430)

$$\frac{\exists\alpha(\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&(\Phi_i(\alpha))\&\ldots\&\Phi_m(\alpha))}{\forall\alpha((\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&(\Phi_i(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha)\supset\Phi_i(\alpha))}$$

P6 (ср.: WL II, 411; 416; 418; 440)

$$\frac{\forall\alpha((\Phi_1(\alpha)\supset\Phi_{m+1}(\alpha))\ldots(\Phi_m(\alpha)\supset\Phi_{m+n}(\alpha))),\exists\alpha(\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha))}{\forall\alpha((\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha))\supset(\Phi_{m+1}(\alpha)\&\ldots\&\Phi_{m+n}(\alpha)))}$$

P7 (ср.: WL II, 398)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset(\Phi(\alpha))}{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset\neg\neg\Phi_i(\alpha))}\ \text{(двойная черта)}$$

P8 (ср.: WL II, 453)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_{i-1}(\alpha)\&\Phi_i(\alpha)\&\Phi_{i+1}(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha)))}{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset(\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_{i-1}(\alpha)\&\Phi_{i+1}(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha)))}$$

P9 (ср.: WL II, 399)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset\Phi_i(\alpha))}{\neg\exists\alpha(\Phi(\alpha)\&\neg\Phi_i(\alpha))}$$

P10 (ср.: WL II, 453)

$$\frac{\neg\exists\alpha(\Phi(\alpha)\&\Phi_i(\alpha)),\exists\alpha\Phi(\alpha)}{\forall\alpha(\Phi(\alpha)\supset\neg\Phi_i(\alpha))}$$

P11 (ср.: WL II, 406-407)

$$\frac{\forall\alpha(\Phi_i(\alpha)\supset\Phi_j(\alpha)),\forall\alpha(\Phi_j(\alpha)\supset\Phi_i(\alpha))}{\Phi_i=\Phi_j}\ \text{(двойная черта)}$$

---

[2] Двойная черта в правиле вывода означает возможность перехода как от формул, записанных над ней, к формулам, записанным под ней, так и наоборот.

P11 (ср.: WL II, 406-407)

$$\frac{\forall\alpha\,(\Phi_i(\alpha) \supset \Phi_j(\alpha)),\ \forall\alpha\,(\Phi_j(\alpha) \supset \Phi_i(\alpha))}{\Phi_i = \Phi_j}$$

P12 (ср.: WL II, 423)

$$\frac{\forall\alpha\,(\Phi_i(\alpha) \supset \Phi_j(\alpha)),\ \forall\alpha\,\urcorner(\Phi_j(\alpha) \supset \Phi_i(\alpha))}{\Phi_i < \Phi_j}$$

P13 (ср.: WL II, 459)

$$\frac{\exists^1{}_1\,\alpha\,(\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\ \Phi_m(\alpha))}{\exists\alpha\,(\urcorner\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\urcorner\Phi_m(\alpha))}$$

P14 (ср.: WL II, 460)

$$\frac{\forall\alpha((\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha) \supset \Phi_{m+1}(\alpha)),\exists^1{}_1\Phi_{m+1}(\alpha)}{\exists^1{}_1\alpha(\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\ \Phi_m(\alpha))}$$

P15 (ср.: WL II, 461)

$$\frac{\exists^n{}_n\alpha\,\Phi(\alpha),\ \forall\alpha\,\urcorner(\Phi(\alpha) \supset \Phi_i(\alpha))}{\forall\alpha\ (\Phi(\alpha) \supset \urcorner\Phi_i(\alpha))}$$

P16 (ср.: WL II, 466)

$$\frac{\exists^n{}_n\,\alpha\,(\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\ \Phi_{m+1}(\alpha)\ \&\ \Phi_{m+1}(\alpha))\forall\alpha((\Phi_1(\alpha)\&\ldots\&\Phi_m(\alpha))\supset\Phi_{m+1}(\alpha))}{\exists^n{}_n\alpha\,(\Phi_1(\alpha)\ \&\ldots\&\ \Phi_m(\alpha))}$$

P17 (ср.: WL II, 128; 398)

$$\frac{\urcorner\urcorner A}{A}$$

P18 (ср.: WL II, 277)

$$\begin{array}{c} A_i \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ \underline{\urcorner B} \\ \vdots \\ \underline{\urcorner B} \\ \urcorner A_i \end{array}$$

Нетрудно заметить, что первые десять основных правил вывода P1-P10 формальной системы ***B₀*** обобщают «промежуточный» формализм Б1 в виде правил вывода П1-П10, а правила П11 и П12 совпадают соответственно с правилами P17 и P18.

Определение вывода из допущений в $\boldsymbol{B_O}$

Пусть $A_1 \ldots A_n$ не содержащий повторений список формул. Тогда последовательность формул $B_1 \ldots B_m$ называется *выводом из допущений* $A_1 \ldots A_n$, если каждая формула B_i ($i \leq m$) либо принадлежит списку $A_1 \ldots A_n$, либо получена из предшествующих формул по одному из основных правил $\boldsymbol{B_O}$ и в правиле Р18 выражение A_i есть одна из формул $A_1 \ldots A_n$.

Будем считать, что в выводе $B_1 \ldots B_m$ из допущений $A_1 \ldots A_n$ формула B_j ($j \leq m$) *зависит от допущения* A_l ($l \leq n$), если B_j есть A_l или если B_i($i < j$) зависит от A_l и B_j получена из B_i (или из B_i и некоторой B_{i1} в любом порядке) по одному из правил Р1–Р17.

Правило Р18, выражающее метод «приведения к абсурду», применяется следующим образом: если в ходе построения вывода из допущений $A_1 \ldots A_n$ в уже построенной его части, содержащей допущение A_i, имеются формулы B и $\urcorner B$, из которых по крайней мере *одна зависит* от A_i, то построенную часть вывода можно продолжить, присоединив к ней в качестве следующей строки формулу $\urcorner A_i$.

Определение ограниченного вывода

Последовательность формул $B_1 \ldots B_m$ *называется ограниченным выводом* из допущений $A_1 \ldots A_n$, если она есть вывод из допущений, в котором правило Р18 применяется к формулам A_i($i \leq n$), B и $\urcorner B$ лишь при условии, что B или $\urcorner B$ *зависит от* A_i.

Определение заключения из посылок

Формула B называется *заключением* (следствием) из посылок $A_1 \ldots A_k$, если можно построить такой ограниченный вывод из допущений $A_1 \ldots A_n$ ($k \leq n$), что в списке формул $A_1 \ldots A_n$ наряду с $A_1 \ldots A_k$ содержатся все формулы, отрицания которых включены в вывод как результат применения правила Р18, и B есть последняя формула этого ограниченного вывода.

Относительно предлагаемой формальной системы $\boldsymbol{B_O}$ доказуема ее полнота и непротиворечивость.

Для доказательства *полноты* и *непротиворечивости* системы $\boldsymbol{B_O}$ дадим интерпретацию ее основных элементов в алгебре множеств.

$\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_m$ сопоставим $\Phi', \Phi'_1, \ldots, \Phi'_m$ – подмножества V.

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ сопоставим $\alpha', \alpha'_1, \alpha'_2$ – переменные с областью значений $\Phi', \Phi'_1, \ldots, \Phi'_m, \ldots \urcorner \Phi', \urcorner \Phi'_1, \ldots, \urcorner \Phi'_m$, где $\urcorner \Phi'_i = V - \Phi'_i$ то есть множество таких элементов V, которые не принадлежат Φ'_i.

$(\Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha))$ сопоставим $V \cap \Phi'_i \cap \ldots \cap \Phi'_m$

$(\Phi(\alpha) \supset \Phi_1(\alpha) \& \ldots \& \Phi_m(\alpha))$ сопоставим $\varnothing \neq V \cap \Phi' \subseteq \Phi'_i \cap \ldots \cap \Phi'_m$

$\exists \alpha\, \Phi(\alpha)$ сопоставим $\Phi' \neq \varnothing$, $\forall\ \alpha\, \Phi(\alpha)$ сопоставим $\Phi' = V$.

Предложенная интерпретация позволяет перевести основные правила Р1–Р16 формальной системы $\boldsymbol{B_O}$ в форму алгебры множеств. Доказательства правильности переводов тривиальны.
Покажем это на примере Р6.

$$\frac{(V\cap\Phi'_1 \subseteq\Phi'_{m+1})\ldots(V\cap\Phi'_m \subseteq\Phi'_{m+n})((V\cap\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m)\neq\varnothing)}{(V\cap\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m)\subseteq(\Phi'_{m+1}\cap\ldots\cap\Phi'_{m+n})}$$

В алгебре множеств известно, что $\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m\subseteq\Phi'_i$ (где $1\leq i\leq m$). Тогда из $\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_m\neq\varnothing$ и $\varnothing\neq\Phi'_i\subseteq\Phi'_{m+n}$ следует $\varnothing\neq\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_{\mathrm{m}}\subseteq\Phi'_{\mathrm{m+n}}$ для всех i. Следовательно, $\varnothing\neq\Phi'_1\cap\ldots\cap\Phi'_{\mathrm{m}}\subseteq\Phi'_{\mathrm{m+1}}\cap\ldots\cap\Phi'_{\mathrm{m+n}}$.

Интерпретируя $\rceil$ для основных правил Р17 и РП18 как пропозициональное отрицание в классическом исчислении высказываний, можем считать их доказуемыми в исчислении высказываний правилами вывода.

Проведенная интерпретация позволяет каждому правилу вывода в $\boldsymbol{B_O}$ сопоставить вывод в алгебре множеств, предполагая классическое исчисление высказываний в качестве ее логической базы.

Как показатель непротиворечивости в алгебре множеств недоказуемо правило

$$\frac{\Phi'_1\cap\Phi'_2\neq\varnothing}{\varnothing\neq\Phi'_1\subseteq\Phi'_2},$$

которому в B_O соответствует правило:

$$\frac{\exists\,\alpha\,(\Phi_1\,(\alpha)\ \&\ \Phi_2\,(\alpha)),}{\forall\,\alpha\,(\Phi_1\,(\alpha)\supset\Phi_2\,(\alpha))}$$

Если недоказуемо первое (а это так!), то недоказуемо и второе.

В формальной системе $\boldsymbol{B_O}$ могут быть адекватным образом представлены и доказаны в качестве производных 395 содержательных правил вывода, которые Больцано образует из комбинации важнейших форм I–VI предложений стандартного вида.

Количество правил вывода, которые Больцано сформулировал содержательным языком и проанализировал в разделе «О выводах», используя комбинации важнейших форм I–XIII предложений стандартного вида и их отрицаний, весьма велико. В связи с этим возникает естественный вопрос, почему для построения своей дедуктивной теории он не ограничился отношением логического следования, дедукционной теоремой и основными правилами вывода, которые легко можно выделить из 437 правил? Ответ очевидным образом связан с пониманием главной функции его логики

— «изображением и убедительным изложением содержания наук в собственных учебниках» (WL I, 7). Логика, понимаемая им как наукоучение или теория науки, должна способствовать достижению шести основных целей при изложении наук: легкому и ясному восприятию учений; созданию убежденности читателей в истинности учений; доказательности истин; быстрому нахождению нужных истин; созданию предпосылок для отыскания последних оснований учения; целесообразному употреблению учебника данной науки (WL IV, §§ 398; 401; 403; 406; 598). Логика, по мнению Больцано, должна выступать в качестве «фундамента нашего мышления в деле отыскания и познания последних оснований каждой отдельной науки»[3] «Логика, по-моему, должна быть наукоучением, учением о том, как общая область известных людям истин должна целесообразным образом раскладываться на отдельные части или на отдельные науки в своих учебниках, обрабатываться и изображаться в них» (WL I, 21).

Из понимания функций логики как наукоучения можно естественным образом предположить, что дедуктивная теория должна выполнять прикладную функцию: способствовать правильному изложению наук в учебниках. Отсюда понятно, почему Больцано формулирует такое огромное количество правильных форм (правил) вывода, которыми можно воспользоваться непосредственно при изложении конкретного содержания той или иной науки. Приведение любых высказываний к единой форме «…имеет…» также можно рассматривать в качестве искусственного ограничения самой теории дедукции. Но в логике Больцано «важнейшие формы» способствуют строгости и единообразию изложения научного содержания знаний в учебниках и потому также оправданы его логикой как наукоучением.

---

[3] *Bolzano B.* Was ist Philosophie? Wien, 1849. S. 19.