П.И.Быстров

СУБСТРУКТУРНЫЙ ВАРИАНТ ИМПЛИКАТИВНО-НЕГАТИВНОГО ФРАГМЕНТА МОДАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ S5[*]

Abstract. *Substructural version of the implicative-negative part of propositional modal system* **S5** *is considered. It is represented in the form of analytic tableaux as certain modification of analytic tableaux elaborated by Beth, Hintikka, Smullyan and Fitting and in the form of Gentzen-style sequent calculus with "global" rule of inference for modal operator.*

Обычно модальные системы строятся путем добавления специальных аксиом для модальных операторов к системе аксиом классической или интуиционистской логики. В методологическом и прикладном аспектах интересно построение модальных систем как расширений так называемых субструктурных логик, в которых отсутствуют те или иные структурные правила вывода (в секвенциальных вариантах) или аксиомы, соответствующие таким правилам. Для иллюстрации этой идеи в данной статье предлагается вариант импликативно-негативного фрагмента известной системы S5, построенный на базе пропозициональной логики с релевантной импликацией в форме системы табличного вывода и секвенциального исчисления генценовского типа.

В дальнейшем при построении аналитических таблиц без пояснений используются стандартные язык пропозициональной логики, определения формулы и подформулы, а также исходные понятия, введенные в главах I-II работы [1], за исключением тех случаев, когда требуются специальные определения.

Пусть $\supset$ означает релевантную импликацию (поскольку $\to$ применяется для записи секвенций), а $\Box$ – модальный оператор необходимости. Элементарной формулой (подформулой) называется формула (подформула), не содержащая логических знаков, т.е. пропозициональная переменная. Используя обычные понятия положительной и отрицательной подформулы импликативной формулы, применим следующий способ последовательной индексации отрицательных *вхождений* элементарных подформул в импликативную формулу α. Всем отрицательным вхождениям любой *элементарной* подформулы A в α приписывается нижний

[*] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 01-03-00403.

индекс в виде целого положительного числа 1, 2, ... Индексация производится слева направо. Первому (слева) вхождению A в α не приписывается никакого индекса, второму вхождению A в α приписывается индекс 1, третьему вхождению A в α приписывается индекс 2 и т. д. формула называется *индексированной*, если все отрицательные вхождения ее элементарных подформул индексированы. Далее речь пойдет только об индексированных формулах, которые будут обозначаться буквами α, β,... Очевидно, что индексы в явном виде появляются в формуле тогда и только тогда, когда в ней имеется n отрицательных вхождений (n>1) какой-либо элементарной подформулы.

Кроме того, мы будем оперировать только *означенными* формулами, т. е. индексированными формулами, которым приписан префикс T или F. Семантический смысл этих префиксов в данном случае не уточняется (можно считать, например, что $T(\alpha)$ означает "α выполнимо", а $F(\alpha)$– "α невыполнимо".

Система **TRS5**$_{\supset\neg}$ строится с помощью следующих правил вывода и определений. Принимаются следующие схемы правил построения аналитических таблиц для означенных формул:

$$\mathrm{TI}\ \frac{T(\alpha\supset\beta)}{F(\alpha)\mid T(\beta)} \qquad \mathrm{FI}\ \frac{F(\alpha\supset\beta)}{\begin{array}{c}T(\alpha)\\ F(\beta)\end{array}}$$

$$\mathrm{TN}\ \frac{T(\neg\alpha)}{F(\alpha)} \qquad \mathrm{FN}\ \frac{F(\neg\alpha)}{T(\alpha)}$$

$$\mathrm{T}\Box\ \frac{\mathrm{S},T(\Box\alpha)}{S,T(\alpha)} \qquad \mathrm{F}\Box^*\ \frac{S,F(\Box\alpha)}{S,(F\alpha)},$$

где S – множество формул, содержащееся в выводе, заканчивающемся посылками двух последних модальных правил, и правило F$\Box$* применимо, если и только если S содержит по крайней мере одну формулу с префиксом $T\Box$ или $F\Box$.

Определение 1. Аналитическая таблица для означенной формулы α – это упорядоченное диадическое дерево, точками которого являются формулы (вхождения формул). Построение дерева начинается с формулы α. Далее предполагается, что T - уже построенная для α таблица, а β – ее конечная точка. Тогда можно расширить T , применяя к β одно из правил вывода.Точка дерева, идентичная α, называется *начальной точкой*, или началом, данного дерева. Точки, которыми завершаются ветви дерева, называются *конечными точками* данного дерева (соответственно и его ветвей).

Кроме того, построение таблицы выполняется строго систематически, т.е. правило сначала применяется к неэлементарной точке, которая непосредственно следует за начальной точкой, затем к следующей неэлементарной точке и т.д.

Определение 2. Ветвь θ таблицы T *завершена*, если ни к одной ее точке не применимо ни одно из правил построения таблиц. Ветвь θ таблицы T, начинающейся формулой α, считается *замкнутой по элементарной формуле* β_i (по вхождению элементарной формулы β_i), если и только если в θ входят элементарные формулы $T\beta_i$ и $F\beta_i$ (где i – индекс или пустой знак), являющиеся подформулами α.

Поскольку любая формула α имеет конечное число подформул, очевидно, что каждая ветвь таблицы, начинающейся с $F(\alpha)$, может быть завершена и при этом может оказаться замкнутой или незамкнутой по какому-то вхождению элементарной подформулы формулы α. Если все ветви таблицы завершены, будем говорить, что данная таблица завершена. Понятно, что конечными точками завершенной таблицы T для формулы α являются вхождения элементарных подформул формулы α.

Определение 3. Множество всех элементарных отрицательных подформул S формулы α *исчерпано*, если по каждому существенному элементу S замкнута хотя бы одна из завершенных ветвей таблицы T, начинающейся с α.

Определение 4. Таблица T, начинающаяся формулой α, *замкнута*, если и только если (a) замкнута каждая завершенная ветвь этой таблицы; (b) множество элементарных отрицательных подформул формулы α исчерпано.

Формула α называется *выводимой* в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$**,** если в данной системе для нее можно построить замкнутую таблицу T, начинающуюся с $F(\alpha)$. Если каждая ветвь таблицы T, начинающейся с $F(\alpha)$, завершена, но T содержит по крайней мере одну незамкнутую ветвь, формула α *не выводима* в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$.

Ясно, что это пропозициональное исчисление разрешимо. Для проверки формулы α на выводимость достаточно построить завершенную таблицу, начинающуюся с $F(\alpha)$. Любую построенную в рассматриваемом языке формулу можно эффективно проверить на выводимость в исчислении $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$.

Секвенциальное исчисление **SRS5**$_{\supset\neg}$ формулируется с помощью основной секвенции

$$\alpha \to \alpha,$$

где α – элементарная формула, следующего множества схем правил заключения и стандартного определения секвенциального вывода

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \alpha, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta \to \Theta}\ \text{cut}.$$

Схемы правил заключения для логических связок:

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta}\ \to\supset; \qquad \frac{\Gamma \to \alpha \quad \beta, \Delta \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \Theta}\ \supset\to;$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg\alpha}\ \to\neg; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to \Theta}\ \neg\to;$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Theta}{\Box\alpha, \Gamma \to \Theta}\ \Box\to; \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha}{\Gamma \to \Theta, \Box\alpha}\ \to\Box;$$

Схемы структурных правил заключения

$$\frac{\Gamma \to \alpha, \alpha}{\Gamma \to \alpha}\ \to C; \qquad \frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \Theta}{\alpha, \Gamma \to \Theta}\ C\to.$$

$$\frac{\Gamma \to \beta, \alpha}{\Gamma \to \alpha, \beta}\ \to P; \qquad \frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \to \Theta}\ P\to.$$

Во всех схемах Θ – формула или пустая последовательность формул, и правило $\to \Box$ применимо, если и только если формула является S5-ограниченной. (Точное определение S5-ограниченной формулы см. в работе [2].)

Для этого исчисления верна теорема об устранении сечения. Ее можно доказать, в частности, методом, предложенным в [2]. Предполагается также, что формулу, являющуюся членом любой секвенции, можно проиндексировать упомянутым ранее способом.

Можно показать, что формула α доказуема в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$, если и только если секвенция $\to \alpha$ доказуема в исчислении $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$. Для этого достаточно использовать предложенные Р.Смаллианом *модифицированные* аналитические таблицы (см. [1]), позволяющие элементарным образом преобразовывать выводы в генценовских исчислениях в замкнутые табличные конструкции и обратно. В общем случае верно, что любой (свободный от сечения) секвенциальный вывод в $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$ можно преобразовать в замкнутую модифицированную аналитическую таблицу в системе $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ (учитывая пункт (b) определения 4); и обратно, любую замкнутую модифицированную аналитическую таблицу, построенную в системе $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$, можно преобразовать в секвенциальный вывод в $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$. Точнее говоря, верно следующее утверждение.

Секвенция $\to\alpha$ доказуема в исчислении $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$, если и только если в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ можно построить замкнутую модифицированную аналитическую таблицу, начинающуюся с $F\{\alpha\}$.

Это значит, что системы $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$ и $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ дедуктивно эквивалентны.

Далее, можно доказать дедуктивную эквивалентность исчисления $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$ и аксиоматической системы $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$, которая получается добавлением модальных аксиом системы **S5** к импликативно-негативному фрагменту релевантной системы **R**. (Для этого достаточно показать, что формула α доказуема в $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$, если и только если секвенция $\to\alpha$ доказуема в $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$. Подробное доказательство этого утверждения выходит за рамки данной статьи.) Таким образом доказывается, что системы $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ и $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$ дедуктивно эквивалентны, откуда следует, что система $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$ разрешима. Решение вопроса о выводимости любой формулы α в $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$ сводится к механическому построению завершенной таблицы для $F(\alpha)$ в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$.

Такой способ обоснования разрешимости $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$ является косвенным в том смысле, что в нем используется секвенциальное исчисление $\mathbf{SRS5}_{\supset\neg}$. Существует “прямой” путь получения такого же результата: нужно непосредственно доказать, что формула α выводима в $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$, если и только если в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ можно построить замкнутую таблицу, начинающуюся с $F(\alpha)$. Несложно доказать, что если формула α выводима в $\mathbf{MR}_{\supset\neg}$, то в $\mathbf{TRS5}_{\supset\neg}$ можно построить замкнутую таблицу, начинающуюся с $F(\alpha)$. Однако в силу специфики правил построения и замыкания аналитических таблиц в **TRS5**$_{\supset\neg}$ общий прямой метод их преобразования в выводы в системе гильбертовского типа требует применения новых технических средств. Такая ситуация, на мой взгляд, иллюстрирует случай, в котором "прямое" доказательство эквивалентности логических исчислений не оправдывает себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smullyan R.M.*. First-Order Logic. Dover Publications, Inc., New York, 1995.
2. *Bystrov P.I.* Non-Standard Sequent Calculi for Modal and Relevant Logics / Philosophical Logic and Logical Philosophy. Peter I. Bystrov and Vadim N. Sadovsky (eds.). Kluwer Academic Publishers, 1996. P. 135-155.