Д.А.Витер

БАЗИСНАЯ ЛОГИКА И ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ

Abstract. *We introduce a primitive recursive (PR-) realizability for predicate formulas, based on PR-realizability for arithmetic formulas, introduced by S.Salehi in 2000.The different cases from Kleene's recursive realizability are* $\rightarrow$ *and* $\forall$*, in which the recursive functions associated with, are restricted to primitive recursive. It is proved, that the set of PR-realizable predicate formulas are non-arithmetic. The similar results obtained for sets of PR-non-refutable and PR-realizable sequences.*

Введение

Работа посвящена исследованию некоторых вопросов конструктивной математической логики.

В конструктивной логике (как и в клиниевском определении реализуемости) интуиционистское понятие эффективности уточняется с помощью частично-рекурсивных функций. В математике рассматриваются также другие, более узкие классы вычислимых функций, например, примитивно рекурсивные функции.

В 2000 году иранский математик С.Салехи [9] предложил понятие реализуемости для замкнутых арифметических формул, основанное на клиниевской рекурсивной реализуемости, ограниченное использованием только примитивно рекурсивных функций. Автором было введено аналогичное понятие реализуемости для замкнутых предикатных формул и была доказана неарифметичность множества всех предикатных формул, реализуемых в этом смысле.

Результаты этой статьи частично изложены в работе [10].

Базисная логика

Для доказательства результатов настоящей работы использованы методы исследования так называемой *базисной логики* (Basic Logic). Развитие этого направления конструктивной математической логики в 80-х годах XX века в работах А.Виссера [4], В.Руйтенбурга [7], М.Ардешира [8], С.Салехи [9][1] связано с критическим пересмотром интуиционистских взглядов на природу

[1] Определения и утверждения, приведенные в этом параграфе, принадлежат перечисленным авторам.

«доказательства» и, в частности, с интерпретацией связки $A \to B$. В отличие от интерпретации ВНК[2], где под доказательством того, что $A \to B$, подразумевается некоторая конструкция, которая преобразует *доказательство* A в доказательство B, в новой интерпретации под доказательством того, что $A \to B$, подразумевается некоторая конструкция, которая использует *предположение* A для построения доказательства B.

Чтобы проиллюстрировать этот подход, приведем цитату из работы В.Руйтенбурга [7]: «*Использование предположения* A*, а не доказательства* A*, для получения доказательства* B *позволяет избежать преобразования доказательств, как в интерпретации* ВНК*. Доказать* B *стало сложнее, так как дано меньше информации. Можно сравнить предположения с закрытыми "ящиками", на которых написано, что в них содержится. Мы предполагаем, что в ящиках содержится именно то, что на них написано, от нас не требуется "открыть" их и использовать содержимое ящиков для построения доказательств… Из предположения* A *легко следует, что доказательство* A *получается из некоторого очевидного предположения. Поэтому справедливо* $A \to (T \to A)$*, а также* $A \to A$*. Но* A *не следует из* $T \to A$*, так как доказательство* $(T \to A) \to A$ *есть некоторая конструкция* p*, которая использует предположение о том, что существует конструкция* q*, которая позволяет получить доказательство* A*, для того чтобы получить доказательство* A*. Лишь предполагается, что конструкция* q *существует, она не дана. Таким образом, мы не сможем построить* p *без доказательства предположения* $T \to A$*. Пользуясь аналогией с "ящиками", нам потребовалось бы "открыть" ящик* $T \to A$».

Следствием такого подхода является то, что формулы $A \to (B \to C)$ и $B \to (A \to C)$ не эквивалентны и существенно слабее, чем $(A \wedge B) \to C$. Это явилось основанием для изменения самого понятия формулы, в частности, изменилась форма квантора всеобщности. Новый квантор всеобщности записывается в виде $\forall \mathbf{x}{:}A.B$, что фактически означает $\forall \mathbf{x}(A \to B)$.

Указанная интерпретация доказательства явилась основой для аксиоматизации секвенциального исчисления *базисной логики предикатов* BQC (Basic Predicate Calculus[3]). Исчисление BQC строится в языке логики предикатов с равенством. В язык входят предметные переменные, предикатные символы, логические символы $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\forall$, $\exists$, логические константы T и $\perp$. Выражение $\neg A$

---

[2] Brouwer-Heyting-Kolmogorov (см. [7])
[3] Буква Q в аббревиатуре BQC обозначает "Quantifier".

есть сокращенная запись для $A \to \bot$. Как только что было сказано, понятие формулы несколько отличается от понятия формулы, использовавшегося в интуиционистской логике предикатов IQC (Intuitionistic Predicate Calculus), а именно отличается случай с квантором всеобщности: если A и B – формулы, **x** – список переменных, то $\forall \mathbf{x}{:}A.B$ – формула. Аксиоматика BQC приведена в работах [7], [8].

На основе BQC строится секвенциальное исчисление *базисной арифметики* BA (Basic Arithmetic) (см. аксиоматику в [9]). Как и язык HA, язык BA содержит функциональные символы для всех примитивно рекурсивных функций. В исчислении BA, как и в HA, любой примитивно рекурсивный предикат выражается атомарной формулой.

Формулы базисной арифметики допускают интерпретацию в стандартной модели арифметики, где ее связки и кванторы понимаются в классическом смысле. Очевидно, что если секвенция выводима в BA, то ее формульный образ истинен в стандартной модели арифметики. Таким образом, базисная арифметика корректна относительно классической семантики.

Пусть A – формула в языке BQC. Обозначим через A^i формулу, полученную из A путем замены каждой ее подформулы вида $\forall x{:}B.C$ на $\forall x(B \to C)$. Очевидно, что формула A^i является теперь формулой в языке IQC. Обратно, пусть A – формула языка IQC, и A^b обозначает формулу языка BQC, полученную из A заменой любого вхождения подформулы вида $\forall x G(x)$ на $\forall x{:}T.G(x)$.

Введем понятие «n-ослабления» $(A)^n$ и «n-усиления» $(A)_n$ для формул в языке BQC[4] (см. [8]). Рекурсивно определяем для любой формулы A: $T^0A == A$, $T^{n+1}A == T \to T^nA$[5].

Для каждого натурального n положим:

«n-*ослабление*»:

$(p)^n == T^n p$ для атомарных p;

$(A \wedge B)^n == A^n \wedge B^n$;

$(A \vee B)^n == T^n(A^n \vee B^n)$;

$(A \to B)^n == A_n \to B^n$;

$(\exists x A(x))^n == T^n \exists x (A(x))^n$;

$(\forall x{:}A(x).B(x))^n == \forall x{:}(A(x))_n.(B(x))^n$;

$(T)^n == T$;

---

[4] Будем опускать скобки в тех местах, где это не приводит к разночтениям, т.е. записывая просто A^n и A_n.

[5] Под символом «длинного равенства» == здесь и далее понимаем «равенство по определению»

$(\perp)^n == T^n\perp$;

$(A\Rightarrow B)^n == A_n \Rightarrow B^n$.

«n-*усиление*»:

$(p)_n == p$ для атомарных p;

$(A\wedge B)_n == A_n \wedge B_n$;

$(A\vee B)_n == A_n \vee B_n$;

$(A\to B)_n == A^n \to B_n$;

$(\exists x A(x))_n == \exists x (A(x))_n$;

$(\forall x{:}A(x).B(x))_n == \forall x{:}(A(x))^n.(B(x))_n$;

$(T)_n == T$;

$(\perp)_n == \perp$;

$(A\Rightarrow B)_n == A^n \Rightarrow B_n$.

Нами будет использовано утверждение 1) из теоремы Ардешира о «переводе из IQC в BQC»:

Теорема 1. *Для любой секвенции* $A\Rightarrow B$

1) *существует натуральное число* m *такое, что для всех* n *таких, что* $n\geq m$, *если* IQC $\vdash A\Rightarrow B$, *то* BQC $\vdash (A^b \Rightarrow B^b)^n$;

2) *если для некоторого числа* n *верно* BQC $\vdash (A\Rightarrow B)^n$, *то* IQC $\vdash (A^i \Rightarrow B^i)$.

Доказательство. [8, Теорема 3.14]. □

Примитивно рекурсивная реализуемость

В дальнейшем нам понадобятся обозначения для следующих примитивно рекурсивных функций:

Sx – операция прибавления единицы к x;

sg(x) – примитивно рекурсивная функция равная 0 в нуле и равная 1 при всех положительных значениях аргумента;

$\langle x,y\rangle == x+(x+y)(x+y+1)/2$ – примитивно рекурсивная функция «пары» с обратными примитивно рекурсивными проекциями π_1, π_2.

$\langle x_0,\ldots,x_k\rangle == \langle\langle\ldots\langle\langle 0,x_k\rangle,x_{k-1}\rangle,\ldots x_1\rangle,x_0\rangle$ (1)

$f^*(0)==0;\quad f^*(Sx)==x$

$eq(x,0)==1\text{-}sg(x),\ \ eq(x,Sy)=sg(x)eq(f^*(x),y)$.

Введем обозначение $\sim x=y == eq(x,y)=0$.

Отметим, что BA $\vdash x=y\wedge\sim x=y\Rightarrow\perp$, однако неверно, что BA $\vdash x=y\wedge(x=y\to\perp)\Rightarrow\perp$ (см. [9]).

Пусть $f^{(n)}(x_0,\ldots,x_{n-1})$ есть n-местная частично-рекурсивная функция. Мы можем рассматривать ее как одноместную частично-рекурсивную функцию f с аргументом x, кодирующим конечную последовательность чисел $x_0,\ldots,x_{n-1}$, т.е. $f(x){=}{=}f^{(n)}(x_0,\ldots,x_{n-1})$, где $x=\langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle$ определяется по формуле (1).

Клини (см. [1]) использует так называемую *систему равенств* для задания и геделевской нумерации частично-рекурсивных функций. Мы же для задания частично-рекурсивных функций, как и в работе [6], используем слова в алфавите 0, S, I^i_m ($m=1,2,\ldots$, $1\le I\le m$), C, R, M, которые строятся по следующим правилам:

1) 0 есть 0-местный функциональный символ;
2) S есть одноместный функциональный символ;
3) I^i_m есть m-местный функциональный символ ($m=1,2,\ldots$, $1\le I\le m$);
4) если f есть m-местный функциональный символ ($m\ge 1$), а $g_1,\ldots,g_m$ суть n-местные функциональные символы ($n\ge 0$), то $Cfg_1,\ldots,g_m$ есть n-местный функциональный символ;
5) если f есть n-местный функциональный символ, а g есть (n+2)-местный функциональный символ ($n\ge 0$), то Rfg есть (n+1)-местный функциональный символ;
6) если f есть (n+1)-местный функциональный символ ($n\ge 1$), то Mf есть n-местный функциональный символ.

Символы 0, S и I^i_m считаются обозначениями соответствующих исходных примитивно рекурсивных функций. Запись вида $Cfg_1,\ldots,g_m$ – это обозначение функции, полученной суперпозицией из функций, обозначенных посредством $f,g_1,\ldots,g_m$. Функциональный символ Rfg есть обозначение для функции, полученной рекурсией из функций, обозначенных через f и g. Функциональный символ Mf есть обозначение для функции, полученной операцией минимизации из функции f. Если оператор минимизации не использовался (т.е. буква M не входит в состав «кодирующего» слова), то выражаемая таким словом частично-рекурсивная функция является примитивно рекурсивной.

Можно ввести фиксированную геделевскую нумерацию таких слов и соответствующую ей нумерацию частично-рекурсивных функций. Аналогично построим нумерацию примитивно рекурсивных функций. Для этого зафиксируем геделевскую нумерацию слов, кодирующих частично-рекурсивные функции, не содержащих символа M, т.е. кодирующих примитивно рекурсивные функции. Такая кодировка примитивно рекурсивных функций допускает чисто синтаксический перевод в клиниевскую систему равенств, поэтому существует примитивно рекурсивная функция ϕ, такая, что если x – геделевский номер примитивно рекурсивной функции в нашей записи, то $\phi(x)$ – геделевский номер той же функции в «клиниевской» записи. Обозначим частично-рекурсивную функцию с геделевским номером n через φ_n, имея в виду «клиниевский» способ нумерации, и через ψ_n, имея в виду наш способ нумерации. Тогда

$$\psi_t=\varphi_{\phi(t)}. \qquad (2)$$

Пусть T(x,y,z)==t(x,y,z)=0, где t – трехместная примитивно рекурсивная функция, представляющая клиниевский предикат $T_1(x,y,z)$. Таким образом, t(x,y,z)=0 тогда и только тогда, когда z есть геделевский номер протокола вычисления частично-рекурсивной функции с «клиниевским» геделевским номером x на аргументе y. Одноместная примитивно рекурсивная функция U выделяет результат вычисления, т.е. U(x)=y, если y есть результат вычисления частично-рекурсивной функции, протокол вычисления которого имеет геделевский номер x. Тогда

$$\varphi_x(y)=z==\exists u(T(x,y,u)\wedge U(u)=z).$$

По (2),

$$\psi_x(y)=z==\exists u(T(\phi(x),y,u)\wedge U(u)=z).$$

Лемма 1. *Функция* $\xi(x)==\psi_x(0)$ *не является примитивно рекурсивной.*

Доказательство. Пусть даны произвольные натуральные числа m и n. Положим f(x)==x+m. Композиция $C\psi_n f$ есть примитивно рекурсивная функция $\psi_n(x+m)$. Ее геделевский номер k вычисляется по m и n с `помощью примитивно рекурсивной функции k(m,n). Тогда $\psi_{k(m,n)}(x)=\psi_n(x+m)$, значит, $\psi_{k(m,n)}(0)=\psi_n(m)$. Но $\psi_{k(m,n)}(0)=\xi(k(m,n))$. Тогда, если функция ξ примитивно рекурсивна, то $W==C\xi k$ есть двуместная примитивно рекурсивная функция, являющаяся универсальной для класса всех одноместных примитивно рекурсивных функций:

$$W(m,n)=C\xi k(m,n)=\xi(k(m,n))=\psi_{k(m,n)}(0)=\psi_n(m).$$

Однако такой универсальной функции не существует. Действительно, пусть p – номер примитивно рекурсивной функции W(x,x)+1 относительно универсальной функции W, т.е. W(x,x)+1=W(p,x) для любого x. В частности, W(p,p)+1=W(p,p). Противоречие. □

Введем понятие примитивно рекурсивной (сокращенно: PR) реализуемости для арифметических формул, несколько модифицированное по сравнению с определением С.Салехи из [9], однако эквивалентное ему.

Определение 1. Формулу $x\mathbf{r}^{pr}A$ определяем индукцией по построению арифметической формулы A языка базисной арифметики:

1. $x\mathbf{r}^{pr}p==p$ для атомарных p и p= T, $\perp$;
2. $x\mathbf{r}^{pr}(A\wedge B)==(\pi_1(x)\mathbf{r}^{pr}A)\wedge(\pi_2(x)\mathbf{r}^{pr}B)$;

3. $x\mathbf{r}^{pr}(A\vee B)==(\pi_1(x)=0\wedge\pi_2(x)\mathbf{r}^{pr}A)\vee(\sim\pi_1(x)=0\wedge\pi_2(x)\mathbf{r}^{pr}B)$;
4. $x\mathbf{r}^{pr}(A\rightarrow B)==\forall y(y\mathbf{r}^{pr}A\rightarrow\psi_x(y)\mathbf{r}^{pr}B)$;
5. $x\mathbf{r}^{pr}\exists zA(z)==\pi_2(x)\mathbf{r}^{pr}A(\pi_1(x))$;
6. $x\mathbf{r}^{pr}\forall\mathbf{z}:(A(\mathbf{z}).B(\mathbf{z}))==\forall y,\mathbf{z}(y\mathbf{r}^{pr}A(\mathbf{z})\rightarrow\psi_x(\langle y,\mathbf{z}\rangle)\mathbf{r}^{pr}B(\mathbf{z}))$.

Определение 2. Секвенцию $x\mathbf{r}^{pr}(A(\mathbf{z})\Rightarrow B(\mathbf{z}))$ определяем следующим образом:

7. $x\mathbf{r}^{pr}(A(\mathbf{z})\Rightarrow B(\mathbf{z}))==y\mathbf{r}^{pr}A(\mathbf{z})\Rightarrow\psi_x(\langle y,\mathbf{z}\rangle)\mathbf{r}^{pr}B(\mathbf{z})$, причем кортеж $\mathbf{z}$ может быть пустым.

Определение 3. Замкнутая арифметическая формула A называется *PR-реализуемой* (запись: $\mathbf{r}^{pr}A$), если существует такое число x (называемое *PR-реализацией* формулы A), что арифметическая формула $x\mathbf{r}^{pr}A$ истинна в стандартной интерпретации арифметики.

Каждой секвенции сопоставляется формула – *формульный образ* данной секвенции. А именно, если дана секвенция вида

$$A_1,\ldots,A_n\Rightarrow B_1,\ldots,B_m,$$

то ей сопоставляется формула

$$T\wedge A_1\wedge\ldots\wedge A_n\rightarrow B_1\vee\ldots\vee B_m\vee\bot.$$

Определение 4. Секвенцию $A\Rightarrow B$, где A и B – замкнутые арифметические формулы, будем называть *PR-реализуемой* (запись: $\mathbf{r}^{pr}(A\Rightarrow B)$), если существует такое число x (называемое *PR-реализацией* секвенции $A\Rightarrow B$), что формульный образ секвенции $x\mathbf{r}^{pr}(A\Rightarrow B)$ истинен в стандартной интерпретации арифметики при любом значении свободной переменной.

С.Салехи доказал теорему о корректности базисной арифметики BA относительно PR-реализуемости:

Теорема 2. Если $BA\vdash A\Rightarrow B$, то $BA\vdash n\mathbf{r}^{pr}(A\Rightarrow B)$ для некоторого натурального числа n.

Доказательство. См. [9]. □

Заметим, что применить понятие PR-реализуемости к арифметической формуле, записанной в обычном языке арифметики, нельзя, так как не сформулировано понятие PR-реализуемости для формул вида $\forall x$ A, где формула A имеет вид, отличный от импликации.

Можно дать другое определение PR-реализуемости для арифметических формул в обычном языке арифметики. Будем называть такую PR-реализуемость *PR-реализуемостью «по Клини»* в отличие от введенной нами ранее PR-реализуемости «по Салехи»:

6*. $x\mathbf{r}^{pr}\forall z\, A(\mathbf{z})==\forall z(\psi_x(z)\mathbf{r}^{pr}A(z))$

(все прочие пункты определения совпадают с определением 1 PR-реализуемости «по Салехи»). Такую PR-реализуемость будем обозначать через $x\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}A$. Напомним, что для любого x функция ψ_x является примитивно рекурсивной.

Связь между двумя определениями PR-реализуемости для арифметических формул устанавливает

Теорема 3. *Пусть* $F(x_1,\ldots,x_n)$ *– арифметическая формула в обычном языке, не содержащая параметров, отличных от* $x_1,\ldots,x_n$. *Тогда существуют* $(n+1)$*-местные примитивно рекурсивные функции* α_F *и* β_F *такие, что каковы бы ни были числа* $k_1,\ldots,k_n$, *выполняется:*

1) *если* $e\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}F(k_1,\ldots,k_n)$, *то* $\alpha_F(e,k_1,\ldots,k_n)\mathbf{r}^{pr}F^b(k_1,\ldots,k_n)$;

2) *если* $e\mathbf{r}^{pr}F^b(k_1,\ldots,k_n)$, *то* $\beta_F(e,k_1,\ldots,k_n)\ \mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}F(k_1,\ldots,k_n)$.

В частности, замкнутая арифметическая формула F *PR-реализуема «по Клини» тогда и только тогда, когда ее перевод* F^b *PR-реализуем «по Салехи».*

Доказательство. См. [10]. □

Пример 1. *Неверно, что* $\mathbf{r}^{pr}\forall x{:}T.\exists y(\psi_x(0)=y)$. *Однако верно, что* $\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}\forall x(T\rightarrow\exists y(\psi_x(0)=y))$.

Доказательство. Покажем, что формула $\forall x{:}T.\exists y(\psi_x(0)=y)$ не является PR-реализуемой «по Салехи». Действительно, если для некоторого натурального числа e формула $e\mathbf{r}^{pr}\forall x{:}T.\exists y(\psi_x(0)=y)$ истинна в стандартной интерпретации арифметики, то, по определению 1, формула $\forall u,x(u\mathbf{r}^{pr}T\rightarrow\psi_e(\langle u,x\rangle)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y))$ истинна в стандартной интерпретации арифметики. Это справедливо тогда и только тогда, когда формула $\forall x(T\rightarrow\psi_{e*}(x)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y))$ истинна в стандартной интерпретации арифметики. Здесь e* обозначает номер примитивно рекурсивной функции, такой, что $\psi_{e*}(x_1,x_2,\ldots,x_l)=\psi_e(0,x_1,x_2,\ldots,x_l)$, т.е. изъят один не влияющий на результат параметр, соответствующий PR-реализации истины T. Значит, для любого числа x формула $\psi_{e*}(x)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y)$ истинна в стандартной интерпретации арифметики. Значит, формула $\pi_2(\psi_{e*}(x))\mathbf{r}^{pr}(\psi_x(0)=\pi_1(\psi_{e*}(x)))$ истинна в стандартной интерпретации арифметики, т.е. существует примитивно рекурсивная функция $C\pi_1\psi_{e*}$ такая, что $C\pi_1\psi_{e*}(x)=\psi_x(0)$. Противоречие с леммой 1.

В то же время верно, что $\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}\forall x(T\rightarrow\exists y(\psi_x(0)=y))$. Действительно, для того чтобы формула $\forall x(T\rightarrow\exists y(\psi_x(0)=y))$ была PR-реализуемой по Клини, нам требуется по данному x найти номер примитивно рекурсивной функции, отображающей любое число в PR-реализацию формулы $\exists y(\psi_x(0)=y)$. Таким номером будет число $\Lambda t.\langle C\psi_x0(t),0\rangle$. Здесь 0 обозначает тождественно равную нулю примитивно рекурсивную функцию. Подчеркиваем, что нам не потребовалось искать значение $C\psi_x0(t)$, а потребовалось лишь указать способ ее вычисления (так как $\psi_x 0(t)$ является примитивно рекурсивной, то полученная функция примитивно рекурсивна, как композиция примитивно рекурсивных функций). □

Будем называть арифметическую формулу *негативной*, если она не содержит связки дизъюнкции $\vee$ и квантора существования $\exists$.

Следующая лемма справедлива как для PR-реализуемости «по Салехи», так и для PR-реализуемости «по Клини».

Лемма 2. *Пусть* $A(x_1,\ldots,x_n)$ *– негативная арифметическая формула, не содержащая параметров, отличных от* $x_1,\ldots,x_n$. *Тогда, каковы бы ни были числа* $k_1,\ldots,k_n$, *формула* $A(k_1,\ldots,k_n)$ *PR-реализуема тогда и только тогда, когда она классически истинна в стандартной интерпретации языка арифметики. В частности, если А – замкнутая негативная арифметическая формула, то формула* А *PR-реализуема тогда и только тогда, когда она классически истинна.*

Доказательство. Проводим рассуждения для PR-реализуемости «по Салехи» индукцией по построению негативной формулы $A(x_1,\ldots,x_n)$. При этом будем иметь в виду, что в некоторых подформулах формулы А некоторые переменные из списка $x_1,\ldots,x_n$ могут и не встречаться. Параллельно с доказательством леммы 2 мы для каждой негативной формулы $A(x_1,\ldots,x_n)$ будем строить n-местную примитивно рекурсивную функцию g_A такую, что каковы бы ни были натуральные числа $k_1,\ldots,k_n$, если формула $A(k_1,\ldots,k_n)$ PR-реализуема, то

$$g_A(k_1,\ldots,k_n)\mathbf{r}^{pr}A(k_1,\ldots,k_n).$$

В частности, если А – замкнутая формула, то $g_A(0,\ldots,0)$ есть такое число, что если формула А PR-реализуема, то $g_A(0,\ldots,0)\mathbf{r}^{pr}A$.

Приведем здесь доказательство для случая, когда А – атомарная формула (в частности, Т или $\perp$). В этом случае, по определению 1, каковы бы ни были натуральные числа $k_1,\ldots,k_n$,

$$x\mathbf{r}^{pr}A(k_1,\ldots,k_n)=A(k_1,\ldots,k_n).$$

По определению 3 формула $A(k_1,\ldots,k_n)$ PR-реализуема тогда и только тогда, когда формула $A(k_1,\ldots,k_n)$ является классически истинной в стандартной интерпретации языка арифметики.

$$g_A(k_1,\ldots,k_n)==0.$$

Доказав лемму 2 для PR-реализуемости «по Салехи», с помощью теоремы 3 получаем доказательство и для PR-реализуемости «по Клини», так как преобразование $(\ )^b$ не меняет классической истинности формулы в стандартной интерпретации языка арифметики. □

Неарифметичность логики предикатов

Арифметическим примером предикатной формулы F будем называть арифметическую формулу $F(\lfloor\Phi\rfloor)$, где Φ – ряд арифметических формул, допустимый для подстановки в F, а $F(\lfloor\Phi\rfloor)$ – результат подстановки арифметических формул из ряда Φ вместо предикатных букв F.

Определение 5. Будем говорить, что замкнутая предикатная формула F *PR-реализуема «по Салехи»* (*«по Клини»*), если любой ее замкнутый арифметический пример PR-реализуем «по Салехи» («по Клини»). Обозначение: $\mathbf{r}^{pr}F$ ($\mathbf{r}^{pr}{}_{Kl}F$).

Теорема 4. *Пусть* F *есть замкнутая предикатная формула языка* BQC. *Тогда, если* BQC $\vdash\Rightarrow F$, *то* $\mathbf{r}^{pr}F$.

Доказательство. Пусть BQC $\vdash\Rightarrow F$, т.е. существует какой-то вывод секвенции $T\Rightarrow F$ в системе BQC. Если Φ есть ряд арифметических формул, допустимый для подстановки в F, то, заменяя каждую формулу в этом выводе на ее арифметический пример, получим вывод секвенции $T\Rightarrow F(\lfloor\Phi\rfloor)$ в системе BA. Значит, по теореме 2, существует число n такое, что BA $\vdash \mathbf{n}\mathbf{r}^{pr}(T\Rightarrow F(\lfloor\Phi\rfloor))$. Следовательно, BA $\vdash T\Rightarrow\psi_n(0)\mathbf{r}^{pr}F(\lfloor\Phi\rfloor)$, значит формульный образ секвенции $T\Rightarrow\psi_n(0)\mathbf{r}^{pr}F(\lfloor\Phi\rfloor)$ классически истинен, следовательно, формула $\psi_n(0)\mathbf{r}^{pr}F(\lfloor\Phi\rfloor)$ классически истинна, поэтому арифметический пример $F(\lfloor\Phi\rfloor)$ PR-реализуем. По определению 5, справедливо $\mathbf{r}^{pr}F$. □

В работе В.Е.Плиско [2] (см. также [3, 5, 6]) доказано, что множество всех реализуемых предикатных формул (т.е. реализуемых по Клини) неарифметично. Аналогичный результат справедлив и для PR-реализуемости:

Теорема 5. *Множество всех замкнутых PR-реализуемых предикатных формул неарифметично.*

Доказательство теоремы 5, однако, не является прямым следствием результатов из [2]. Укажем общую схему доказательства.

Как и в [6], через T^2 обозначим некоторое расширение формальной системы интуиционистской арифметики HA (в работе [5] вместо обозначения T^2 использовалось обозначение CHA^2). T^2 содержит как бы «два набора арифметики» – саму систему HA и систему, которая получается из нее заменой каждого (скажем, n-местного) функционального символа f на (n+1)-местный предикатный символ P_f. Описанную операцию, превращающую арифметическую формулу в предикатную, будем обозначать через F’, а обратную ей – через F° (подробнее о системе T^2 см. [5], [6]).

Система T^2 непротиворечива относительно HA.

Теорема 6. *Для негативных замкнутых арифметических формул F справедливо* $T^2 \vdash F \equiv F'$.

Доказательство. [5, Теорема 7]. □

Пусть F – замкнутая негативная арифметическая формула в языке НА. По теореме 6 имеем $T^2 \vdash F \equiv F'$. Этот вывод содержит конечное число аксиом теории T^2. Обозначим конъюнкцию этого множества аксиом через $Eq \wedge Ar \wedge Ind \wedge Q$, где Ar – конъюнкция аксиом в чистом языке арифметики НА без аксиом индукции, Q – конъюнкция аксиом в чисто предикатном языке без аксиом индукции, Eq – конъюнкция аксиом равенства для предикатных символов, Ind – конъюнкция примеров аксиом индукции. Получаем, что в секвенциальном интуиционистском исчислении предикатов выводима формула $Eq \wedge Ar \wedge Ind \wedge F \wedge Q \Rightarrow F'$. По теореме Ардешира (теорема 1) получаем

$$\vdash_{BQC} (Eq^b{}_n \wedge Ar^b{}_n \wedge Ind^b{}_n \wedge F^b{}_n \wedge Q^b{}_n) \Rightarrow F'^b{}_n$$

для всех достаточно больших чисел n. По теореме о корректности базисной арифметики (теорема 2) получаем

$$\mathbf{r}^{pr}(Eq^b{}_n(\lfloor\Phi\rfloor) \wedge Ar^b{}_n(\lfloor\Phi\rfloor) \wedge Ind^b{}_n(\lfloor\Phi\rfloor) \wedge F^b{}_n(\lfloor\Phi\rfloor) \wedge \wedge Q^b{}_n(\lfloor\Phi\rfloor) \Rightarrow F'^b{}_n(\lfloor\Phi\rfloor)) \qquad (3)$$

где Φ – произвольный ряд арифметических формул Φ, допустимых для подстановки в формулы $Ar^b{}_n$, $Ind^b{}_n$, $F'^b{}_n$ и $Q^b{}_n$. Используя лемму 2, можно доказать, что PR-реализуемы формулы $Ar^b{}_n(\Phi)$, $Q^{\circ b}{}_n(\Phi)$, $F^b{}_n(\Phi)$. Доказывается, что по PR-реализации формулы $Q^b{}_n$ примитивно рекурсивным способом можно найти PR-реализации формул $Ind^b{}_n(\Phi)$ и $Eq^b{}_n(\Phi)$.

Пусть $F^* == Q^b{}_n \rightarrow F'^b{}_n$. Используя (3), можно доказать следующую лемму:

Лемма 3. Если формула F является замкнутой негативной арифметической формулой, то для достаточно больших натуральных чисел n справедливо, что $\mathbf{r}^{pr}F^b$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{r}^{pr}F^*$.

Очевидно, что любая арифметическая формула классически эквивалентна некоторой негативной арифметической формуле. Тогда, в силу теоремы Тарского, множество всех замкнутых классически истинных негативных арифметических формул неарифметично. По лемме 2 это множество совпадает с множеством всех замкнутых PR-реализуемых негативных арифметических формул. Поэтому множество PR-реализуемых негативных арифметических формул неарифметично. По лемме 3, множество PR-реализуемых негативных арифметических формул 1-1 сводится к множеству PR-реализуемых предикатных формул. Следовательно, множество PR-реализуемых предикатных формул неарифметично. □

Введем определения PR-неопровержимой предикатной формулы и PR-неопровержимой секвенции.

Пусть A – предикатная формула языка BQC. Пусть $P_1,\ldots,P_k$ – набор входящих в нее предикатных символов $P_i(x_1,\ldots,x_{n\,i})$. Вместо A будем тогда писать $A(P_1,\ldots,P_k)$.

Определение 6. Будем говорить, что система арифметических формул $\Phi_1(x,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_k(x,\mathbf{x})$ является *PR-опровержением* формулы A, если арифметическая формула $\forall x{:}T.A(\Phi_1,\ldots,\Phi_k)$ не PR-реализуема. Если у формулы A нет PR-опровержения, то она называется *PR-неопровержимой*.

Теорема 7. *Множество всех замкнутых PR-неопровержимых предикатных формул неарифметично.*

Пусть $A\Rightarrow B$ – секвенция, где A, B – предикатные формулы языка BQC. Пусть $P_1,\ldots,P_k$ – набор входящих в них предикатных символов $P_i(x_1,\ldots,x_{ni})$. Вместо $A\Rightarrow B$ будем тогда писать $A(P_1,\ldots,P_k)\Rightarrow B(P_1,\ldots,P_k)$.

Определение 7. Будем говорить, что система арифметических формул $\Phi_1(x,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_k(x,\mathbf{x})$ является *PR-опровержением* секвенции $A\Rightarrow B$, если для любого числа x и любых значений параметров **x** секвенция $A(\Phi_1(x,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_k(x,\mathbf{x}))\Rightarrow B(\Phi_1(x,\mathbf{x}),\ldots,\Phi_k(x,\mathbf{x}))$ не PR-реализуема. Если у секвенции $A\Rightarrow B$ нет PR-опровержения, то она называется *PR-неопровержимой*.

Лемма 4. *Замкнутая предикатная формула* $A(P_1,\ldots,P_k)$ *PR-неопровержима тогда и только тогда, когда секвенция* $T\Rightarrow A(P_1,\ldots,P_k)$ *PR-неопровержима*.

Теорема 8. *Множество всех PR-неопровержимых секвенций неарифметично.*

Доказательство. По лемме 4, множество PR-неопровержимых предикатных формул 1-1 сводится к множеству PR-неопровержимых секвенций (1-1 сводящей функцией является функция $f(A){=}{=}T\Rightarrow A$). По теореме 5 множество всех PR-неопровержимых предикатных формул неарифметично. Следовательно, множество всех PR-неопровержимых секвенций неарифметично. □

В заключение приведем пример интуиционистски выводимой секвенции, которая является PR-опровержимой.

Рассмотрим интуиционистски выводимую секвенцию $(T\to P)\Rightarrow P$, где P – некоторый предикатный символ. Укажем арифметическую формулу F(x), которая будет PR-опровержением секвенции $(T\to P)\Rightarrow P$.

Пусть $F(x){=}{=}\exists y(\psi_x(0)=y)$. Покажем, что формула F(x) является PR-опровержением секвенции $(T\to P)\Rightarrow P$, т.е. секвенция

$(T\to\exists y(\psi_x(0)=y))\Rightarrow \exists y(\psi_x(0)=y)$ (4)

не PR-реализуема. Действительно, допустим, что число e PR-реализует секвенцию (4). Это значит, что каково бы ни было число x, если $a\mathbf{r}^{pr}(T\to\exists y(\psi_x(0)=y))$, то $\psi_e(\langle a,x\rangle)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y)$. Как и в примере 1, имеем, что $\Lambda t.\langle C\psi_x 0(t),0\rangle\mathbf{r}^{pr}(T\to\exists y(\psi_x(0)=y))$ (здесь 0(t) обозначает тождественно равную нулю примитивно рекурсивную функцию). Значит, $\psi_e(\langle\Lambda t.\langle C\psi_x 0(t),0\rangle,x\rangle)\mathbf{r}^{pr}\exists y(\psi_x(0)=y)$. Получили примитивно рекурсивный способ вычисления $\psi_x(0)$ по x, что противоречит лемме 1.

Итак, интуиционистски выводимая секвенция $(T\to P)\Rightarrow P$, где P есть некоторый предикатный символ, является PR-опровержимой.

Автор благодарит своего научного руководителя В.Е.Плиско за постановку задачи и ценные обсуждения, а также А.В.Чагрова и В.Х.Хаханяна за полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. Москва: ИЛ, 1957.
2. *Плиско В.Е.* О реализуемых предикатных формулах // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 3. С. 553-556.
3. *Плиско В.Е.* Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул // Известия АН СССР. 1977. Т. 41, № 3. С. 483-502.
4. *Visser A.* A propositional logic with explicit fixed points // Studia Logica. 1981. Vol. 40. P. 155-175.
5. *Плиско В.Е.* Конструктивная формализация теоремы Тенненбаума и ее применения // Математические заметки. 1990. Т. 48, № 3. С. 108-118.
6. *Плиско В.Е.* Формализация теоремы Тенненбаума и ее применения // Депонировано в ВИНИТИ. 1992. № 1853-В92.
7. *Ruitenburg W.* Basic Logic and Fregean set theory // H.Barendregt, M.Bezem, J.W.Klop (eds). Dirk Van Dalen Festschrift, Quaestions Infinitae. Department of Philosopy. Utrecht University, 1993, vol. 5. P. 122-142.
8. *Ardeshir M.* A Translation of Intuitionistic Predicate Logic into Basic Predicate Logic // Studia Logica. 1999. Vol. 62. P. 341-352.
9. *Salehi S.* Primitive Recursive Realizability and Basic Arithmetic // The Bulletin of Symbolic Logic. 2001. Vol. 7. № 1. P. 147-148.
10. *Витер Д.А.* Примитивно рекурсивная реализуемость и логика предикатов // Рукопись депонирована в ВИНИТИ. 06.08.2001. № 1830-В2001. 86 с.