М.Н.Рыбаков, А.В.Чагров

КОНСТАНТНЫЕ ФОРМУЛЫ В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ: ПРОБЛЕМА РАЗРЕШЕНИЯ*

Abstract. *The main result: the provability problem of constant formulas is* PSPACE-*complete for modal logics* **K** , **K4**. *Some closed questions are discussed.*

Решение рассматриваемой в данной статье проблемы было стимулировано двумя обстоятельствами.

Во-первых, довольно часто при изучении той или иной логики высказываний порой забывают, что формулы – это схемы высказываний, а не сами высказывания, и потому, решив ту или иную проблему для логики в целом, неплохо бы посмотреть, как это решение соотносится со множеством самих высказываний. (Краткое содержательное обсуждение высказываний в логиках высказываний читатель может найти в [1]. В частности, предлагается считать, что типичным высказыванием в логике высказываний является константная формула, т.е. формула без переменных.) Например, если решена проблема разрешимости логики и/или проблема ее разрешения[1], то что можно сказать про решение сопутствующей проблемы для константных формул (или, быть может, формул с ограниченным числом используемых переменных)? В конце концов, схемы высказываний изучаются именно для удобного выделения видов правильных (истинных в какой-либо точной семантике) высказываний. В качестве довольно простого примера можно указать модальную логику **S4**. Эта логика разрешима, однако алгоритмически довольно сложна – проблема доказуемости в **S4** PSPACE-полна: известен разрешающий ее алгоритм с полиномиальными от длины проверяемой формулы затратами памяти, а можно ли ее разрешать (хотя бы недетерми-

* Работа выполнена при поддержке Фонда Минобразования РФ, грант № Е00–1.0–175, и РГНФ, грант № 01–03–00403.

[1] Напомним, что проблема разрешимости состоит в том, что требуется узнать, разрешима ли логика, т.е. существует ли соответствующий алгоритм, а проблема же разрешения – в указании самого алгоритма. Почти всегда эти проблемы решаются одновременно, хотя имеются случаи, когда первая проблема решена, а вторая «почти безнадежна». Следует иметь в виду, что помимо этих проблем имеются еще сложностные их разновидности: проблема оптимизации разрешающего алгоритма – требуется найти разрешающий алгоритм (или изучить возможность его построения) с минимальными затратами времени, памяти и т.п.

нированным!) алгоритмом с полиномиальными затратами времени, неизвестно. Последний вопрос тесно связан с одной из краеугольных проблем теории сложности алгоритмов и вычислений – «Верно ли, что PSPACE = NP?»; по этой проблематике мы отсылаем читателя к весьма популярно написанной монографии [5], соотношения же сложностных проблем с алгоритмическими проблемами (не)доказуемости (точнее, (не)принадлежности) в модальных и суперинтуиционистских логиках подробно обсуждаются в [4] и [11]. Так вот, если ограничиться константными формулами, то положение меняется коренным образом: всякая константная формула с помощью имеющихся в логике **S4** эквивалентностей, соответствующих классическим таблицам истинности, например,

$(\beta \wedge \alpha) \leftrightarrow \beta$, $(\beta \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$, $(\beta \to \beta) \leftrightarrow \alpha$, $\neg\beta \leftrightarrow \alpha$

и т.п., а также «стирающих» эквивалентностей

$\Box\beta \leftrightarrow \beta$ и $\Box\alpha \leftrightarrow \alpha$

довольно быстро (за не более чем квадратичное время от длины исходной формулы) приводится к формуле α (и тогда исходная формула принадлежит **S4**) или к формуле β (тогда она не принадлежит **S4**). Ясно, что сказанное останется справедливым и для любого (даже неразрешимого!) расширения **S4**, точнее, для расширений минимальной модальной логики, в которой указанные эквивалентности действуют, каковой в нормальных логиках является $\mathbf{D} = \mathbf{K} + (\alpha$. Для иных логик, конечно, вопрос о константных формулах может оказаться и не столь простым. Ниже мы увидим примеры возможных ситуаций.

Во-вторых, ограничение числа переменных в рассматриваемых формулах, с одной стороны, содержательно естественно, а с другой – приводит во многих случаях к существенному снижению сложности вычислений при реализации уже имеющихся разрешающих алгоритмов. Это видно и на упомянутом примере **S4**.

Однако это, быть может, не самый интересный пример. Скажем, классическая логика высказываний вряд ли в настоящее время может считаться реально разрешимой – проблема принадлежности к ней coNP-полна (или, что то же самое, проблема непринадлежности к ней NP-полна). Заметим, что «главный вклад» в экспоненту дает число переменных, а не просто длина тестируемой формулы: если ограничить количество используемых переменных фиксированным числом m, то получившийся фрагмент уже оказывается полиномиально (не более чем квадратично) по времени разрешимым (детерминированным алгоритмом); ведь при построении таблицы истинности для формулы от m переменных достаточно провести вычисления в 2^m строках, а в каждой из них время работы полиномиально. Хотя число 2^m может быть и «страшно большим», но оно фиксировано! Другим примером является интуиционистская логика **Int** и ее фрагмент из формул от одной лишь переменной: проблема доказуемости в **Int** является PSPACE-полной [9], но для формул от одной переменной имеется простой (не более чем квадратичный по временным затратам) алгоритм, основанный на «лестнице» И.Нишимуры [8]. Последний факт плюс упомянутое наблюдение про классическую логику привели одного из авторов в свое время (лет пятнадцать-двадцать назад) к гипотезе, что всякий фрагмент **Int** с фиксированным конечным числом переменных полиномиально разрешим детерминированным алгоритмом, причем степень полинома может зависеть от числа переменных. Аналогичной была гипотеза и про **S4**, да и многие другие модальные логики. Как же далеко все это от истины!

Не так давно мы обнаружили статью [6][2], в которой доказывается для модальных логик **K**, **T**, **S4**, что их фрагменты из формул от одной (!) переменной обладают PSPACE-полной проблемой разрешения. Хотя в реализации идей для **S4** в [6] имеется неточность, сами идеи верны и многообещающи. Именно эти идеи мы развиваем здесь для нескольких пар ⟨логика, число переменных⟩, не рассмотренных в [6], и исправляем упомянутую неточность.

Прежде всего, рассмотрим нормальные модальные логики, содержащиеся в **K4**, наиболее важными из которых являются наибольшая и наименьшая – **K4** и **K**. В [7] для нескольких логик, среди которых **K**, **S4**, описаны разрешающие алгоритмы, работающие с полиномиальными затратами памяти. Небольшая модификация алгоритма для **S4** дает соответствующий алгоритм для **K4** (логика **K4** в [7] не упоминается). Поэтому для наших целей будет достаточно обосновать только PSPACE-трудность проблем разрешения интересующих нас фрагментов. В [7] PSPACE-трудность обосновывается с помощью формул, во множестве которых используется бесконечно много переменных (автор и не ставил цели ограничивать это количество). Мы обратимся к возможности использования константных формул для обоснования PSPACE-трудности проблем разрешения.

Сначала докажем PSPACE-трудность проблемы выполнимости формул для логики **K4**. Напомним (см. [5], [10]), что проблема называется PSPACE-полной, если она

---

[2] «О, сколько нам открытий чудных…» может дать необозримое море литературы, столь недоступное в нашей стране. В данном случае нам помогла интернетовская домашняя страница автора.

- принадлежит классу PSPACE, т.е. может быть решена с затратами памяти, зависящими полиномиально от длины входа;
- является PSPASE-трудной, т.е. любая проблема класса PSPACE сводится к ней с помощью алгоритма, время работы которого зависит полиномиально от длины аргумента.

Будем считать, что модальные формулы строятся в языке, содержащем пропозициональные переменные $p_1, p_2, p_3, \ldots$, константу $\bot$, булевы связки $\wedge$, $\vee$, $\to$ и оператор необходимости $\Box$. При записи модальных формул будем также использовать связку $\neg$ и модальный оператор возможности (, понимая их как обычные сокращения.

Для дальнейших рассуждений будет использоваться семантика Крипке. Основные определения, связанные с этой семантикой, стандартны, см., например, [3], [4].

Известно, что множество всех модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке, образует логику **K**; логика **K4** может быть определена как множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке с транзитивными отношениями достижимости.

Итак, обратимся к проблеме доказуемости в модальной логике **K4**, т.е. проблеме выяснения по произвольной модальной формуле φ, верно ли, что $\varphi \in$ **K4**. Ясно, что $\varphi \notin$ **K4** тогда и только тогда, когда формула $\neg\varphi$ истинна в некоторой **K4**-модели Крипке, т.е. $\neg\varphi$ является **K4**-выполнимой, поэтому проблема доказуемости в **K4** может быть заменена проблемой **K4**-выполнимости. Более точно, если мы докажем, что проблема **K4**-выполнимости PSPACE-трудна, то это даст и PSPACE-трудность проблемы доказуемости в **K4**. Здесь важно то, что класс PSPACE замкнут относительно дополнения, см. [5]; скажем, в случае класса NP не доказано и не опровергнуто, что он замкнут относительно дополнения (это равносильно утверждению NP = coNP), и потому, скажем, связь сложностных аспектов доказуемости в классической логике высказываний и выполнимости формул этой логики (т.е. булевых формул) не столь ясна.

Для обоснования PSPACE-трудности проблемы **K4**-выполнимости нам достаточно свести к этой проблеме какую-нибудь PSPACE-полную проблему. В качестве последней мы возьмем проблему выполнимости булевых формул с кванторами (БФК-выполнимость), при этом можно ограничиться формулами вида $\varphi = Q_1 p_1 \ldots Q_n p_n\ \varphi'$, где $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, а φ' – бескванторная булева формула от переменных $p_1, \ldots, p_n$, см. [5], [10].

Представим требуемое эффективное преобразование формул БФК в модальные формулы, являющееся незначительной модификацией преобразования Р. Ладнера [7].

Нам понадобятся вспомогательные пропозициональные переменные $p_{n+1}, \dots , p_{2n+2}$, которые для удобства их восприятия будем обозначать как $q_0, \dots , q_{n+1}$. С их помощью мы будем последовательно «объяснять», что значит Q_1p_1, Q_2p_2, Q_2p_3 и т.д. в зависимости от того, каков очередной кванторный символ Q_i – $\forall$ или $\exists$. Если $Q_i = \forall$, то мы должны средствами модальных формул сказать, что переменной p_i следует придавать оба варианта значения истинности и при каждом проводить дальнейшие вычисления значения формулы, а если $Q_i = \exists$, то придать одно значение из двух возможных вариантов. Каждое такое «объяснение» будем называть «раскрытием» квантора.

Следующая формула будет означать, что если мы «раскрыли» i кванторов, то «раскрыли» и $(i – 1)$ кванторов:

$$A = \underset{i=1}{\overset{n+1}{\omega}} (q_i \to q_{i-1}).$$

Если при «раскрытии» i-го квантора мы придали некоторое истинностное значение переменной p_i, то оно должно сохраниться при раскрытии последующих кванторов. Это условие описывает формула

$$B = \underset{i=1}{\overset{n}{\omega}} [q_i \to (p_i \to \Box(q_i \to p_i)) \wedge (\neg p_i \to \Box(q_i \wedge \neg q_{n+1} \to \neg p_i))].$$

При выписывании формулы B можно было бы обойтись и без переменной q_{n+1}, но, тем не менее, ее использование не случайно, и сыграет свою роль в дальнейшем.

В соответствии с определением истинности формул, начинающихся с квантора всеобщности, опишем, как нужно «раскрывать» каждый i-ый квантор всеобщности. Нужно рассмотреть два случая – когда переменная p_i принимает значение «истина» и когда p_i принимает значение «ложь», что описывается конъюнкцией формул

$$C = \underset{\{i\,:\,Q_{i+1}=\forall\}}{\omega} [q_i \wedge \neg q_{i+1} \to ((q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2} \wedge p_{i+1})];$$

$$D = \underset{\{i\,:\,Q_{i+1}=\forall\}}{\omega} [q_i \wedge \neg q_{i+1} \to ((q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2} \wedge \neg p_{i+1})].$$

Квантор существования «раскрывается» проще: переменная p_i должна принять какое-нибудь значение, а поскольку формула $p_i \vee \neg p_i$ является тождественно истинной, то формула, описывающая «раскрытие» кванторов существования, входящих в φ, выглядит следующим образом:

$$E \;=\; \underset{\{i\,:\,Q_{i+1}=\exists\}}{\omega} [q_i \wedge \neg q_{i+1} \to ((q_{i+1} \wedge \neg q_{i+2})].$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы записать модальную формулу φ^*, которая описывает тот факт, что булева формула с кванторами φ истинна. Положим

$$\varphi^* \;=\; q_0 \;\wedge\; \neg q_1 \;\wedge\; \Box A \wedge \Box B \;\wedge\; \Box C \wedge \Box D \wedge \Box E \wedge \Box(q_n \wedge \neg q_{n+1} \to \varphi').$$

Заметим, что формула φ^* выписывается по φ за время, ограниченное полиномом от длины φ. В самом деле, не считая фиксированных частей φ^* (типа начала $q_0 \wedge \neg q_1$), на выписывание формул A, B, C, D, E ввиду их вполне регулярного вида уйдет времени $c \cdot n$ для некоторой константы c, а кроме того, нужно переписать φ', затратив для этого уж не более $c' \cdot |\varphi'|^2$ тактов времени (посимвольное переписывание), где c' – константа, а $|\varphi'|$ – длина формулы φ'. Кроме того, несложно показать, что

$$\varphi \textit{ истинна} \iff \varphi^* \textit{ является } \mathbf{K4}\textit{-выполнимой.} \qquad (*)$$

Для обоснования ($\Rightarrow$) заметим, что истинность φ показывает нам, как построить нужную **K4**-модель. А именно в качестве **K4**-шкалы берем транзитивное рефлексивное (для определенности) дерево высоты $n + 1$, ветвление которого определяется так: из мира уровня $i - 1$ (уровень считаем от корня, при этом сам корень находится на уровне 0) достижимы ровно два мира уровня i, если $Q_i = \forall$, и достижим ровно один мир уровня i, если $Q_i = \exists$. Оценка переменных такова: q_i истинна в точности в тех мирах, уровень которых больше или равен i; если a и b – два мира уровня i, имеющие ровно одного общего предка уровня $i - 1$, то для одного из них полагаем, что в нем и во всех достижимых из него мирах истинна переменная p_i, а в другом и во всех достижимых из него мирах переменная p_i ложна; если a и b – два мира уровня $i - 1$ и i соответственно, такие, что b – единственный мир уровня i, достижимый из a, то полагаем, что переменная p_i оценивается в a в точности так, как произошел выбор оценки p_i при обосновании истинности φ в ходе «разбора» кванторной приставки на i-ом шаге, т.е. если для набора истинностных значений в мире a переменных $p_1, \dots , p_{i-1}$ была выбрана «истина», то мы полагаем, что p_i истинна в b и во всех мирах, достижимых из b, а если значением p_i была выбрана «ложь», то полагаем, что p_i ложна в b и во всех мирах, достижимых из b; во всех остальных случаях каждой переменной в каждом мире приписывается оценка «ложь». Ясно, что при таким образом определяемой оценке в мирах уровня n и выше сформировались в точности те наборы истинностных значений переменных $p_1, \ldots, p_n$, которые были образованы при обосновании истинности φ, а потому во всех мирах уровня n (т.е. в «самых верхних» мирах) окажется истинной формула φ'. Поскольку во всех других мирах модели ложна переменная q_n, мы установили истинность формулы $\Box(q_n \wedge \neg q_{n+1} \to \varphi')$ в корне. Проверка истинности в корне всех остальных конъюнктивных членов φ^* не составляет труда: по сути, данное выше словесное описание определения оценки есть прочтение этих конъюнктивных членов. Таким образом, φ^* истинна в построенной **K4**-модели.

В обосновании ($\Leftarrow$) будем кратки, учитывая опыт обоснования ($\Rightarrow$). Если φ^* истинна в некотором мире a некоторой **K4**-модели, то конъюнктивные члены φ^* позволяют «шаг за шагом» выделить подмодель, являющуюся деревом, сходным с тем, которое строилось в обосновании ($\Rightarrow$), разве что некоторые миры могут оказаться иррефлексивными, в мирах уровня n которого истинна формула φ', а наборы значений переменных $p_1, \ldots, p_n$ в мирах уровня n составляют достаточно представительную выборку для обоснования истинности φ.

Тем самым доказана

Лемма 1. *Проблема БФК-выполнимости полиномиально сводится к проблеме* **K4**-*выполнимости и к проблеме доказуемости в* **K4**.

С учетом наличия алгоритма, разрешающего **K4** с полиномиальными затратами памяти, получаем

Следствие 2. (i) *Проблема доказуемости формул в* **K4** *является* PSPACE-*полной.* (ii) *Проблема* **K4**-*выполнимости формул является* PSPACE-*полной.*

Отметим, что только что приведенные факты и их обоснование не новы. Цель состояла в их предоставлении для дальнейшей модификации в наших целях. При этом нам будет важно, что дерево, в котором выполнима формула φ^* (при условии, что булева формула с кванторами φ истинна, разумеется), состоит именно из рефлексивных миров: этот факт окажется полезным при обосновании леммы 3, а также леммы 9.

Положим для всякого $m \in \{1, \ldots, 2n+2\}$

$$\alpha_m \quad = \quad \Box((^{m}\Box\beta \wedge \neg(^{m+1}\Box\beta \to \Box((\alpha \to (\Box\beta)).$$

Заметим, что формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}$ выписываются по φ^* с полиномиальными затратами времени, поскольку для некоторой константы c

$$|\, \alpha_m \,| \text{ ™ } c \cdot m \text{ ™ } c \cdot (2n+2) \text{ ™ } c \cdot |\, \varphi^* \,|.$$

Обозначим через φ_α* формулу, получающуюся из формулы φ* подстановкой формул $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+2}$ вместо переменных $p_1, \dots, p_{2n+2}$ соответственно. Формула φ_α* выписывается с полиномиальными затратами времени от длины φ*, так как

$$| \varphi_\alpha^* | \leqslant max\{| \alpha_1 |, \dots, | \alpha_{2n+2} |\} \cdot | \varphi^* | \leqslant c \cdot | \varphi^* |^2.$$

Итак, получившаяся формула φ_α* является константной и выписывается по формуле φ* с полиномиальными затратами времени от длины φ*.

Лемма 3. *Формула* φ_α* **K4**-*выполнима тогда и только тогда, когда формула* φ* **K4**-*выполнима.*

Доказательство. Пусть формула φ* не является **K4**-выполнимой. Тогда $\neg\varphi^* \in$ **K4**. Но формула $\neg\varphi_\alpha$* является подстановочным примером формулы $\neg\varphi$*, поэтому $\neg\varphi_\alpha^* \in$ **K4**, а следовательно, формула φ_α* не является **K4**-выполнимой.

Пусть теперь φ* является **K4**-выполнимой. По доказанному ранее (см. обоснование утверждения (∗)) это означает, что булева формула с кванторами φ, по которой и была построена φ*, является тождественно истинной. В этом случае, как было показано выше, формула φ* выполнима в корне w_0 некоторого рефлексивно-транзитивного дерева $M = \langle W, R, v\rangle$ высоты $n + 1$. Заметим, что оценка v в этом дереве наследственна: для всякой переменной p и для всяких миров w' и w'' таких, что w_1Rw'' и $(M, w') \models p$, имеет место отношение $(M, w'') \models p$.

Мы расширим модель $M = \langle W, R, v\rangle$ до некоторой модели $M' = \langle W', R', v'\rangle$ таким образом, чтобы выполнялось отношение $(M', w_0) \models \varphi_\alpha$*.

Прежде обратим внимание на тот факт, что для того, чтобы формула α_m опровергалась в некотором мире (рефлексивно-транзитивной) модели, достаточно, чтобы из этого мира была достижима шкала, изображенная на рис. 1 справа (черными кружка́ми изображены иррефлексивные миры, светлыми – рефлексивные миры; отношению достижимости соответствуют стрелки, при этом те стрелки, которые восстанавливаются по транзитив-зитивности, не изображены). Обозначим эту шкалу через F_m (нижний мир на рисунке не принадлежит шкале F_m).

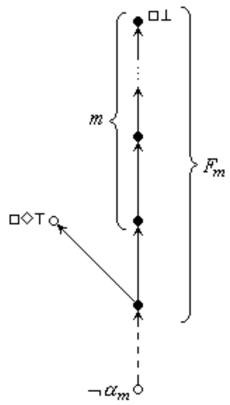

Рис. 1

Несложно понять, что если формула α_m истинна в некотором мире некоторой транзитивной модели, то она истинна и во всех мирах, достижимых из данного (для этого достаточно заметить, что главной связкой формулы α_m является модальность □). С другой стороны, если $k \neq m$, то в шкале F_m формула α_k не опровергается. Используя эти наблюдения, легко построить требуемую модель M'. Построение этой модели будет состоять из $(2n + 3)$ шагов.

На шаге 0 положим $W_0 = W$, $R_0 = R$.

На шаге m, где $1 \leq m \leq 2n + 2$, рассмотрим множество X_m миров модели M, в которых ложна переменная p_m. Для каждого мира $w \in X_m$ расширим множество W_{m-1} и отношение R_{m-1} таким образом, чтобы из w оказалась достижима копия шкалы F_m. Получившееся множество миров обозначим через W_m, а транзитивное замыкание получившегося отношения достижимости – через R_m.

Положим $W' = W_{2n+2}$, $R' = R_{2n+2}$, а оценку v – произвольной. Для всякой формулы ψ, все переменные которой находятся среди $p_1, \ldots, p_{2n+2}$, обозначим через ψ_α формулу, получающуюся из ψ подстановкой формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}$ вместо $p_1, \ldots, p_{2n+2}$ соответственно. Тогда для всякой подформулы ψ булевой формулы (без кванторов) φ' и всякого мира $w \in W$ уровня n справедлива следующая эквивалентность:

$$(M', w) \models \psi_\alpha \iff (M, w) \models \psi.$$

Это утверждение обосновывается индукцией по построению формулы ψ.

Самый трудный случай состоит в обосновании базиса индукции. Пусть $\psi = p_m$. Тогда $\psi_\alpha = \alpha_m$, и нужно показать, что для всякого мира $w \in W$ уровня n

$$(M', w) \models \alpha_m \iff (M, w) \models p_m.$$

Пусть w – мир уровня n такой, что $(M, w) \not\models p_m$. Тогда на шаге m построения модели M' мы расширили модель M, положив достижимой из w копию шкалы F_m. Но в этом случае $(M', w) \not\models \alpha_m$.

Пусть теперь $(M', w) \not\models \alpha_m$, где w – мир уровня n модели M. Несложно понять, что в этом случае из мира w достижима копия шкалы F_m. По определению модели M' это возможно только в том случае, когда $(M, w) \not\models p_m$.

Обоснование индукционного шага (когда ψ является конъюнкцией, дизъюнкцией или импликаций формул) не должно вызывать затруднений, и мы оставляем его читателю.

В результате получаем, что если w – мир уровня n модели M, то $(M', w) \models \varphi_\alpha'$. Теперь заметим, что формула $\alpha_{2n+1} \wedge \neg\alpha_{2n+2}$ истинна в точности в таких мирах модели M', которые были мирами уровня n в модели M. Действительно, $p_{2n+1} = q_n$, $p_{2n+2} = q_{n+1}$, а мирами модели M, в которых истинна формула

$q_n \wedge \neg q_{n+1}$, являются ровно миры уровня n. Следовательно, это в точности те миры модели M', из которых достижима копия шкалы F_{2n+2}, но не достижима копия шкалы F_{2n+1}, поэтому во всех других мирах модели M' формула $\alpha_{2n+1} \wedge \neg\alpha_{2n+2}$ истинной не является. Тем самым мы обосновали, что $(M', w_0) \models \square(\alpha_{2n+1} \wedge \neg\alpha_{2n+2} \to \varphi_\alpha')$.

Осталось заметить, что

$$(M', w_0) \models \alpha_{n+1} \wedge \neg\alpha_{n+2} \wedge \square A_\alpha \wedge \square B_\alpha \wedge \square C_\alpha \wedge \square D_\alpha \wedge \square E_\alpha$$

(проверку этого факта мы оставляем читателю), и заключить, что $(M', w_0) \models \varphi_\alpha{}^*$.

Из леммы 3 и PSPACE-полноты проблемы выполнимости формул для логики **K4** вытекает

Теорема 4. (i) *Проблема выполнимости константных формул в* **K4** *является* PSPACE-*полной.* (ii) *Проблема доказуемости константных формул в* **K4** *является* PSPACE-*полной.*

Теперь покажем, как изменить формулу φ^* и формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}$, чтобы можно было доказать аналог теоремы 4 для некоторых других логик.

Пусть модальная логика L такова, что $\mathbf{K} \subseteq L \subseteq \mathbf{K4}$. В этом случае отношения достижимости в моделях логики L, вообще говоря, не являются транзитивными, поэтому формула φ^* будет иметь не тот смысл, который она имела в случае логики **K4**; в частности, аналог утверждения (∗) для логики L верным не будет. Мы заменим в формуле φ^* модальность $\square$ на такую, которой соответствует транзитивное замыкание отношения достижимости, соответствующего модальности $\square$; этот прием был использован Ладнером в [7].

Выше мы, по сути, показали, что если формула φ^* выполнима в некоторой транзитивной модели, то она выполнима и в модели высоты не более чем $n+1$ (см. обоснование утверждения (∗)). Пусть для всякой формулы ψ

$$\begin{array}{rclcrcl} \square^{1}\psi & = & \square\psi; & \qquad & \square^{\text{™}1}\psi & = & \square\psi; \\ \square^{k+1}\psi & = & \square^{k}\psi \wedge \square\psi; & \qquad & \square^{\text{™}k+1}\psi & = & \square^{\text{™}k}\psi \wedge \square^{k+1}\psi. \end{array}$$

Если высота шкалы $F = \langle W, R\rangle$ не превосходит $k+1$, то отношение достижимости, соответствующее модальности $\square^{\text{™}k}$, является транзитивным замыканием отношения R. Таким образом, достаточно заменить в формуле φ^* каждое вхождение модальности $\square$ на вхождение модальности $\square^{\text{™}n}$, и получившаяся формула будет L-выполнимой в том случае, когда формула φ^* **K4**-выполнима.

Для всякой формулы ψ через $tr_k(\psi)$ обозначим формулу, получающуюся из ψ заменой в ней каждого вхождения подформулы вида $\square\delta$ на подформулу $\square^{\text{™}k}\delta$. Тогда ясно, что

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^* \ \mathbf{K4}\text{-выполнима}$$
$$\Leftrightarrow \quad tr_n(\varphi^*) \ L\text{-выполнима.}$$

В частности, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Проблема истинности булевых формул с кванторами полиномиально сводится к проблеме L-выполнимости и к проблеме доказуемости в L.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для некоторой константы c имеет место отношение $|\, tr_n(\varphi^*) \,| \leq c \cdot |\, \varphi^* \,|^2$, т.е. длина формулы $tr_n(\varphi^*)$ зависит полиномиально (квадратично) от длины формулы φ^*.

Из леммы 5 следует

Теорема 6. (i) *Проблема выполнимости формул в L является* PSPACE*-трудной.* (ii) *Проблема доказуемости формул в L является* PSPACE*-трудной.*

Теперь обратимся к константным формулам. Как и в случае **K4**, положим для всякого $m \in \{1, \ldots, 2n + 2\}$

$$\alpha_m \quad = \quad \Box((^{m}\Box\beta \wedge \neg(^{m+1}\Box\beta \to \Box((\alpha \to (\Box\beta)).$$

Обозначим через $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ формулу, получающуюся из формулы $tr_n(\varphi^*)$ подстановкой вместо каждой переменной p_i формулы α_i. Заметим, что формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+2}$ вычислимы по $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ за время, ограниченное полиномом от длины $tr_n(\varphi^*)_\alpha$. Кроме того, длина формулы $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ ограничена сверху полиномом от длины формулы φ^*: действительно, выше мы показали, что для некоторой константы c

$$|\, \alpha_m \,| \leq c \cdot |\, \varphi^* \,|,$$

с другой стороны, для некоторого d

$$|\, tr_n(\varphi^*) \,| \leq d \cdot |\, \varphi^* \,|^2,$$

откуда получаем, что

$$|\, tr_n(\varphi^*)_\alpha \,| \leq max\{|\, \alpha_1 \,|, \ldots, |\, \alpha_{2n+2} \,|\} \cdot |\, tr_n(\varphi^*) \,| \leq c \cdot d \cdot |\, \varphi^* \,|^3.$$

Лемма 7. *Формула φ^** **K4***-выполнима тогда и только тогда, когда формула $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ L-выполнима.*

Доказательство. Как было отмечено выше,

$$\varphi^* \ \mathbf{K4}\text{-выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad tr_n(\varphi^*) \ L\text{-выполнима.}$$

Пусть φ^* не является **K4**-выполнимой. Тогда $tr_n(\varphi^*)$ не является L-выполнимой. В этом случае $\neg tr_n(\varphi^*) \in L$, а следовательно, $\neg tr_n(\varphi^*)_\alpha \in L$. Но тогда $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ не является L-выполнимой.

Пусть теперь φ^* **K4**-выполнима. Тогда, как было показано выше, φ_α^* тоже **K4**-выполнима. Ясно, что в этом случае формула

$tr_n(\varphi^*)_\alpha$ будет **K4**-выполнимой. Осталось заметить, что, поскольку $L \subseteq$ **K4**, то всякая **K4**-выполнимая формула является L-выполнимой, следовательно, $tr_n(\varphi^*)_\alpha$ L-выполнима.

Из леммы 7 и PSPACE-трудности проблемы выполнимости формул для логики L вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Пусть логика L такова, что* **K** $\subseteq L \subseteq$ **K4**. *Тогда*

(*i*) *проблема выполнимости константных формул для логики L является* PSPACE-*трудной;*

(*ii*) *проблема доказуемости константных формул для логики L является* PSPACE-*трудной,*

и следовательно, проблемы выполнимости и доказуемости константных формул в **K4** *являются* PSPACE-*полными.*

Обратимся к логике **S4**, которая семантически определяется классом всех рефлексивно-транзитивных шкал Крипке. Заметим, что при обосновании эквивалентности (∗) мы на самом деле заодно обосновали следующую эквивалентность:

$$\varphi \text{ истинна} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^* \text{ является } \mathbf{S4}\text{-выполнимой,}$$

и значит, справедлива

Лемма 9. *Проблема истинности булевых формул с кванторами полиномиально сводится к проблеме* **S4**-*выполнимости и к проблеме доказуемости в* **S4**.

Аналогично следствию 2 получаем

Следствие 10 [7]**.** (*i*) *Проблема доказуемости формул в* **S4** *является* PSPACE-*полной.* (*ii*) *Проблема* **S4**-*выполнимости формул является* PSPACE-*полной.*

Как было замечено в начале данной статьи, проблема **S4**-выполнимости константных формул решается сравнительно просто – с полиномиальными затратами времени от длины исходной формулы, – а поэтому вряд ли является PSPACE-трудной. Ниже мы приведем доказательство PSPACE-трудности проблемы выполнимости для однопеременного фрагмента **S4** (т.е. фрагмента, состоящего из формул от одной пропозициональной переменной, доказуемых в **S4**).

Пусть для всякого $m \in \mathfrak{I}$

$$\begin{array}{rcl} \delta_1 & = & (\Box p; \\ \delta_{m+1} & = & ((p \wedge ((\neg p \wedge \delta_m)). \end{array}$$

Положим для всякого $m \in \{1, \ldots , 2n + 2\}$

$$\alpha_m \quad = \quad \Box(p \to \Box(\neg p \wedge \delta_m \wedge \neg\delta_{m+1} \to \Box(p)).$$

Как и раньше, через φ_α^* обозначим формулу, получающуюся из формулы φ^* подстановкой вместо каждой переменной p_i формулы α_i. Нетрудно видеть, что для некоторой константы c

$$| \alpha_m | \text{ ™ } c \cdot | \varphi^* |,$$

откуда следует, что

$$| \varphi_\alpha^* | \text{ ™ } max\{| \alpha_1 |, \dots , | \alpha_{2m+2} |\} \cdot | \varphi^* | \text{ ™ } c \cdot | \varphi^* |^2,$$

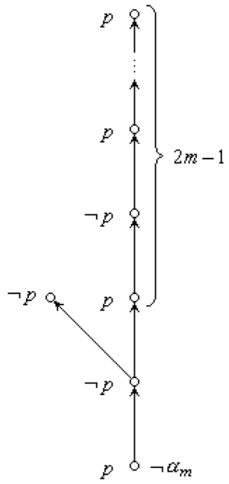

Рис. 2

т.е. длина формулы φ_α^* ограничена сверху полиномом от длины формулы φ^*.

Таким образом, формула φ_α^* вычислима по φ^* с полиномиальными затратами времени.

Чтобы формула α_m опровергалась в некотором мире **S4**-модели, достаточно, чтобы из этого мира была достижима модель, изображенная на рис. 2 справа. Светлыми кружками изображены рефлексивные миры; отношению достижимости соответствуют стрелки, при этом те стрелки, которые восстанавливаются по транзитивности, не изображены; в обведенных скобкой $(2m - 1)$ мирах оценка определена следующим образом: в нижнем мире p истинна, а при переходе к каждому следующему миру меняет свое значение с истины на ложь, и наоборот (в результате в верхнем мире переменная p принимает значение «истина»).

Ясно, что если формула α_m опровергается в некотором мире некоторой рефлексивно-транзитивной модели, то она опровергается и во всех мирах, из которых достижим данный. Кроме того, если $k \neq m$, то в изображенной на рисунке модели формула α_k не опровергается. Используя эти наблюдения и идею доказательства леммы 3, несложно доказать, что справедлива

Лемма 11. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi^* \ \mathbf{S4}\text{-}\textit{выполнима} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_\alpha^* \ \mathbf{S4}\text{-}\textit{выполнима}.$$

Из леммы 11 вытекает

Теорема 12 [6]**.** (*i*) *Проблема выполнимости однопеременных формул в* **S4** *является* PSPACE-*трудной.* (*ii*) *Проблема доказуемости однопеременных формул в* **S4** *является* PSPACE-*трудной.*

Заметим, что предъявленное доказательство PSPACE-трудности для однопеременного фрагмента логики **S4** абсолютно без каких-либо изменений проходит и для логики Гжегорчика

$\mathbf{Grz} = \mathbf{S4} + \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$, которая семантически характеризуется конечными шкалами, в которых отношение достижимости является частичным порядком. Кроме того, алгоритм [7] для разрешения **S4** на полиномиальной зоне легко модифицируется в соответствующий алгоритм для **Grz** – достаточно исключить детали, относящиеся к рассмотрению нетривиальных сгустков (т.е. «заставить» алгоритм перебирать не все квазиупорядоченные конечные шкалы, а только частично упорядоченные). Тем самым справедливо следующее утверждение.

Теорема 13. (i) *Проблема выполнимости для однопеременного фрагмента* **Grz** *является* PSPACE-*полной.* (ii) *Проблема доказуемости для однопеременного фрагмента* **Grz** *является* PSPACE-*полной.*

Обратимся к логике, во многом близкой к **Grz** – логике Гёделя–Лёба $\mathbf{GL} = \mathbf{K4} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$, характеризуемой конечными шкалами с отношением достижимости, являющимся строгим частичным порядком. Сходство семантик **Grz** и **GL** подсказывает замеченный многими в конце 70-х естественный перевод, погружающий **Grz** в **GL**: достаточно в формуле каждую подформулу вида $\Box\beta$ заменить на $\Box^+\beta = \beta \wedge \Box\beta$. Однако этот перевод не может нас удовлетворить в связи с рассматриваемыми задачами, поскольку при его применении длина формулы растет экспоненциально; скажем, если длины формул $\Box^m p$ растут линейно по m, то длины формул $(\Box^+)^m p$ – уже экспоненциально; см. для наглядности, например, перевод формулы $\Box^3 p = \Box\Box\Box p$:

$$
\begin{aligned}
(\Box^+)^3 p &= \Box^+\Box^+\Box^+ p = \Box^+\Box^+ p \wedge \Box\Box^+\Box^+ p = \\
&= \Box^+ p \wedge \Box\Box^+ p \wedge \Box(\Box^+ p \wedge \Box\Box^+ p) = \\
&= p \wedge \Box p \wedge \Box(p \wedge \Box p) \wedge \Box(p \wedge \Box p \wedge \Box(p \wedge \Box p)).
\end{aligned}
$$

Поэтому при рассмотрении сложностных вопросов для **GL**, в наибольшей степени – нижних границ сложности, которые все же аналогичны по решению вопросам о **Grz**, приходится «погружать» не сами конструкции для **Grz** во всех деталях, а идеи этих конструкций[3]. Несложно заметить, что формулы от одной переменной, использованные нами для кодирования переменных при доказа-

[3] Справедливости ради стоит сказать, что указанный перевод, хотя и удлиняет существенно формулы, может быть использован и практически напрямую, поскольку удвоение длины формулы при расшифровке $\Box^+$ происходит весьма регулярно: по сути, формула, находящаяся под $\Box^+$, переписывается еще раз, а это при детализации алгоритма легко учесть так, чтобы реального переписывания не происходило. Именно это имеется в виду, например, в конце доказательства леммы 18.26 [4] о принадлежности классу PSPACE проблем доказуемости в **GL**, **Grz**, **Int**, в котором утверждение обосновано лишь для **GL**, а для двух других дается ссылка на погружающие переводы.

тельстве части предыдущих двух теорем, относящейся к PSPACE-трудности рассматриваемой проблемы, легко модифицируются так, чтобы они работали для тех же целей и в рамках **GL**: нужно лишь в нескольких местах этих формул, не «опасных» с точки зрения увеличения длины формулы, заменить $\Box$ на $\Box^+$. Именно, достаточно положить для всякого $m \in \mathfrak{I}$

$$\delta_1 = (\Box^+ p;$$
$$\delta_{m+1} = ((p \wedge ((\neg p \wedge \delta_m))$$

и для всякого $m \in \{1, \ldots, 2n + 2\}$

$$\alpha_m = \Box(p \to \Box(\neg p \wedge \delta_m \wedge \neg\delta_{m+1} \to \Box(^+ p)),$$

где $(^+\beta = \beta \vee (\beta$. Заметим, что при таком использовании модальности $\Box^+$ не происходит экспоненциального роста длины формулы φ_α*, так как нет неограниченного числа итераций модальности $\Box^+$; более того, в данном случае вообще нет итераций $\Box^+$, и длина формулы φ_α* возрастает по сравнению с длиной φ* не более чем линейно.

Далее, алгоритм, разрешающий **GL**, а тем самым и ее однопеременный фрагмент на полиномиальной зоне имеется, см. [4]. В результате доказано следующее утверждение.

Теорема 14. (i) *Проблема выполнимости для однопеременного фрагмента* **GL** *является* PSPACE-*полной.* (ii) *Проблема доказуемости для однопеременного фрагмента* **GL** *является* PSPACE-*полной.*

На этом этапе нельзя считать рассматриваемую задачу полностью решенной для **GL**, поскольку эта логика имеет существенно более богатый фрагмент из константных формул, нежели логики **S4** и **Grz**: существует бесконечно много попарно не эквивалентных в **GL** константных формул, например, таковы все формулы последовательности $\Box^m\beta$. Однако этот фрагмент остается достаточно простым; опишем алгоритм его разрешения. Основан он на двух простых давно известных наблюдениях: во-первых, константный фрагмент **GL** полон относительно линейных конечных **GL**-шкал, т.е. шкал вида $\langle\{0, \ldots, n\}, R\rangle$, где kRm означает $k > m$, во-вторых, если формула φ опровергается на некоторой шкале логики **GL**, то она опровергается и на ее подшкале высоты не более длины φ.

Итак, что же мы будем делать для выяснения принадлежности логике **GL** константной формулы φ? Для удобства восприятия оформим наш алгоритм в виде заполнения таблицы следующего вида:

	φ_1	φ_2	φ_3	…	φ_{n-1}	φ_n

0	f	t		…		
1	f	f		…		
2	f	f		…		
…	…	…		…		
$k-2$	f	f		…		
$k-1$	f	f		…		

Здесь $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – все подформулы формулы φ, выписанные так, что для всякой подформулы ее подформулы имеют меньшие номера (тем самым $\varphi_n = \varphi$, а $\varphi_1 = \beta$), k – длина φ, т.е., по сути, число вхождений в φ ее подформул (тем самым n ™ k), а $\{0, \ldots, k-1\}$ – множество миров шкалы указанного выше вида. Заполняется таблица по столбцам сверху вниз: на строке i и столбце φ_j ставим t, если формула φ_j истинна в мире i, и ставим f, если ложна. Мы позволили себе заполнить второй столбец в предположении, что $\varphi_2 = \Box\beta$. Нетрудно подсчитать, сколько времени займет процедура составления и заполнения таблицы. Оставим эти подсчеты читателю, отметив, что это время полиномиально (полином не более четвертой степени) зависит от длины φ.

Когда таблица заполнена, нам достаточно просмотреть последний столбец: если в нем окажется хотя бы в одном месте f, имеем $\varphi \notin$ **GL**, в противном случае – $\varphi \in$ **GL**. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 15. *Константный фрагмента* **GL** *разрешим с помощью алгоритма, время работы которого полиномиально зависит от длины проверяемой формулы.*

На этом материал статьи, который мы собирались представить читателю в соответствии с ее названием, исчерпан. Однако трудно удержаться и не сделать несколько замечаний и о некоторых дальнейших результатах, непосредственно с константными формулами не связанных (впрочем, как заметил читатель, теоремы 12, 13 и 14 уже с константными формулами не связаны).

Алгоритм, представленный нами для доказательства теоремы 15, настолько прост, что напрашивается на модификации для иных ситуаций, т.е. желательно его видоизменить так, чтобы он (точнее, идеи, в нем заложенные) действовал и для других логик, с иными ограничениями на число переменных. Однако возможностей для этого не очень много. Скажем, первым шагом могло бы быть рассмотрение ближайшего к рассмотрению теоремы 15 примера, каковым является **GLLin** – логика всех конечных линейных **GL**-шкал: в нормальных расширениях **GL** логика **GLLin** является наибольшей среди имеющих тот же фрагмент из константных формул, что и **GL**, и тем самым самой простой по устройству из этих логик. Однако попытка распространить наш алгоритм даже на однопеременный фрагмент **GLLin** вряд ли может увенчаться успехом.

Теорема 16. *Проблема непринадлежности однопеременному фрагменту* **GLLin** *является* NP-*полной.*

В самом деле, проблема непринадлежности логике **GLLin** даже без ограничения на число используемых переменных принадлежит классу NP (см., например, [4], [11]), поэтому нам достаточно свести к проблеме непринадлежности однопеременному фрагменту логики **GLLin** какую-нибудь NP-полную проблему. Здесь подходящей оказывается классическая проблема выполнимости булевых формул (т.е. истинности булевых формул с кванторами вида $\exists p_1 \ldots \exists p_n\ \varphi$, где φ – бескванторная формула).

Опишем соответствующую сводящую процедуру. Пусть φ – некоторая булева формула от n переменных. Без ограничений общности можем считать, что φ является формулой от переменных $p_1, \ldots, p_n$. Заменяем в φ каждую переменную на модальную формулу от одной переменной: переменная p_i заменяется на $(\Box^{i+1}(\beta \wedge ({}^{i}\alpha \wedge p)$, а затем перед получившейся формулой ставим отрицание, так получаем формулу φ'. Легко убедиться, что время построения (эффективного, разумеется) φ' по φ полиномиально (не более чем квадратично) от длины исходной формулы, причем справедлива эквивалентность:

$$\varphi \text{ выполнима} \iff \varphi' \notin \mathbf{GLLin}.$$

Тем не менее, алгоритм из доказательства теоремы 15 удается модифицировать для некоторых аналогов **GLLin** в расширениях **S4** – логик **S4.3** и **Grz.3**, первая из них семантически определяется конечными квазицепями (т.е. цепями сгустков), вторая – конечными линейными частично упорядоченными множествами, т.е. шкалами вида $\langle \{0, \ldots, n\}, R \rangle$, где kRm означает $k \prod m$.

Теорема 17. *Однопеременные фрагменты логик* **S4.3** *и* **Grz.3** *разрешимы с помощью алгоритмов, время работы которых полиномиально зависит от длины проверяемой формулы.*

Аналогом теоремы 16 в случае логик **S4.3** и **Grz.3** является

Теорема 18. *Проблемы непринадлежности логикам* **S4.3** *и* **Grz.3** *для формул от двух переменных являются* NP-*полными.*

Наконец, обратимся к случаю интуиционистской логики. Аналогично теоремам 13 и 14 доказывается

Теорема 19. *Проблема доказуемости в* **Int** *для формул от двух переменных является* PSPACE-*полной.*

Завершим наше обсуждение предположением.

В последние два десятка лет постоянно растет интерес к так называемой базисной логике (*basic logic*), которую на пропозициональном уровне можно считать суперинтуиционистским фрагментом **K4**. Ввиду последнего верхние границы сложности разрешающих алгоритмов переносятся со случая **K4** на случай базисной логики (в частности, константный фрагмент базисной логики разрешим полиномиально по времени), хотя нижние могут в принципе оказаться не столь высокими. То, что базисная логика имеет много общего и с **K4**, и с **Int**, может навести на мысль, что правдоподобной является следующая

Гипотеза. (*i*) *Проблема непринадлежности однопеременному фрагменту базисной логики является* NP-*полной.* (*ii*) *Проблема доказуемости в базисной логике для формул от двух переменных является* PSPACE-*полной.*

Более того, вполне возможно, что для подтверждения гипотезы (*ii*) удастся подходящим образом модифицировать доказательство теоремы 19, в котором участвуют чисто импликативные формулы, построенные в [2] для одновременного доказательства PSPACE-трудности проблем принадлежности **Int** и базисной логике. Было бы, кстати, интересно рассмотреть и вопрос о сложности чисто импликативного фрагмента базисной логики с ограничением на число переменных: такие фрагменты **Int**, как хорошо известно, табличны (каждый такой фрагмент имеет лишь конечное число попарно неэквивалентных формул; хотя это число экспоненциально зависит от числа переменных, оно фиксировано), а потому полиномиально по времени разрешимы, в то время как импликативные формулы от одной переменной (и даже константно-импликативные формулы, не содержащие переменных вовсе) для базисной логики не столь тривиальны: формулы последовательности β, $(\beta \to \beta) \to \beta$, $(\beta \to \beta) \to ((\beta \to \beta) \to \beta)$, $\ldots$ попарно неэквивалентны в базисной логике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чагров А.В.* Логика, не являющаяся ни конечно-значной, ни бесконечно-значной // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XIV. М., 2000. С. 59–67.
2. *Чагров А.В.* О сложности пропозициональных логик // Сложностные проблемы математической логики. Калинин: КГУ, 1985. С. 80–90.
3. Семантика модальных и интенсиональных логик. Сб. статей. Пер. с англ., сост., общ. ред. и вступит. статья В.А.Смирнова. М.:Прогресс, 1981.

4. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997. 605 p.
5. *Garey M.R. and Johnson D.S.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness. San Francisco. 1979. (Русский перевод: *Гэри М. и Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., Мир. 1982.)
6. *Halpern J.Y.* The Effect of Bounding the Number of Primitive Propositions and the Depth of Nesting on the Complexity of Modal Logic // Artificial Intelligence. 1995. Vol. 75. No. 2. P. 361–372.
7. *Ladner R.E.* The computational complexity of provability in systems of modal logic // SIAM Journal on Computing. 1977. Vol. 6. P. 467–480.
8. *Nishimura I.* On formulas of the one variable in intuitionistic propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 25 (1960). No. 1. P. 327–331.
9. *Statman R.* Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete // Theoret. Comput. Sci. Vol. 9 (1979). No. 1. P. 67–72.
10. *Stockmeyer L.* Classifying the Computational complexity of Problems // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 52 (1987), No. 1. P. 1–43. (Русский перевод: *Л. Стокмейер.* Классификация вычислительной сложности проблем // Кибернетический сборник. Вып. 26. М.: Мир, 1989. С. 20–83.)
11. *Zakharyaschev M., Wolter F., and Chagrov A.* Advanced Modal Logic // D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed. Vol. 3. Kluver Academic Publishers, 2001. P. 83–266.