М.Н.Рыбаков

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ВЫРАЗИТЕЛЬНОСТИ МОДАЛЬНОГО ЯЗЫКА С ОДНОЙ ЛИШЬ ОДНОМЕСТНОЙ ПРЕДИКАТНОЙ БУКВОЙ

Abstract. *It is observed that fragments with only one monadic predicate letter of such logics as* **QK** , **QK4**, **QT**, **QS4**, **QGL**, **QGrz**, *and others are undecidable. It is proved that fragments with only one monadic predicate letter of* $\mathbf{QGL}^{sem}$ *and* $\mathbf{QGrz}^{sem}$ *(the sets of semantical consequences on Kripke frames of* **QGL** *and* **QGrz** *correspondently) are not recursively enumerable.*

Хорошо известно, что классическая логика предикатов не является разрешимой, причем для этого достаточно, чтобы ее язык содержал хотя бы одну предикатную букву местности два или более; в то же время классическая логика одноместных предикатов (в любом количестве) разрешима (см., например, [1]). Разрешимость логики одноместных предикатов сохранится, даже если обогатить язык кванторами по предикатным переменным (т.е. второпорядковая классическая логика одноместных предикатов разрешима; отметим, что логика второго порядка[1] в языке с бинарной предикатной буквой не только не разрешима, но даже не является перечислимой).

Как заметил Крипке, при обогащении предикатного языка модальностью разрешимость логики одноместных предикатов пропадает: всякая модальная логика L такая, что

- язык L содержит хотя бы две одноместные предикатные буквы;
- $L \subseteq \mathbf{QS5}$;
- безмодальный фрагмент L совпадает с классической логикой предикатов в соответствующем языке,

неразрешима [7]. В силу факта разрешимости классической логики одноместных предикатов результат [7] казался удивительным. Тем не менее, идея доказательства, использовавшаяся в [7], легко распространяется и на многие другие логики (не обязательно включающиеся в **QS5**), и это позволило Крипке сделать вывод о том, что в сфере модальной логики разрешимым одноместным модальным системам попросту нет места (при этом подразумевалось, что «хорошая» модальная система имеет шкалу Крип-

---

[1] Имеется в виду множество тождественно истинных второпорядковых формул.

ке, в которой из некоторого мира достижимо бесконечно много миров).

Чуть позже результат Крипке был усилен для некоторых систем. В [2] доказывается неразрешимость нескольких фрагментов интуиционистского исчисления предикатов, формулы которых строятся с использованием всего лишь одной одноместной предикатной буквы. Поскольку интуиционистское исчисление предикатов легко погружается в модальные исчисления **QS4** и **QGrz**, а **QS4** и **QGrz** – соответственно, в **QK4** и **QGL**, то из результатов [2] получаем, что фрагмент от одной одноместной буквы всякой модальной логики L такой, что
QK4 $\subseteq L \subseteq$ **QGL** или **QK4** $\subseteq L \subseteq$ **QGrz**, неразрешим.

В данной работе предлагается некоторый способ моделирования в модальных логиках предикатных букв с помощью одной одноместной предикатной буквы. Мы применим этот способ для доказательства неразрешимости фрагментов модальных предикатных логик, содержащихся в **QGL** и **QGrz** и состоящих из формул, построенных с использованием всего одной одноместной предикатной буквы, а затем докажем, что аналогичные фрагменты логик **QGL**^{sem} и **QGrz**^{sem} не являются рекурсивно перечислимыми (**QGL**^{sem} – множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке логики **QGL**, **QGrz**^{sem} – множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке логики **QGrz**). Идея такого моделирования взята из [6] (см. также [3]), где похожее моделирование проводится на пропозициональном уровне: при обосновании PSPACE-трудности довольно просто устроенных фрагментов некоторых пропозициональных логик все пропозициональные переменные моделируются с помощью одной.

Сначала проведем подробное доказательство неразрешимости соответствующего фрагмента логики **QK4**, а потом покажем, как изменить это доказательство, чтобы получить остальные упомянутые результаты.

Обозначим через πо модальный предикатный язык, содержащий счетное число индивидных переменных, счетное число n-местных предикатных букв для всякого $n \prod 0$, логические связки $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\perp$, $\Box$, кванторы всеобщности по индивидным переменным, скобки и запятую. Формулы в этом языке строятся обычным образом. В дальнейшем при записи πо-формул мы будем использовать и другие связки и кванторы, определяя их как обычные сокращения основных, а именно: $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$, $\neg\varphi = \varphi \rightarrow \perp$, $\exists x\, \varphi = \neg\forall x\, \neg\varphi$, $(\varphi = \neg\Box\neg\varphi$. Наряду с языком πо будем рассматривать язык о, который содержит те же символы, что и πо, и не содержит символа $\Box$.

Через **QCl** обозначим классическую логику предикатов в языке о. Тогда логика **QK4** определяется следующим образом:

$$\mathbf{QK4} = \mathbf{QCl} + \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) + \Box\varphi \to \Box\Box\varphi,$$

где операция + означает замыкание получающегося множества формул по правилу *modus ponens*, правилу обобщения, правилу Гёделя и правилу подстановки.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится семантика Крипке (см. вступительную статью в [5]); мы будем придерживаться обозначений, введенных в [4].

Пусть P – некоторая бинарная предикатная буква. Обозначим через $\mathbf{QCl}^P$ фрагмент логики **QCl**, формулы которого не содержат предикатных букв, отличных от P. Как уже было отмечено выше, известно, что

логика $\mathbf{QCl}^P$ *неразрешима.*

Прежде чем доказать неразрешимость фрагмента логики **QK4**, состоящего из формул, построенных с использованием одной одноместной предикатной буквы, мы построим погружение логики $\mathbf{QCl}^P$ во фрагмент **QK4**, состоящий из формул, построенных с использованием двух одноместных предикатных букв (и тем самым докажем неразрешимость последнего фрагмента). Пусть φ – некоторая формула языка логики $\mathbf{QCl}^P$. Пусть также Q_1 и Q_2 – одноместные предикатные буквы. Обозначим через φ^* модальную формулу, получающуюся из φ заменой каждой подформулы φ вида $P(x, y)$ на подформулу $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$.

Идея построения формулы φ^* взята из [7]. Именно, в [7] бинарная предикатная буква моделируется с помощью двух одноместных с использованием той же конструкции, только вместо $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$ рассматривается формула $((Q_1(x) \wedge Q_2(y))$. Заметим, что формула $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$ получается из формулы $\neg((Q_1(x) \wedge Q_2(y))$ заменой $Q_1(x)$ и $Q_2(y)$ на $\neg Q_1(x)$ и $\neg Q_2(y)$ соответственно. Использование именно формулы $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$ связано с тем, что при таком моделировании, как представляется автору, легче будет понять те рассуждения, которыми будут сопровождаться дальнейшие модификации формулы φ^*.

Следующая лемма утверждает, что операция * является погружением логики $\mathbf{QCl}^P$ в логику **QK4**.

Лемма 1 [7]**.** *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi^* \in \mathbf{QK4}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbf{QCl}^P$. Поскольку $\mathbf{QCl}^P \subseteq \mathbf{QK4}$, то $\varphi \in \mathbf{QK4}$. Формула φ^* является подстановочным примером формулы φ, и поэтому $\varphi^* \in \mathbf{QK4}$.

Пусть теперь $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P$. В силу полноты логики предикатов формула φ в этом случае опровергается в некоторой модели. Без ограничений общности можем считать, что индивидная область этой модели счетно-бесконечна и, для определенности, состоит в точности из натуральных чисел. Итак, существует модель $M = \langle G, J \rangle$, где $G = \Im = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $J(P) \subseteq G \times G$, при этом M © φ. Построим по M модель M^* логики **QK4**, в корне которой будет опровергаться формула φ^*.

Рассмотрим шкалу $F = \langle W, R \rangle$, где

$$
\begin{array}{rcl}
W & = & w \sim \{w_{k,m} : k, m \in \Im\}; \\
w'Rw'' & \Leftrightarrow & \text{либо } w' = w \text{ и } w'' \neq w, \\
 & & \text{либо } w' = w'' \text{ и } w' \neq w.
\end{array}
$$

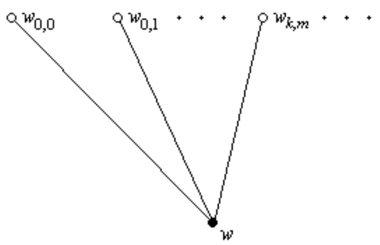

Рис. 1

Для наглядности шкала F изображена на рис. 1. Черным кружком изображен иррефлексивный мир w, светлыми – рефлексивные миры; отношению достижимости между различными мирами соответствуют линии, при этом считаем, что если два мира соединены на рисунке линией, то верхний достижим из нижнего, но не наоборот.

На шкале F определим модель $M^* = \langle W, R, D, I \rangle$, положив для всякого $v \in W$

$$
\begin{array}{rcl}
D(v) & = & \Im; \\
(M^*, v) © Q_1[k] & \Leftrightarrow & \text{либо } v = w, \text{ либо существует такое } m \in \Im, \\
 & & \text{что } v = w_{k,m} \text{ и } M © P[k, m]; \\
(M^*, v) © Q_2[m] & \Leftrightarrow & \text{либо } v = w, \text{ либо существует такое } k \in \Im, \\
 & & \text{что } v = w_{k,m} \text{ и } M © P[k, m];
\end{array}
$$

в остальном модель M^* произвольна.

Для всякой подформулы ψ формулы φ через ψ^* обозначим формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $P(x, y)$ формулы $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$. Индукцией по построению ψ докажем, что для всякой интерпретации α индивидных переменных справедлива следующая эквивалентность:

$$M \lfloor \psi[\alpha] \Leftrightarrow (M^*, w) \lfloor \psi^*[\alpha].$$

Случай, когда $\psi = \bot$, тривиален. Пусть $\psi = P(x, y)$. Тогда нам надо показать, что для всяких $k, m \in \Im$

$$M \lfloor P[k, m] \Leftrightarrow (M^*, w) \lfloor \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m]).$$

Пусть $M \copyright P[k, m]$. Тогда по определению модели M^* получаем, что $(M^*, w_{k,m}) \copyright Q_1[k]$ и $(M^*, w_{k,m}) \copyright Q_2[m]$. Следовательно, $(M^*, w) \lfloor ((\neg Q_1[k] \wedge \neg Q_2[m])$, а последнее равносильно тому, что $(M^*, w) \copyright \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m])$.

Пусть теперь $(M^*, w) \copyright \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m])$. Тогда в M^* существует мир v, достижимый из w, такой, что $(M^*, v) \copyright Q_1[k]$ и $(M^*, v) \copyright Q_2[m]$. По определению модели M^* это означает, что $v \neq w$ (так как мир w иррефлексивен), следовательно, $v = w_{s,t}$ для некоторых $s, t \in \Im$. Из того, что $(M^*, w_{s,t}) \copyright Q_1[k]$, следует, что $s = k$ и $M \copyright P[k, t]$, а из того, что $(M^*, w_{k,t}) \copyright Q_2[m]$ следует, что $t = m$ и $M \copyright P[k, m]$; получили требуемое.

Пусть подформула ψ формулы φ имеет вид $\forall x\ \psi_1$ и пусть для ψ_1 выполнено индукционное предположение, т.е. для всякой интерпретации α индивидных переменных справедлива следующая эквивалентность:

$$M \lfloor \psi_1\ [\alpha] \Leftrightarrow (M^*, w) \lfloor \psi_1{}^*[\alpha].$$

Предположим, что $M \copyright (\forall x\ \psi_1)[\alpha]$ для некоторой интерпретации α. Тогда существует интерпретация α_x, отличающаяся от α только, быть может, значением на переменной x, такая, что $M \copyright \psi_1[\alpha_x]$. Применяя индукционное предположение для ψ_1, получаем, что $(M^*, w) \copyright \psi_1[\alpha_x]$, а следовательно, $(M^*, w) \copyright (\forall x\ \psi_1)[\alpha]$.

Пусть $(M^*, w) \copyright (\forall x\ \psi_1)[\alpha]$ для некоторой интерпретации α. Тогда существует интерпретация α_x индивидных переменных, отличающаяся от α только, быть может, значением на переменной x, такая, что $(M^*, w) \copyright \psi_1[\alpha_x]$. Снова применяя индукционное предположение для ψ_1, получаем, что $M \copyright \psi_1[\alpha_x]$, из чего заключаем, что $M \copyright (\forall x\ \psi_1)[\alpha]$.

Обоснование индукционного шага в случаях, когда ψ является конъюнкцией, дизъюнкцией или импликацией формул, оставляется читателю.

Поскольку φ является своей подформулой и $M \copyright \varphi$, то мы тем самым доказали, что $(M^*, w) \copyright \varphi^*$. Осталось заметить, что модель M^* определена на транзитивной шкале, поэтому в M^* истинны все формулы, выводимые в **QK4**. Значит, $\varphi^* \notin$ **QK4**.

Из леммы 1 и неразрешимости логики $\mathbf{QCl}^P$ вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 2 [7]**.** *Фрагмент логики* **QK4***, состоящий из формул, построенных с использованием лишь двух одноместных предикатных букв, неразрешим.*

Пусть теперь Q – некоторая одноместная предикатная буква, отличная от букв Q_1 и Q_2. Определим следующие формулы:

$$\delta_1(x) \quad = \quad (\Box Q(x);$$
$$\delta_{m+1}(x) \quad = \quad ([Q(x) \wedge ((\neg Q(x) \wedge \delta_m(x))].$$

Заметим, что если v – мир некоторой модели Крипке $M' = \langle W', R', D', I' \rangle$, причем порожденная им подмодель является рефлексивно-транзитивной, то для всякого $a \in D'(w)$

$(M', v) \models \delta_m[a] \iff$ существуют миры $v_1, \ldots, v_{2m-1} \in W'$ такие, что (i) $v\, R'\, v_1\, R' \ldots R'\, v_{2m-1}$, (ii) для всякого k такого, что $1 \le k \le 2m - 1$, отношение $(M', v_k) \models Q[a]$ выполнено ровно в том случае, когда k нечетно, и (iii) для всякого мира v', достижимого из v, имеет место отношение $(M', v') \models Q[a]$.

Положим

$$\sigma_m(x) \quad = \quad \Box(\neg Q(x) \wedge \delta_m(x) \wedge \neg\delta_{m+1}(x) \to \Box(Q(x)).$$

Для всякой формулы ψ обозначим через ψ_σ формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $Q_i(x)$ формулы $\sigma_i(x)$. В результате $\varphi_\sigma{}^*$ представляет собой формулу, построенную с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы Q. Для завершения доказательства неразрешимости фрагмента **QK4**, состоящего из формул, построенных с использованием всего одной одноместной предикатной буквы, осталось доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi^* \in \mathbf{QK4} \iff \varphi_\sigma{}^* \in \mathbf{QK4}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi^* \in \mathbf{QK4}$. Тогда $\varphi_\sigma{}^* \in \mathbf{QK4}$, поскольку формула $\varphi_\sigma{}^*$ получена из формулы φ^* подстановкой, а логика **QK4** замкнута относительно правила подстановки.

Пусть $\varphi^* \notin \mathbf{QK4}$. В силу леммы 1 это означает, что $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P$, и по доказательству леммы 1 получаем, что формула φ^* опровергается в корне w модели $M^* = \langle W, R, D, I \rangle$, определенной в доказательстве леммы 1.

Рассмотрим шкалу $F = \langle W, R \rangle$, на которой определена модель M^*. Расширим F следующим образом. Из каждого мира $w_{k,m}$ положим достижимыми две рефлексивно-транзитивные шкалы, изображенные на рис. 2, и возьмем транзитивное замыкание получившегося отношения достижимости. Светлыми кружками изображены рефлексивные миры, при этом внизу – мир $w_{k,m}$ шкалы F. Отношениям достижимости соответствуют линии, соединяющие миры, при этом считаем, что верхние миры достижимы из нижних, но не наоборот; отношения достижимости, которые восстанавливаются по транзитивности, на рисунке не отражены.

Получившуюся в результате такого расширения шкалу $\langle W_1, R_1\rangle$ обозначим через F_1. На шкале F_1 определим модель $M_1 = \langle W_1, R_1, D_1, I_1\rangle$, положив для всякого $v \in W_1$

$$D_1(v) = \mathfrak{I},$$

кроме того, для всяких $k, m, n \in \mathfrak{I}$

$$(M_1, w_{k,m}) \lfloor\ Q[n]$$

и для всяких $k, m, n, r \in \mathfrak{I}$

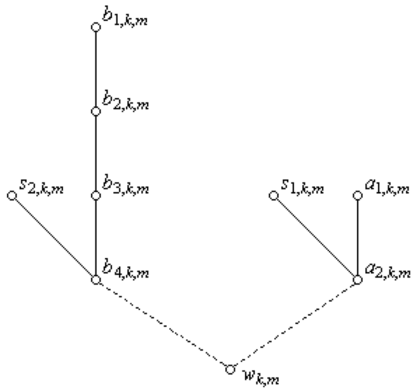

Рис. 2

$$(M_1, a_{n,k,m}) \lfloor\ Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad n = 1;$$
$$(M_1, b_{n,k,m}) \lfloor\ Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 \text{ или } n = 3;$$
$$(M_1, s_{1,k,m}) \lfloor\ Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad (M^*, w_{k,m}) \lfloor\ Q_1[r];$$
$$(M_1, s_{2,k,m}) \lfloor\ Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad (M^*, w_{k,m}) \lfloor\ Q_2[r];$$

в остальном модель M_1 произвольна.

Для всякой подформулы ψ формулы φ, как и раньше, через ψ^* обозначим формулу, получающуюся из ψ заменой каждой подформулы вида $P(x, y)$ на формулу $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$, а через ψ_σ^* – формулу, получающуюся из ψ^* заменой каждого вхождения подформулы вида $Q_i(x)$ на $\sigma_i(x)$.

Индукцией по построению подформулы ψ формулы φ покажем, что для всякой интерпретации α индивидных переменных имеет место следующая эквивалентность:

$$(M^*, w) \lfloor\ \psi^*[\alpha] \Leftrightarrow (M_1, w) \lfloor\ \psi_\sigma^*[\alpha].$$

Случай, когда $\psi = \bot$, тривиален. Пусть $\psi = P(x, y)$. Тогда $\psi^* = \Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$, $\psi_\sigma^* = \Box(\sigma_1(x) \vee \sigma_2(y))$, и нужно показать, что для всяких натуральных чисел k и m

$$(M^*, w) \lfloor\ \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m]) \Leftrightarrow (M_1, w) \lfloor\ \Box(\sigma_1[k] \vee \sigma_2[m]).$$

Пусть (M^*, w) © $\Box(Q_1[k] \vee Q_2[m])$. Тогда, как было показано выше, $(M^*, w_{k,m})$ © $Q_1[k]$ и $(M^*, w_{k,m})$ © $Q_2[m]$. В этом случае по определению модели M_1 получаем, что $(M_1, s_{1,k,m})$ © $Q[k]$ и $(M_1, s_{2,k,m})$ © $Q[m]$. Поскольку миры $s_{1,k,m}$ и $s_{2,k,m}$ рефлексивны и из каждого из них не достижимы другие миры, то $(M_1, s_{1,k,m})$ © $(Q[k]$ и $(M_1, s_{2,k,m})$ © $(Q[m]$. Следовательно,

$$(M_1, a_{2,k,m}) \quad © \quad \neg Q[k] \wedge \delta_1[k] \wedge \neg\delta_2[k] \to \Box(Q[k];$$

$$(M_1, b_{4,k,m}) \copyright \neg Q[m] \wedge \delta_2[m] \wedge \neg\delta_3[m] \to \Box(Q[m].$$

Значит, $(M_1, w_{k,m}) \copyright \sigma_1[k] \vee \sigma_2[m]$, т.е. $(M_1, w) \copyright \Box(\sigma_1[k] \vee \sigma_2[m])$.

Пусть теперь $(M_1, w) \copyright \Box(\sigma_1[k] \vee \sigma_2[m])$. Тогда из w достижим мир v такой, что $(M_1, v) \copyright \sigma_1[k]$ и $(M_1, v) \copyright \sigma_2[m]$. Несложно понять, что отношение $(M_1, v) \copyright \sigma_1[m]$ возможно только в том случае, когда $v = a_{2,c,d}$ или $v = w_{s,t}$ для некоторых c и d. Аналогично, отношение $(M_1, v) \copyright \sigma_2[m]$ возможно только в том случае, когда $v = b_{4,c,d}$ или $v = w_{c,d}$ для некоторых c и d. В результате заключаем, что $v = w_{c,d}$ для некоторых c и d.

Тот факт, что $(M_1, w_{c,d}) \copyright \sigma_1[m]$ означает, что в модели M_1 существует мир u такой, что $w_{c,d}R_1u$ и

$$(M_1, u) \copyright \neg Q[k] \wedge \delta_1[k] \wedge \neg\delta_2[k] \to \Box(Q[k].$$

Формула $\neg Q[k] \wedge \delta_1[k] \wedge \neg\delta_2[k]$ истинна лишь в двух мирах, достижимых из $w_{c,d}$: в мире $a_{2,c,d}$ и в мире $b_{2,c,d}$. Но в мире $b_{2,c,d}$ для всякого n истинна формула $\Box(Q[n]$, поэтому в $b_{2,c,d}$ не может опровергаться формула $\Box(Q[k]$. Следовательно, $u = a_{2,c,d}$. Отношение $(M_1, a_{2,c,d}) \copyright \Box(Q[k]$ выполнятся только в том случае, когда $(M_1, s_{1,c,d}) \copyright Q[k]$, а из чего, руководствуясь определением модели M_1, заключаем, что $c = k$, т.е. $w_{c,d} = w_{k,d}$.

Тот факт, что $(M_1, w_{k,d}) \copyright \sigma_2[m]$ означает, что в модели M_1 существует мир u такой, что $w_{k,d}R_1u$ и

$$(M_1, u) \copyright \neg Q[m] \wedge \delta_2[m] \wedge \neg\delta_3[m] \to \Box(Q[m].$$

Формула $\neg Q[m] \wedge \delta_2[m] \wedge \neg\delta_3[m]$ истинна только в одном мире, достижимом из $w_{k,d}$, именно, в мире $b_{4,k,d}$. Следовательно, $u = b_{4,k,d}$. Отношение $(M_1, b_{4,k,d}) \copyright \Box(Q[m]$ выполнятся только в том случае, когда $(M_1, s_{2,k,d}) \copyright Q[m]$, а последнее возможно только тогда, когда $d = m$, т.е. $w_{k,d} = w_{k,m}$.

Осталось заметить, что отношение $(M_1, s_{1,k,m}) \copyright Q[k]$ выполняется только в том случае, когда $(M^*, w_{k,m}) \copyright Q_1[k]$, а отношение $(M_1, s_{2,k,m}) \copyright Q[m]$ – только в том случае, когда $(M^*, w_{k,m}) \copyright Q_2[m]$. Следовательно, $(M^*, w) \copyright \Box(Q_1[k] \vee Q_2[m])$. На этом обоснование базиса индукции завершено.

Обоснование индукционного шага в случаях, когда ψ есть конъюнкция, дизъюнкция или импликация формул, тривиально: достаточно заметить, что для любых подформул γ и δ формулы φ имеют место следующие соотношения:

$$(\gamma \wedge \delta)^* = \gamma^* \wedge \delta^*; \qquad (\gamma^* \wedge \delta^*)_\sigma = \gamma_\sigma^* \wedge \delta_\sigma^*;$$
$$(\gamma \vee \delta)^* = \gamma^* \vee \delta^*; \qquad (\gamma^* \vee \delta^*)_\sigma = \gamma_\sigma^* \vee \delta_\sigma^*;$$
$$(\gamma \to \delta)^* = \gamma^* \to \delta^*; \qquad (\gamma^* \to \delta^*)_\sigma = \gamma_\sigma^* \to \delta_\sigma^*.$$

То же относится и к случаю, когда $\psi = \forall x\, \gamma$: нужно воспользоваться соотношениями $(\forall x\, \gamma)^* = \forall x\, \gamma^*$ и $(\forall x\, \gamma^*)_\sigma = \forall x\, \gamma_\sigma^*$.

Поскольку φ является своей подформулой и $(M^*, w) \copyright \varphi^*$, то мы тем самым доказали, что $(M_1, w) \copyright \varphi_\sigma^*$. Осталось заметить, что модель M_1 транзитивна, т.е. в ней истинны все формулы, выводимые в **QK4**. Следовательно, $\varphi_\sigma^* \notin \mathbf{QK4}$.

Теорема 4. *Фрагмент логики* **QK4**, *состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.*

Доказательство. Из лемм 1 и 3 следует, что для всякой o-формулы φ, не содержащей предикатных букв, отличных от двуместной буквы P, имеет место эквивалентность

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi_\sigma^* \in \mathbf{QK4}.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что формула φ_σ^* выписывается по φ эффективно и не содержит предикатных букв, отличных от одноместной буквы Q.

Применим метод, использованный для обоснования теоремы 4, чтобы доказать аналогичное утверждение для логики Гёделя–Лёба

$$\mathbf{QGL} = \mathbf{QK4} + \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi,$$

шкалами Крипке которой являются в точности иррефлексивные транзитивные шкалы, не содержащие бесконечных возрастающих цепей, и для логики Гжегорчика

$$\mathbf{QGrz} = \mathbf{QK4} + \Box\varphi \to \varphi + \Box(\Box(\varphi \to \Box\varphi) \to \varphi) \to \varphi,$$

шкалами Крипке которой являются в точности рефлексивные транзитивные шкалы, не содержащие бесконечных возрастающих цепей, состоящих из попарно различных миров[2], и не содержащие нетривиальных сгустков. Трудность переноса теоремы 4 на эти логики состоит в том, что шкалы F и F_1, которые мы строили в обосновании лемм 1 и 3, содержат как рефлексивные, так и иррефлексивные миры, в то время как ни одна шкала Крипке логики **QGL** не содержит рефлексивных миров и ни одна шкала Крипке логики **QGrz** не содержит иррефлексивных миров. Тем не менее, некоторая модификация формул позволяет провести нашу конструкцию и для этих логик.

Сначала рассмотрим логику **QGL**. Учитывая опыт, полученный при обосновании лемм 1 и 3, будем более кратки в рассуждениях.

Пусть, как и раньше, φ – некоторая формула языка логики $\mathbf{QCl}^P$, Q_1 и Q_2 – одноместные предикатные буквы, φ^* – модальная формула, получающаяся из формулы φ заменой каждой подформулы φ вида $P(x, y)$ на подформулу $\Box(Q_1(x) \vee Q_2(y))$.

---

[2] Правда, эти логики не полны относительно указанных классов шкал (см. [4], [8]).

Лемма 5. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi^* \in \mathbf{QGL}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1, только вместо шкалы F и модели M^* нужно рассмотреть шкалу $F_{ir} = \langle W, R_{ir}\rangle$ и модель $M_{ir} = \langle W, R_{ir}, D, I\rangle$ на этой шкале, которые отличаются от F и M^* лишь тем, что все миры в них иррефлексивны.

Для всякой формулы ψ обозначим $\Box^+\psi = \psi \wedge \Box\psi$. Модальность $\Box^+$ «заставляет» отношение достижимости в модели Крипке быть рефлексивным: если v – некоторый мир некоторой модели $M' = \langle W', R', D', I'\rangle$, то

$(M', v) \models \Box^+\psi \quad \Leftrightarrow \quad$ для всякого мира $v_1 \notin W'$ такого, что $v = v_1$ или $v\,R'\,v_1$, имеет место отношение $(M', v_1) \models \psi$.

Для всякой формулы ψ через ψ^+ обозначим формулу, получающуюся из ψ заменой каждого вхождения $\Box$ на $\Box^+$. Пусть

$$\lambda_m(x) = [\sigma_m(x)]^+.$$

Для всякой формулы ψ обозначим через ψ_λ формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $Q_i(x)$ формулы $\lambda_i(x)$. В этом случае $\varphi_\lambda{}^*$ является формулой, построенной с использованием единственной предикатной буквы Q.

Лемма 6. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi^* \in \mathbf{QGL} \Leftrightarrow \varphi_\lambda{}^* \in \mathbf{QGL}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3. Изменение состоит в том, что вместо шкалы F_1 и модели M_1 нужно рассмотреть шкалу $F_2 = \langle W_2, R_2\rangle$ и модель $M_2 = \langle W_2, R_2, D_2, I_2\rangle$, которые отличаются от F_1 и M_1 только тем, что все миры в них иррефлексивны; при этом в соответствующем месте рассуждения нужно воспользоваться леммой 5.

Из лемм 5 и 6 получаем аналог теоремы 4 для логики **QGL**.

Теорема 7. *Фрагмент логики* **QGL**, *состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.*

Теперь обратимся к логике **QGrz**. С ней дело обстоит несколько сложнее: в случае **QGL** мы могли заменить все миры шкал F и F_1 иррефлексивными мирами, а затем «заставить» их снова быть рефлексивными, заменив в нужных местах используемых формул модальность $\Box$ на модальность $\Box^+$. Но если мы заменим в шкалах F и F_1 иррефлексивный корень рефлексивным миром, то «фокус» с заменой модальностей нам ничего не даст:

«рефлексивная» модальность выражается через «иррефлексивную», а наоборот – нет. Поэтому мы поступим иначе.

Возьмем одноместную букву Q_3, отличную от букв Q, Q_1 и Q_2. Как и раньше, рассмотрим формулу φ, не содержащую предикатных букв, отличных от двуместной буквы P. Через φ' обозначим формулу, получающуюся из φ подстановкой вместо $P(x, y)$ формулы $\Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1(x) \vee Q_2(y))]$.

Лемма 8. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi' \in \mathbf{QGrz}.$$

Доказательство. Если $\varphi \in \mathbf{QCl}^P$, то $\varphi \in \mathbf{QGrz}$, а следовательно, $\varphi' \in \mathbf{QGrz}$, так как φ' является подстановочным примером φ.

Пусть теперь $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P$. Тогда существует модель $M = \langle \Im, J\rangle$ такая, что $M \copyright \varphi$. Рассмотрим шкалу $F_r = \langle W, R_r\rangle$, которая отличается от шкалы F только тем, что все миры в ней рефлексивны. На шкале F_r определим модель $M_r = \langle W, R_r, D, I\rangle$, положив для всякого $v \in W$

$$\begin{array}{rcl}
D(v) & = & \Im; \\
(M_r, v) \copyright Q_1[k] & \Leftrightarrow & \text{либо } v = w\text{, либо существует такое } m \in \Im, \\
 & & \text{что } v = w_{k,m} \text{ и } M \copyright P[k, m]; \\
(M_r, v) \copyright Q_2[m] & \Leftrightarrow & \text{либо } v = w\text{, либо существует такое } k \in \Im, \\
 & & \text{что } v = w_{k,m} \text{ и } M \copyright P[k, m]; \\
(M_r, v) \copyright Q_3[n] & \Leftrightarrow & v = w;
\end{array}$$

в остальном модель M_r произвольна.

Для всякой подформулы ψ формулы φ через ψ' обозначим формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $P(x, y)$ формулы

$\Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1(x) \vee Q_2(y))]$.

Индукцией по построению ψ докажем, что для всякой интерпретации α индивидных переменных

$$M \lfloor \psi[\alpha] \Leftrightarrow (M_r, w) \lfloor \psi'[\alpha].$$

Случай, когда $\psi = \bot$, тривиален. Пусть $\psi = P(x, y)$. Тогда нам надо показать, что для всяких $k, m \in \Im$

$$M \lfloor P[k, m] \Leftrightarrow (M_r, w) \lfloor \Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1[k] \vee Q_2[m])].$$

Пусть $M \copyright P[k, m]$. Тогда по определению модели M_r получаем, что

$(M_r, w_{k,m}) \lfloor \exists z\, Q_3(z)$, $(M_r, w_{k,m}) \copyright Q_1[k]$ и $(M_r, w_{k,m}) \copyright Q_2[m]$).

Следовательно, $(M_r, w) \copyright \Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1[k] \vee Q_2[m])]$.

Пусть теперь $(M_r, w) \copyright \Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1[k] \vee Q_2[m])]$. Тогда в модели M_r существует мир v, достижимый из w, такой, что

$(M_r, v) \not\models \exists z\, Q_3(z)$, $(M_r, v) \models Q_1[k]$ и $(M_r, v) \models Q_2[m]$. Ясно, что $v \neq w$, поскольку $(M_r, w_{k,m}) \models \exists z\, Q_3(z)$, следовательно, $v = w_{s,t}$ для некоторых $s, t \in \mathfrak{I}$. Так как $(M_r, w_{s,t}) \models Q_1[k]$, то $s = k$ и $M \models P[k, t]$, а поскольку $(M_r, w_{k,t}) \models Q_2[m]$, то $t = m$ и $M \models P[k, m]$.

Обоснование индукционного шага оставляется читателю.

В результате получаем, что $(M_r, w) \models \varphi'$. Осталось заметить, что в шкале F_r истинны все формулы, выводимые в **QGrz**, и следовательно, $\varphi' \notin$ **QGrz**.

Для всякой формулы ψ будем обозначать через ψ_σ формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $Q_i(x)$ формулы $\sigma_i(x)$.

Лемма 9. *Имеет место следующая эквивалентность:*

$$\varphi' \in \mathbf{QGrz} \Leftrightarrow \varphi'_\sigma \in \mathbf{QGrz}.$$

Доказательство. Ясно, что если $\varphi' \in$ **QGrz**, то $\varphi'_\sigma \in$ **QGrz**.

Пусть $\varphi' \notin$ **QGrz**. Тогда φ' опровергается в корне w модели M_r (см. доказательство леммы 8). Пусть $F_3 = \langle W_3, R_3\rangle$ – шкала, которая строится по F_r так же, как в доказательстве леммы 3 шкала F_1 была построена по F. В результате F_3 будет отличаться от F_1 лишь тем, что все миры в ней рефлексивны.

Расширим F_3 следующим образом. Положим достижимой из корня w шкалы F_3 рефлексивно-транзитивную шкалу, изображенную на рис. 3 (светлыми кружками, как и раньше, изображены рефлексивные миры, отношениям достижимости соответствуют линии, верхние миры достижимы из нижних, но не наоборот), а в качестве отношения достижимости возьмем транзитивное замыкание получившегося отношения. Определенную таким образом шкалу $\langle W_4, R_4\rangle$ обозначим через F_4. На F_4 определим модель $M_4 = \langle W_4, R_4, D_4, I_4\rangle$, положив для всякого $v \in W_4$

$$D_4(v) = \mathfrak{I},$$

кроме того, для всяких $v \in W$ (т.е. $v = w$ или $v = w_{k,m}$) и $n \in \mathfrak{I}$

$$(M_4, v) \not\models Q[n],$$

для всяких $k, m, n, r \in \mathfrak{I}$

$$(M_4, a_{n,k,m}) \not\models Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad n = 1;$$

$$(M_4, b_{n,k,m}) \not\models Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 \text{ или } n = 3;$$

$$(M_4, c_n) \not\models Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad n = 1, n = 3 \text{ или } n = 5;$$

$$(M_4, s_{1,k,m}) \not\models Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad (M_r, w_{k,m}) \not\models Q_1[r];$$

$$(M_4, s_{2,k,m}) \not\models Q[r] \quad \Leftrightarrow \quad (M_r, w_{k,m}) \not\models Q_2[r]$$

и для всяких $m \in \mathfrak{I}$

(M_4, s) © $Q[r]$;

в остальном модель M_4 произвольна.

Как и раньше, для всякой подформулы ψ формулы φ через ψ' обозначим формулу, получающуюся из ψ заменой каждой подформулы вида $P(x, y)$ на формулу $\Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1(x) \vee Q_2(y))]$, а через ψ'_σ – формулу, получающуюся из ψ' заменой каждого вхождения подформулы вида $Q_i(x)$ на $\sigma_i(x)$.

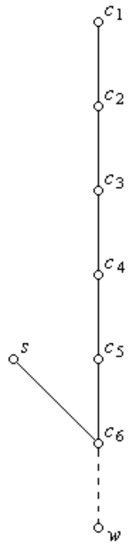

Рис. 3

Доказательство следующего факта проводится аналогично соответствующему рассуждению, приведенному в доказательстве леммы 3. Именно, индукцией по построению подформулы ψ формулы φ легко доказать, что для всякой интерпретации α индивидных переменных

$$(M_r, w) \lfloor \psi'[\alpha] \Leftrightarrow (M_4, w) \lfloor \psi'_\sigma[\alpha].$$

Тем самым доказали, что (M_4, w) © φ'_σ. Осталось заметить, что модель M_4 рефлексивна, транзитивна, не содержит бесконечных возрастающих цепей, состоящих из попарно различных миров, а также не содержит нетривиальных сгустков, т.е. в ней истинны все формулы, выводимые в **QGrz**. Следовательно, $\varphi'_\sigma \notin$ **QGrz**.

Теорема 10. *Фрагмент логики* **QGrz***, состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.*

На самом деле мы доказали более сильное утверждение, чем теоремы 4, 7 и 10.

Теорема 11. *Пусть модальная предикатная логика L такова, что:*

- *безмодальный фрагмент L совпадает с* **QCl***;*
- $L \subseteq$ **QGL** *или* $L \subseteq$ **QGrz**.

Тогда фрагмент логики L, состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.

Доказательство. Пусть $L \subseteq$ **QGL**. Если $\varphi \in \mathbf{QCl}^P$, то $\varphi_\lambda{}^* \in L$. Пусть теперь $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P$. Тогда $\varphi_\lambda{}^* \notin$ **QGL** по теореме 7, а следовательно, $\varphi_\lambda{}^* \notin L$. Таким образом,

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi_\lambda{}^* \in L,$$

откуда и следует неразрешимость указанного фрагмента логики L.

Пусть $L \subseteq \mathbf{QGrz}$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что

$$\varphi \in \mathbf{QCl}^P \Leftrightarrow \varphi'_\sigma \in L,$$

откуда снова следует неразрешимость соответствующего фрагмента логики L.

Отметим, что теорема 11 останется справедливой, если вместо упомянутых выше логик рассматривать логики постоянных областей. Действительно, достаточно заметить, что во всех рассуждениях мы использовали модели Крипке, в которых предметные области миров совпадали друг с другом. Условие постоянства областей может быть описано синтаксически путем добавления к соответствующей логике всех формул вида

$$\mathbf{BF} = \forall x \,\Box\varphi \to \Box\forall x\, \varphi,$$

и хотя получающаяся таким образом логика не всегда оказывается полной по Крипке, для нее проходит описанная выше конструкция. Следовательно, имеет место

Теорема 12. *Пусть модальная предикатная логика L такова, что:*

- *безмодальный фрагмент L совпадает с* $\mathbf{QCl}$*;*
- $L \subseteq \mathbf{QGL} + \mathbf{BF}$ *или* $L \subseteq \mathbf{QGrz} + \mathbf{BF}$.

Тогда фрагмент логики L, состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешим.

Следствие 13. *Фрагменты логик* **QK**, **QT**, **QK4**, **QS4**, **QGL**, **QGrz**, **QK** + **BF**, **QT** + **BF**, **QK4** + **BF**, **QS4** + **BF**, **QGL** + **BF**, **QGrz** + **BF**, *состоящие из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешимы.*

Отметим, что логики **QK**, **QT**, **QK4**, **QS4** являются полными по Крипке: они полны, соответственно, относительно класса всех шкал Крипке, относительно класса всех рефлексивных шкал, относительно класса всех транзитивных шкал и относительно класса всех рефлексивно-транзитивных шкал. Иначе обстоит дело с логиками **QGL** и **QGrz**: они не являются полными относительно ни одного из классов шкал Крипке (см. [4] и [8]).

Рассмотрим логики $\mathbf{QGL}^{sem}$ и $\mathbf{QGrz}^{sem}$, где $\mathbf{QGL}^{sem}$ – множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке логики Гёделя–Лёба **QGL**, а логика $\mathbf{QGrz}^{sem}$ – множество модальных формул, истинных во всех шкалах Крипке логики Гжегорчика **QGrz**. Ясно, что для них проходит описанная выше конструкция, и их фрагменты, состоящие из формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, неразрешимы. В [4] доказано, что логики $\mathbf{QGL}^{sem}$ и $\mathbf{QGrz}^{sem}$ не являются рекурсивно перечислимыми, поэтому, быть может, указанные фрагменты этих логик не только не разрешимы, но и не перечислимы. Покажем, что дело обстоит именно так.

Мы будем пользоваться общеизвестным фактом, состоящим в том, что шкалами логики **QGL** являются в точности иррефлексивно-транзитивные шкалы, не содержащие бесконечных возрастающих цепей, а шкалами **QGrz** – в точности рефлексивно-транзитивные шкалы, не содержащие бесконечных возрастающих цепей, состоящих из попарно различных миров, и не содержащие нетривиальных сгустков. Ввиду этого наблюдения очевидно, что для всякой формулы φ

$$\varphi \in \mathbf{QGrz}^{sem} \Leftrightarrow \varphi^{+} \in \mathbf{QGL}^{sem}, \qquad (*)$$

поэтому для наших целей будет достаточно доказать неперечислимость фрагмента логики $\mathbf{QGrz}^{sem}$, состоящего из всех формул от некоторой одноместной буквы, что мы и сделаем.

Пусть $\mathbf{QCl}_{fin}$ – классическая логика конечных областей, $\mathbf{QCl}^{P}_{fin}$ – фрагмент этой логики, состоящий из всех формул от одной двуместной предикатной буквы P. Известно, что логика $\mathbf{QCl}^{P}_{fin}$ является неперечислимой. Построим погружение этой логики в логику $\mathbf{QGrz}^{sem}$. Пусть Q – одноместная, а E, G и S – двуместные предикатные буквы (отличные от буквы P). Обозначим

$$\begin{aligned} Eq \quad = \quad & \Box^{+}[\forall x\, E(x, x) \wedge \forall x \forall y\, (E(x, y) \rightarrow E(y, x)) \wedge \\ & \wedge \forall x \forall y \forall z\, (E(x, y) \wedge E(y, z) \rightarrow E(x, z))] \end{aligned}$$

и ниже вместо $E(x, y)$ в большинстве случаев будем писать $x \approx y$. Выполнимость в некотором мире w формулы Eq означает, что предметные области мира w и достижимых из w миров разбиваются на классы эквивалентности по отношению $\approx$.

Смысл, который вкладывается в остальные буквы, чуть сложнее для описания; ниже мы определим формулу A, выполнимость которой одновременно с формулой Eq в некотором мире w модели, определенной на шкале логики **QGrz**, будет означать следующее:

- область мира w разбивается с помощью E на конечное число классов эквивалентности;
- эти классы упорядочены линейно по G, где G задает нестрогий частичный порядок;
- при переходе к непосредственно следующему за данным миру этот порядок либо сохраняется, либо изменяется

таким образом, что два последних класса эквивалентности склеиваются в один;

- отношение S определяется через G, и $S(x, y)$ означает, что либо $x \approx y$, либо класс, в который попал y, непосредственно следует по G за классом, в который попал x;
- буква Q нужна для того, чтобы «помечать» миры индивидами; считаем, что мир w модели $M = \langle W, R, D, I\rangle$ «помечен» индивидом $a \in D(w)$, если $(M, w) \models Q[a]$; при этом a будем называть меткой мира w;
- если a является меткой некоторого мира, то всякий элемент, следующий по G за a, тоже является меткой этого мира;
- при переходе к непосредственно следующему за данным миру множество меток не уменьшается и может пополниться за счет не более чем одного класса эквивалентности по E.

Перечислим условия, которые и будут определять формулу A. Опишем транзитивность G с добавлением, что для всякого элемента существует сравнимый с ним по G элемент:

$$A_1 = \Box\forall x\exists y\, G(x, y) \wedge \forall x\forall y\forall z\, [G(x, y) \wedge G(y, z) \to G(x, z)].$$

Запишем определение S:

$$A_2 = \Box\forall x\forall y\, [S(x, y) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (G(x, y) \wedge \forall z\, (G(x, z) \wedge G(z, y) \to (z \approx x) \vee (z \approx y)))].$$

Следующая формула гарантирует, что отношения G и S сохраняются (быть может, расширяются) при переходе к следующим мирам:

$$A_3 = \Box\forall x\forall y\, [(G(x, y) \to \Box G(x, y)) \wedge (S(x, y) \to \Box S(x, y))].$$

Согласованность G и E описывается формулой

$$A_4 = \Box\forall x\forall y\, [(x \approx y) \leftrightarrow (G(x, y) \wedge G(y, x))],$$

линейность G – формулой

$$A_5 = \Box\forall x\forall y\, [(x \approx y) \vee G(x, y) \vee G(y, x)].$$

Существование наименьшего по G элемента и наибольшего по G элемента можно описать с помощью формулы

$$A_6 = \exists x\, \Box\forall y\, G(x, y) \wedge \exists x\, \Box\forall y\, G(y, x).$$

Теперь запишем, что для всякого элемента, отличного от наибольшего, существует элемент, непосредственно следующий за ним по G, а для всякого элемента, отличного от наименьшего, – его непосредственный предшественник по G:

$$A_7 = \Box\forall x\,[(\exists y\,((x \geq y) \wedge G(x, y)) \to \exists y\,((x \geq y) \wedge S(x, y))];$$
$$A_8 = \Box\forall x\,[(\exists y\,((x \geq y) \wedge G(y, x)) \to \exists y\,((x \geq y) \wedge S(y, x))].$$

Следующие формулы описывают согласованность отношения G и свойства Q. Условие «если y следует непосредственно за x, то имеется мир, такой, что y является его меткой, а x – нет» описывается формулой

$$A_9 = \Box\forall x\forall y\,[((x \geq y) \wedge S(x, y)) \to ((Q(y) \wedge \neg Q(x))],$$

наследственность меток (в результате один и тот же мир может иметь несколько меток) – формулой

$$A_{10} = \Box\forall x\,[Q(x) \to \Box Q(x)].$$

Итак, при переходе от одного мира к другому множество меток может увеличиваться. Следующая формула описывает тот факт, что увеличение множества меток происходит постепенно – с добавлением не более чем одной метки при переходе к непосредственно следующему за данным миру:

$$A_{11} = \Box\forall x\forall y\forall z\,[Q(x) \wedge \neg Q(y) \wedge G(y, x) \wedge G(z, y) \wedge (z \geq y) \to \\ \to ((Q(y) \wedge \neg Q(z))].$$

Теперь запишем условие, выполнение которого наряду с остальными будет означать, что при переходе к миру, непосредственно следующему за данным, в новый класс эквивалентности могут слиться только наибольший по G и непосредственно ему предшествующий:

$$A_{12} = \Box\forall x\forall y\forall z\,[G(x, y) \wedge G(y, z) \wedge (x \geq y) \wedge (y \geq z) \to \\ \to \Box(G(y, z) \wedge (y \geq z) \to G(x, y) \wedge (x \geq y))].$$

Пусть меткой нижнего мира является всякий максимальный по G элемент и не является ни один другой:

$$A_{13} = \forall x\,(\forall y\,G(y, x) \to Q(x)) \wedge \forall x\,(\neg\forall y\,G(y, x) \to \neg Q(x)).$$

Осталось явно выразить G через Q:

$$A_{14} = \Box\forall x\forall y\,[G(x, y) \leftrightarrow \Box(Q(x) \to Q(y))].$$

Пусть $A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_{14}$. Пусть также $B(P)$ – конъюнкция всех аксиом равенства для буквы P, где вместо равенства стоит буква E.

Лемма 14. *Если* $\varphi \in \mathbf{QCl}^P{}_{fin}$, *то* $Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi \in \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbf{QCl}^P{}_{fin}$. Предположим, что существует модель $M = \langle W, R, D, I\rangle$, определенная на шкале логики **QGrz**, в некотором мире w которой опровергается формула $Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi$. Покажем, что в этом случае множество $D(w)$ разбивается с помощью E (т.е. с помощью $\approx$) на конечное число классов эквивалентности.

Предположим, что это не так. Так как в w истинны формулы A_1, A_4, A_5, то G линейно упорядочивает $D(w)$. Следовательно, достаточно показать, что в $D(w)$ нет бесконечных возрастающих и бесконечных убывающих по G цепей, состоящих из попарно неэквивалентных элементов. Заметим, что если в $D(w)$ имеется бесконечная возрастающая цепь, состоящая из попарно неэквивалентных элементов, то в $D(w)$ имеется и бесконечная убывающая цепь, состоящая из попарно неэквивалентных элементов. Действительно, в силу A_6 в $D(w)$ существует наибольший по G элемент a, который ограничивает сверху всякую бесконечную возрастающую цепь, состоящую из попарно неэквивалентных элементов. По A_8 для a существует его непосредственный предшественник по G, который, очевидно, будет обладать тем же свойством. Для него, в свою очередь, тоже существует непосредственный предшественник, ограничивающий всякую бесконечную возрастающую цепь, состоящую из попарно неэквивалентных элементов, и т.д. В результате получаем, что в $D(w)$ имеется бесконечная убывающая по G цепь, начинающаяся с элемента a и состоящая из попарно неэквивалентных элементов. Итак, достаточно показать, что в $D(w)$ нет бесконечных убывающих по G цепей, состоящих из неэквивалентных друг другу элементов.

Предположим, что в $D(w)$ имеется бесконечная убывающая цепь $\ldots a_3Ga_2Ga_1Ga_0$, где $a_i \geq a_j$ при $i \neq j$. Без ограничений общности можем считать, что a_0 – максимальный по G элемент. В силу A_{13} элемент a_0 является меткой мира w, а всякий элемент a_{i+1} – нет; по A_{11} и A_{12} получаем, что существуют миры $w_1, w_2, w_3, \ldots$ такие, что $wRw_1Rw_2Rw_3R\ldots$, причем метками мира w_k являются элементы $a_0, \ldots, a_k$ и не являются элементы a_i при $i > k$. Это означает, в частности, что миры $w_1, w_2, w_3, \ldots$ попарно различны, т.е. в модели M существует бесконечная возрастающая цепь, состоящая из попарно различных миров. Таким образом, M не может быть определена на шкале логики **QGrz**. Получили противоречие.

Итак, $D(w)$ разбивается с помощью G на конечное множество классов эквивалентности по E. Поскольку для P выполнены аксиомы равенства (где символ равенства заменен буквой E), то в мире w должна быть истинна формула φ (если бы это было не так, мы бы легко построили конечную контрмодель для φ, взяв из каждого класса эквивалентности по одному элементу и сохранив интерпретацию для буквы P). Последнее противоречит тому, что в w опровергается формула $Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi$.

Лемма 15. *Пусть φ – формула языка логики $\mathbf{QCl}^P{}_{fin}$. Тогда если $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P{}_{fin}$, то $Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \notin \mathbf{QCl}^P{}_{fin}$. Тогда существует модель $M_0 = \langle C, J\rangle$ с конечной областью C, в которой опровергается φ. Без ограничений общности можем считать, что $C = \{0, \dots , n\}$ для некоторого натурального числа n. Построим модель логики $\mathbf{QGrz}^{sem}$, в корне которой будет опровергаться формула φ. Рассмотрим шкалу $F = \langle W, R\rangle$, где

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{w_0, \dots , w_n\}; \\ w_k R w_m & \Leftrightarrow & k \prod m. \end{array}$$

На F определим модель $M = \langle W, R, D, I\rangle$, положив для всякого $k \in \{0, \dots , n\}$

$$\begin{array}{rcl} D(w_k) & = & \{0, \dots , n\}; \\ (M, w_k) \lfloor\, Q[m] & \Leftrightarrow & k \text{ ™ } m; \\ (M, w_k) \lfloor\, E[m, r] & \Leftrightarrow & m = r \text{ или } m, r \prod k; \\ (M, w_k) \lfloor\, G[m, r] & \Leftrightarrow & m \text{ ™ } r \text{ или } m, r \prod k; \\ (M, w_k) \lfloor\, S[m, r] & \Leftrightarrow & r = m \text{ или } r = m + 1 \text{ или } m, r \prod k; \\ (M, w_k) \text{ © } P[m, r] & \Leftrightarrow & k = n \text{ и } M_0 \text{ © } P[m, r]. \end{array}$$

Очевидно, что при таком определении имеет место отношение (M, w_n) © φ (мы определили отношение истинности в мире w_n так же, как и в модели M_0); при этом несложно убедиться, что $(M, w_n) \lfloor\, Eq \wedge A \wedge B(P)$.

Из лемм 14 и 15, а также из теоремы Трахтенброта о неперечислимости классической логики конечных областей вытекает

Теорема 16. *Логика* $\mathbf{QGrz}^{sem}$ *неперечислима.*

Изменим рассматривавшиеся выше формулы, выполнив последовательно следующие действия:

- вместо каждого вхождения $S(x, y)$ подставим формулу $G(x, y) \wedge \forall z\, (G(x, z) \wedge G(z, y) \to (z \approx x) \vee (z \approx y))$;
- вместо каждого вхождения $E(x, y)$ подставим формулу $G(x, y) \wedge G(y, x)$;
- вместо каждого вхождения $G(x, y)$ подставим формулу $\Box(Q(x) \to Q(y))$.

Получившиеся формулы будем помечать верхним индексом «1». В силу формул A_2, A_4, и A_{14} имеет место эквивалентность

$$Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi \in \mathbf{QGrz}^{sem} \Leftrightarrow [Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1 \in \mathbf{QGrz}^{sem}.$$

Теперь промоделируем букву P с помощью одноместных предикатных букв. Пусть Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 – одноместные буквы, отличные от Q. Подставим во все рассматривающиеся формулы вместо $P(x, y)$ формулу $\Box[\exists z\, Q_3(z) \to (Q_1(x) \vee Q_2(y))]$, а вместо $Q(x)$ – формулу $Q_4(x)$. Получившиеся в результате такой замены формулы будем помечать верхним индексом «2». Из допустимости в логике $\mathbf{QGrz}^{sem}$ правила подстановки вытекает

Лемма 17. *Если* $[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1 \in \mathbf{QGrz}^{sem}$*, то имеет место отношение* $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \in \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Имеет место и обратное утверждение.

Лемма 18. *Если* $[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1 \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$*, то имеет место отношение* $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Доказательство. Расширим шкалу F, определенную в доказательстве леммы 15, до шкалы $F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$, положив

$$
\begin{array}{rcl}
W_1 & = & W \sim \{v_{k,m} : k, m \in \{0, \ldots, n\}\}; \\
w_k \, R_1 \, w_m & \Leftrightarrow & k \prod m; \\
w_s \, R_1 \, v_{k,m} & \Leftrightarrow & s = n; \\
v_{s,t} \, R_1 \, v_{k,m} & \Leftrightarrow & s = k \text{ и } t = m.
\end{array}
$$

На F_1 определим модель $M_1 = \langle W_1, R_1, D_1, I_1 \rangle$, положив для всякого $u \in W_1$ и всяких $k, m \in \{0, \ldots, n\}$

$$
\begin{array}{rcl}
D_1(u) & = & \{0, \ldots, n\}; \\
(M_1, u) \copyright Q_1[k] & \Leftrightarrow & \text{либо } u = w_n, \text{ либо существует такое} \\
 & & m \in \{0, \ldots, n\}, \text{ что } u = v_{k,m} \text{ и } M \copyright P[k, m]; \\
(M_1, u) \copyright Q_2[m] & \Leftrightarrow & \text{либо } u = w_n, \text{ либо существует такое} \\
 & & k \in \{0, \ldots, n\}, \text{ что } u = v_{k,m} \text{ и } M \copyright P[k, m]; \\
(M_1, u) \copyright Q_3[m] & \Leftrightarrow & u = w_n; \\
(M_1, u) \copyright Q_4[m] & \Leftrightarrow & u \in W \text{ и } (M, u) \copyright Q[m].
\end{array}
$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что мы проводили при доказательстве лемм 1 и 8, несложно доказать, что

$$(M_1, w_n) \copyright [[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2,$$

откуда получаем, что $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Осталось промоделировать буквы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 посредством некоторой одноместной буквы Q. Это можно сделать с помощью формул $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(x)$, $\sigma_4(x)$. Как и раньше, для всякой формулы ψ через ψ_σ будем обозначать формулу, получающуюся из ψ подстановкой вместо $Q_i(x)$ формулы $\sigma_i(x)$.

Лемма 19. *Отношение* $[[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2]_\sigma \in \mathbf{QGrz}^{sem}$ *выполняется тогда и только тогда, когда имеет место отношение* $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \in \mathbf{QGrz}^{sem}$.

Доказательство. Если $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \in \mathbf{QGrz}^{sem}$, то $[[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2]_\sigma \in \mathbf{QGrz}^{sem}$, поскольку вторая формула получена из первой с помощью подстановки.

Пусть $[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2 \notin \mathbf{QGrz}^{sem}$. Расширим шкалу F_1, положив из каждого мира $v_{k,m}$ достижимой шкалу, изображенную

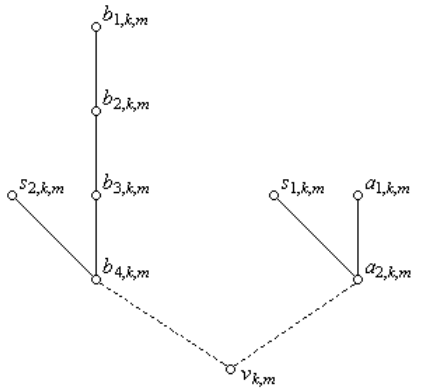

Рис. 4

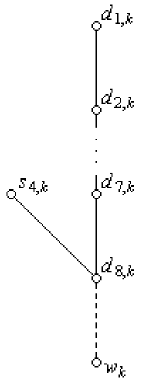

Рис. 5

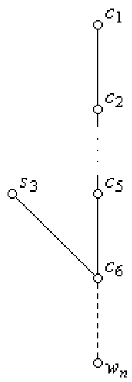

Рис. 6

на рис. 4, из каждого мира w_k – шкалу, изображенную на рис. 5, а из мира w_n – еще и шкалу, изображенную на рис. 6; в качестве отношения достижимости возьмем транзитивное замыкание получившегося в результате такого расширения отношения. Новую шкалу $\langle W_2, R_2\rangle$ обозначим через F_2. На F_2 определим модель $M_2 = \langle W_2, R_2, D_2, I_2\rangle$, положив для всякого $u \in W_2$ и всяких $k, m, r, t \in \{0, \dots , n\}$

$$
\begin{array}{rcl}
D_2(u) & = & \{0, \dots , n\}; \\
(M_2, a_{t,k,m}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & t = 1; \\
(M_2, b_{t,k,m}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & t = 1 \text{ или } t = 3; \\
(M_2, c_t) \models Q[r] & \Leftrightarrow & t = 1,\ t = 3 \text{ или } t = 5; \\
(M_2, d_{t,k}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & t = 1,\ t = 3,\ t = 5 \text{ или } t = 7; \\
(M_2, s_{1,k,m}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & (M_1, v_{k,m}) \models Q_1[r]; \\
(M_2, s_{2,k,m}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & (M_1, v_{k,m}) \models Q_2[r]; \\
(M_2, s_{4,k}) \models Q[r] & \Leftrightarrow & (M_1, w_k) \models Q_4[r]; \\
(M_2, s_3) \not\models Q[r]; & & \\
(M_2, w_k) \models Q[r]; & & \\
(M_2, v_{k,m}) \models Q[r]. & &
\end{array}
$$

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве леммы 8, можно показать, что $(M_2, w_n) \not\models [[\varphi^1]^2]_\sigma$. Кроме того, несложно проверить, что $(M_2, w_n) \lfloor [[[Eq \wedge A \wedge B(P)]^1]^2]_\sigma$. При проверке этого факта нужно воспользоваться тем, что

$$(M_2, u) \copyright \sigma_4[m] \quad \Leftrightarrow \quad u = w_k \text{ и } m < k \text{ или же } u = d_{8,k} \text{ и } m < k.$$

В результате получаем, что $(M_2, w_n) \copyright [[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2]_\sigma$. Поскольку F_2 является шкалой логики **QGrz**, то отсюда следует, что $[[[Eq \wedge A \wedge B(P) \to \varphi]^1]^2]_\sigma \notin$ **QGrz**^{sem},

Используя утверждения 14–19, получаем, что имеет место

Теорема 20. *Фрагмент логики* **QGrz**^{sem}*, состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, не является рекурсивно перечислимым.*

Используя эквивалентность (∗), получаем аналогичный результат и для логики **QGL**^{sem}. Именно, верна следующая

Теорема 21. *Фрагмент логики* **QGL**^{sem}*, состоящий из всех формул, построенных с использованием одной лишь одноместной предикатной буквы, не является рекурсивно перечислимым.*

В [4] доказывается неперечислимость бесконечных классов логик (логики **QGL**^{sem} и **QGrz**^{sem} являются в этих классах наименьшими по включению), поэтому кажется естественным распространить утверждения теорем 20 и 21 на другие логики, рассмотренные в [4]. Для этого достаточно было бы провести описанную выше конструкцию для логик **QGLLin**^{sem} и **QS4.3Grz**^{sem} (первая логика описывается классом всех линейных шкал логики **QGL**, а вторая – классом всех линейных шкал логики **QGrz**). Здесь мы сталкиваемся с трудностью, поскольку описанная выше конструкция предполагает, что рассматриваемая логика, по меньшей мере, должна иметь шкалы, в которых существуют антицепи любой (конечной) мощности, в то время как мощность любой антицепи в шкалах логик **QGLLin**^{sem} и **QS4.3Grz**^{sem} равна единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
2. *Маслов С.Ю., Минц Г.Е., Оревков В.П.* Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные // Доклады АН СССР. 1965. Т. 163, № 2. С. 295–297.
3. *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* Константные формулы в модальных логиках: проблема разрешения // См. настоящий сборник.
4. *Рыбаков М.Н.* Перечислимость модальных предикатных логик и условия обрыва возрастающих цепей // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 155–167.

5. Семантика модальных и интенсиональных логик. Сб. статей. Пер. с англ., сост., общ. ред. и вступит. статья В.А.Смирнова. М.: Прогресс, 1981.
6. *Halpern J.Y.* The Effect of Bounding the Number of Primitive Propositions and the Depth of Nesting on the Complexity of Modal Logic // Artificial Intelligence, Vol. 75. No. 2, 1995. P. 361–372.
7. *Kripke S.A.* The Undecidability of modal quantification theory // Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. Vol 8. 1962. P. 113–116. (Русский перевод: *С.А. Крипке.* Неразрешимость одноместного модального исчисления предикатов // Р. Фейс. Модальная логика. М.: Наука, 1974. С. 247–253.)
8. *Montagna F.* The Predicate Modal Logic of Provability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1984. Vol. 25. N 2. P. 1059–1073.