В.М.Попов

ОБ ОДНОЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ ПАРАПОЛНОИ ЛОГИКЕ*

Abstract. *A propositional logic LAP with semantics of descriptions of state is constructed. For* LAP *a three valued characteristic matrix and Gentzen-type sequent calculus are presented. A theorem that* LAP *is paracomplete logic is formulated and a translation from the calculus* ClP *(which is a formalization of the classical propositional logic) to the* LAP *is described.*

Строится пропозициональная логика LAP, наделенная модифицированной семантикой обобщенных по Е.К.Войшвилло [1] опианий состояния. Конструируется трехзначная характеристическая матрица для LAP, формулируется теорема о паранеполноте LAP, описывается секвенциальное исчисление, аксиоматизирующее эту логику, определяются операции, погружающие классическую пропозициональную логику в LAP.

Язык L логики LAP есть стандартно определяемый пропозициональный язык над алфавитом $< S, \&, \vee, \supset, \neg,), (>$, где S есть множество $\{ s_1, s_2,...,s_n,... \}$ всех пропозициональных переменных языка L. Термин «формула» используется здесь как сокращение термина «формула в языке L», принимаются обычные соглашения об опускании скобок в формулах. Квазиэлементарной формулой называется формула, которая не имеет вхождений ни одной из логических связок $\&, \wedge, \supset$. Логика LAP есть наименьшее множество формул, которое замкнуто относительно правила подстановки и правила modus ponens и которому принадлежат все классические тавтологии в языке L, не содержащие вхождений $\neg$, и следующие формулы:

$\neg (s_1 \supset s_1) \supset s_2$, $(s_2 \supset(\neg s_2 \supset \neg (s_1 \supset s_1))$,

$((s_1 \supset s_2) \supset s_2) \supset(\neg s_2 \supset s_1)$,

$\neg \neg s_1 \supset s_1$,

$s_1 \supset \neg \neg s_1$,

все формулы вида

$(A \supset \neg (s_1 \supset s_1)) \supset \neg A$, где A не является квазиэлементарной формулой, и все формулы вида

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 00-06-80037, и РГНФ, грант № 02-03-18196.

$(A \supset s_1) \supset ((s_1 \supset \neg A) \supset \neg A)$, где A не является квазиэлементарной формулой.

Описанием состояния называется отображение множества всех квазиэлементарных формул во множество {0,1}. Описание состояния v такое, что $v(x) = v(\neg \neg x)$ для всякой квазиэлементарной формулы x, называется регулярным описанием состояния. Последнее определение корректно, так как x есть квазиэлементарная формула, т.т.т. $\neg$ x есть квазиэлементарная формула.

Описание состояния v такое, что $v(x) = 0$ или $v(\neg x) = 0$ для всякой квазиэлементарной формулы x, называется непротиворечивым описанием состояния.

Для всякого описания состояния v определяем отображение $|\ |_v$ множества всех формул в {0,1}следующим образом:

а) для всякой квазиэлементарной формулы x верно, что $|x|_v = v(x)$,

б) для всякой формулы A, не являющейся квазиэлементарной формулой, верно что $|\neg A|_v = 1$ т.т.т. $|A|_v = 0$,

в) для всяких формул A и B верно, что

$|A \& B|_v = 1$ т.т.т. $|A|_v = 1$ и $|B|_v = 1$,

$|A \vee B|_v = 1$ т.т.т $|A|_v = 1$ или $|B|_v = 1$,

$|A \supset B|_v = 1$ т.т.т. $|A|_v = 0$ или $|B|v = 1$.

Теорема 1. Для всякой формулы A выполняется следующее условие: $A \in LAP$ т.т.т. $|A|_v = 1$ для всякого регулярного и непротиворечивого описания состояния v.

Теорема 2. Логическая матрица $M = \langle \{0, 1, f\}, \{1\}, \&, \vee, \supset, \neg \rangle$, операции которой определяются нижеследующими таблицами T 1, T 2, T 3 и T 4, является характеристической матрицей логики LAP.

T 1

&	1	0	f
1	1	0	0
0	0	0	0
f	0	0	0

T 2

∨	1	0	f
1	1	1	1
0	1	0	0
f	1	0	0

T 3

⊃	1	0	f
1	1	0	0
0	1	1	1
f	1	1	1

T 4

	¬
1	0
0	1
f	f

LAP-теорией называется множество формул, включающее LAP и замкнутое относительно modus ponens.

Полной LAP-теорией называется такая LAP - теория T, что для всякой формулы A верно следующее: $A \in T$ или $\neg A \in T$.

Теорема 3 (о параполноте логики LAP). Существует такая LAP-теория T, которая не является полной, и всякая полная LAP-теория, включающая T, равна множеству всех формул.

Секвенциальное исчисление GLAP является секвенциальным исчислением генценовского типа. Далее буквы A и B используются как переменные по формулам, а буквы Γ, Δ, Σ, Θ – как переменные по конечным последовательностям формул (пустая последовательность формул является конечной последовательностью формул). Множество всех основных секвенций исчисления GLAP есть множество всех секвенций вида A → A. Множеству всех правил этого исчисления принадлежат все следующие правила R1 – R19 и только они.

R1: $\dfrac{\Gamma, A, B, \Lambda \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Lambda \to \Theta}$, R2: $\dfrac{\Gamma \to \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, B, A, \Theta}$, R3: $\dfrac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$,

R4: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}$, R5: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}$, R6: $\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A}$,

R7: $\dfrac{\Gamma \to \Lambda, A \quad B, \Sigma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$, R8: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B}$, R9: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{A \mathbin{\&} B, \Gamma \to \Theta}$,

R10: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{B \mathbin{\&} A, \Gamma \to \Theta}$, R11: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \mathbin{\&} B}$, R12: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}$,

R13: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, B \vee A,}$, R14: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta}$, R15: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta}$,

R16: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A}$ (здесь A не является квазиэлементарной формулой),

R17: $\dfrac{A, \Gamma \to \Theta}{\neg \neg A, \Gamma \to \Theta}$ (здесь A есть квазиэлементарная формула),

R18: $\dfrac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, \neg \neg A}$ (здесь A есть квазиэлементарная формула),

R19: $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta}$ (правило сечения).

Определение GLAP-вывода является обычным для секвенциальных исчислений генценовского типа (см. 2, 3). Для GLAP верна теорема об устранимости сечения.

Теорема 4. Для всякой формулы A выполняется условие: $A \in LAP$ т.т.т. секвенция $\to A$ выводима в GLAP.

Связь логики LAP с классической пропозициональной логикой ClP, сформулированной в языке L , устанавливает теорема 5.

Теорема 5. Пусть φ – отображение множества всех пропозициональных переменных языка L во множество всех формул, удовлетворяющее условиям: 1) $\varphi(s_i)$ не есть квазиэлементарная формула ни для какой пропозициональной переменной s_i языка L, 2) для всякой пропозициональной переменной s_i языка L формулы $s_i \supset \varphi(s_i)$ и $\varphi(s_i) \supset s_i$ принадлежат логике ClP.

Тогда для всякой формулы A верно, что

$A \in ClP$ т.т.т. $h_\varphi(A) \in LAP$,

где h_φ есть такое отображение множества всех формул в само это множество, что для всякой пропозициональной переменной s_i языка L и всяких формул B и C выполняются условия:

а) $h_\varphi(s_i) = \varphi(s_i)$,

б) $h_\varphi(B \circ C) = h_\varphi(B) \circ h_\varphi(C)$ (здесь $\circ \in \{ \&, \vee, \supset \}$),

$$h_\varphi(\neg B) = \neg h_\varphi(B).$$

Например, определив для всякой пропозициональной переменной s_i $\varphi(s_i)$ как $s_i \& s_i$ (или как $s_i \vee s_i$), получаем операцию h_φ, погружающую ClP в LAP.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войшвилло Е.К.* Философско-методологические аспекты релевантной логики. М., 1988.
2. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода.М., 1967. С. 9-74.
3. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления М., 1999. С. 16-233.