Л.И.Мчедлишвили

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА ДЛЯ НЕТРАДИЦИОННЫХ СИСТЕМ СИЛЛОГИСТИКИ

Abstract. *Leibniz worked out for the assertoric positive syllogistics an arithmetical semantics with ordered pairs of mutually prime natural numbers as admitted values of term-variables. In [5], [14] was proved that the arithmetical semantics gives the adequate understanding of the Łukasiewicz's formal Systems L of syllogistics. In set-theoretical (extensional) semantics of the formal Systems B and Sm, in contrary to L, the empty value for term-variables is admitted and the propositions SaP and SeP means accordingly* $S \subseteq P$ *and* $S \cap P = \varnothing$ *(in B),* $S \neq \varnothing$ & $S \subseteq P$ *and* $S \cap P = \varnothing$ *(in Sm). In this article is defined Leibniz-style arithmetical semantics with arbitrary natural numbers as admitted values of term-varibles for these systems.*

В рамках своей программы универсальной науки Г.В.Лейбниц в 1679 г. разработал *арифметическую семантику* для аристотелевской ассерторической позитивной силлогистики (APS)[1]. Правильно построенные выражения APS, при ее формулировке в качестве самостоятельной логической теории, образуются из атомарных формул вида SaP, SeP, SiP и SoP с помощью обычных пропозициональных связок, где S и P – переменные для общих (силлогистических) терминов (язык Syl^+). В понятиях современной методологии основные идеи арифметической семантики можно изложить следующим образом. *Арифметической интерпретацией* языка Syl^+ является функция f, которая 1) каждому силлогистическому термину T языка Syl^+ (в качестве значения) приписывает упорядоченную пару взаимнопростых чисел (t_1,t_2), 2) а каждой формуле этого языка – истинностное значение И или Л согласно следующим базисным правилам:

f(SaP)=И $\Leftrightarrow$ s_1 делится без остатка на p_1 и s_2 делится без остатка на p_2,

f(SeP)=И $\Leftrightarrow$ s_1 и p_2 или s_2 и p_1 не являются взаимнопростыми числами,

f(SiP)=И $\Leftrightarrow$ f(SeP)=Л,

[1] Полный список фрагментов Лейбница, в которых обсуждается эта тема, дан в [11]; некоторые из них посвящены интересующей нас интерпретации силлогистического языка упорядоченными парами натуральных чисел; только один из этих фрагментов – “Правила, по которым…” (“Regulae ex quibus…”) – переведен на русский язык [4]. Р. Кауппи анализирует также комментарий Л.Кутюра (из его “La Logique de Leibniz”) к ним. Далее мы будем иметь в виду этот анализ.

$f(SoP)=И \Leftrightarrow f(SaP)=Л$,

и индуктивным правилам, соответствующим классическим таблицам истинности для пропозициональных связок. Как увидим далее, более согласованной с другими логическими положениями, принимаемыми Лейбницем, является следующая модификация базисного правила для общеутвердительного высказывания:

$f(SaP)=И \Leftrightarrow$ все простые делители p_1, являются делителями также s_1, а все простые делители p_2 – делителями s_2.

Пусть для всякого натурального числа n "[n]" обозначает множество его простых делителей; тогда, принимая эту коррекцию, базисные правила можно записать в терминах обычных теоретико-множественных отношений:

$f(SaP)=И \Leftrightarrow [p_1] \subseteq [s_1]$ и $[p_2] \subseteq [s_2]$,

$f(SeP)=И \Leftrightarrow [s_2] \cap [p_2] \neq \varnothing$ или $[s_2] \cap [p_1] \neq \varnothing$,

$f(SiP)=И \Leftrightarrow f(SeP)=Л$,

$f(SoP)=И \Leftrightarrow f(SeaP)=Л$[2].

Арифметическую общезначимость в смысле Лейбница для формул Syl^+ можно определить стандартно. Е.Слупецкий и Я.Лукасевич показали, что понятия выводимости в формальном силлогистическом исчислении Лукасевича L (его мы называем традиционной системой силлогистики) и арифметической общезначимости в смысле Лейбница равнобъемны [5, гл. V], [14].

Ввиду важности этого результата для дальнейшего изложения коротко опишем его. Исчисление L построено как реконструкция APS Аристотеля; оно формулируется в языке Syl^+ на базе классического исчисления высказываний (PC), принимая *частные случаи классических тавтологий* в качестве аксиом, с исходными правилами *подстановки* (переменного термина на место переменного термина) и *отделения антецедента* (modus ponens) и следующими специальными аксиомами[3]:

1. $SeP \supset PeS$,	4. $MaP \wedge SaM \supset SaP$,
2. $\neg SaP \equiv SoP$,	5. $MeP \wedge SaM \supset SeP$,
3. $\neg SeP \equiv SiP$,	6. $\neg(SaP \wedge SeP)$
	7. SaS

С экстенсиональной точки зрения система L представляет собой такой фрагмент обычного исчисления классов, в котором SaP и SeP понимаются как $S \subseteq P$ и $S \cap P=0$ с ограничением: *допус-*

---

[2] В этой формулировке базисных пунктов правил истинности обнаруживается, что в арифметической семантике числа не играют существенной роли и могут быть заменены произвольными конечными подмножествами некоторого непустого множества.

[3] Данная формулировка L отлична от оригинальной версии Лукасевича, однако легко можно доказать в определенном смысле их равносильность.

тимыми значениями переменных терминов являются непустые подмножества области предметов (т.е. термины с непустыми объемами). Заметим, что в арифметической семантике Лейбница в некотором смысле обращены соотношения, существование которых утверждается в категорических высказываниях при их экстенсиональной трактовке. Это можно рассматривать как признак того, что в основе арифметической семантики Лейбница лежит некоторая интенсиональная концепция понимания категорических высказываний.

Лукасевич и Слупецкий построили также исчисление отбрасываемых (непринимаемых) силлогистических формул (исчисление *L); оно формулируется на базе L как его расширение, с единственной дополнительной аксиомой отбрасывания

*1. PaM$\cap$SaM $\supset$SiP,

где «*» – знак отбрасывания, и следующими дополнительными исходными правилами вывода: *обратная подстановка* (если отбрасывается результат подстановки в формулу F, то отбрасывается и сама формула F), *отделение консеквента*, modus tollens (если доказуема F$\supset$G, а G отбрасывается, то отбрасывается также F) и *правило Слупецкого* (если отбрасываются A$\supset$D и B$\supset$D, где A и B – отрицательные атомы, а D – дизъюнкция произвольных атомов, то отбрасывается также A$\wedge$B$\supset$D) (о понятии отбрасывания см. [5], [9]); – и дали эскиз доказательства следующих двух утверждений: (I) *Ни одна силлогистическая формула не является доказуемой в L и отбрасываемой в* *L (утверждение о *несовместимости* метапредикатов доказуемости и отбрасываемости) и (II) *Каждая силлогистическая формула или доказуема в L или отбрасываема в *L* (утверждение о *дополнительности* метапредикатов доказуемости и отбрасываемости). Первая из них выводится из утверждений (I.1) *Каждая доказуемая в L формула является арифметически общезначимой в смысле Лейбница* и (I.2) *Каждая отбрасываемая в *L формула является арифметически опровержимой в смысле Лейбница*[4]. Для доказательства (I.1) достаточно проверить арифметическую общезначимость специфических силлогистических аксиом L, так как очевидно, что правила вывода L сохраняют это свойство формул. Очевидно также, что правило обратной подстановки и modus tollens сохраняют арифметическую опровержимость, поэтому для доказательства утверждения (I.2) достаточно проверить арифметическую опровержимость единственной аксиомы отбрасывания исчисления *L и доказать, что пра-

[4] В дальнейшем в подобных контекстах разъяснительную фразу «в смысле Лейбница» будем опускать.

вило Слупецкого также обладает аналогичным свойством сохранения арифметической опровержимости: если арифметически опровержимы формулы $A \supset D$ и $B \supset D$, где A и B – отрицательные атомы, а D – дизъюнкция произвольных атомов, то арифметически опровержима также формула $A \wedge B \supset D$; доказательство этого утверждения, принадлежащее Слупецкому, приводится в книге Лукасевича [5, 185-187]. Что же касается доказательства утверждения (II), то в нем используется силлогистическая версия теоремы о конъюнктивной нормальной форме, а также эффективная процедура нахождения для любой дизъюнкции силлогистических атомов ее доказательства в L или ее отбрасывания в *L. Из утверждений (II) и (I.2) следует теорема полноты для исчисления L: (III) *Каждая арифметически общезначимая формула языка* Syl^{+} *доказуема в L.* Метатеоремы (I.1) и (III) совместно составляют утверждение о равнообъемности предикатов выводимости в L и арифметической общезначимости в смысле Лейбница.

Лейбниц был уверен, что описанную трактовку силлогистического языка с соответствующими изменениями можно приложить к модальным, гипотетическим и негативным силлогизмам. Однако его попытка определить арифметическое значение отрицательного термина по арифметическому значению отрицаемого термина оказалось неудачной. В частности, при доказательстве законов силлогистической контрапозиции Лейбниц применяет правило: если значением термина T является упорядоченная пара чисел (t_1, t_2), то значение его отрицания T′ (не -T) определяется как упорядоченная пара (t_2, t_1); однако легко можно показать, что при таком понимании из SeP не следует SaP′, т.е. проваливается один из законов превращения [11]. После этой неудачи работа в направлении расширения сферы применимости арифметической семантики Лейбницем не была продолжена. Но думается, что для того чтобы адекватно оценить Лейбницево предположение и его метод арифметизации силлогистики, необходимо исследовать возможности применения этого метода за пределами традиционной ассерторической силлогистики, реконструированной в исчислении L.

В настоящей работе анализируется философское основание, так сказать, "идеология" арифметической семантики Лейбница и показывается возможность истолкования арифметически в духе Лейбница двух нетрадиционных систем APS (первый набросок такого обобщения дан в [8][5]); эти системы с экстенсиональной

[5] Эскиз обобщения Лейбницева метода арифметизации для негативной силлогистики дан в [3].

точки зрения являются такими фрагментами обычного исчисления классов, в которых для переменных терминов, в отличие от L, допускается и пустое значение; кроме того, суждения SaP и SeP в первом из них, вслед за А. Де Морганом, Ф.Брентано, Ч.Пирсом и др., соответственно понимаются как $S \subseteq P$ и $S \cap P \neq 0$ без всякого ограничения, а в другом – как $S \neq \varnothing$ & $S \subseteq P$ и $S \cap P = \varnothing$. При первом истолковании непустота субъекта является необходимым условием истинности частного (но не общего) высказывания, тогда как при втором истолковании непустота субъекта следует из утвердительных (но не отрицательных) высказываний. Второе понимание силлогистического языка имеет корни в "Категориях" Аристотеля, широко обсуждалось в средневековой логике, а в XX в. предлагалось (Дж.Кейнсом, У.Джонсоном, К.Поппером) как альтернатива первого понимания, сохраняющая все законы обращения, логического квадрата и силлогизмов [12], [2], [1].

Первое нетрадиционное понимание силлогистики было аксиоматизировано Ю.М.Бохенским [1] и Дж.Шефердсоном [13], второе Э.Дж.Леммоном [15] и В.А.Смирновым [10]. Обозначим эти системы как B и Sm соответственно. B и Sm, подобно L, формулируются в языке Syl^{+} на базе PC с теми же исходными правилами вывода и следующими специальными силлогистическими аксиомами:

B. Аксиомы 1, -5,7 и   Sm. Аксиомы 1- 6 и

8. $SiP \supset SiS$ 10. $SiP \supset SaS$

9. $SoP \supset SiS$

В [9] нами были построены также исчисления отбрасываемых формул *B и *Sm; они соответственно формулируются на базе исчислений B и Sm, как их расширения, с аксиомами отбрасывания:

* B   * 2. $(PiP \wedge SiS) \supset (PaM \wedge SaM \supset SiP)$,

   * 3. $SiS \supset PiP$

   * Sm. Аксиома отбрасывания *1 и

   * 4. $SaS \supset PiP$;

с теми же дополнительными исходными правилами вывода, что и *L (однако правило Слупецкого в *B ограничивается определенным условием [9,98]); на основе их экстенсионального (т.е. вышеуказанного теоретико-множественного) понимания, без привлечения какого-либо варианта арифметической семантики, также доказаны утверждения (I^0) и (II^0) *о несовместимости и дополнительности метапредикатов выводимости в B (Sm) и отбрасываемости в *B (*Sm).*

*   *   *

Как пришел Лейбниц к арифметической семантике? На какой "логической идеологии" основывал он свою интуицию? Лейбницова программа универсальной науки (scientia universalis) состоит из двух частей: универсального метода обозначений (characteristica universalis), целью которого является разработка существенно отличной от обычной, в некотором смысле алгебраической, системы обозначений для записи научных фактов, и формальной теории рассуждения (calculus ratiocinator), применяемой к языку, основанному на новой системе обозначений. Убежденность Лейбница в осуществимости идеи универсальной характеристики опирается на его концепцию о структуре или комбинаторике понятий. Согласно первоначальной версии этой концепции (1) каждое понятие, т.е. содержание каждого термина, однозначно разлагается (анализируется) на простые, далее неразложимые понятия (на простые признаки, реквизиты), (2) из которых оно строится (синтезируется) с помощью их сочленения, трактуемого Лейбницем в смысле конъюнкции (пересечения) понятий. Рассуждение представляет собой оперирование характерами или знаками; они могут быть картинками, словами, числами и пр. Прогресс в познании во многом зависит от особенностей избранной системы характеров. Лейбниц считает, что успехи математики существенно обусловлены спецификой применяемой в математическом языке обозначений. Исходя из этого он отдает предпочтение выбору чисел в качестве характеров и в других областях науки. Основными положениями универсальной характеристики и исчисления рассуждений являются: (3) каждому простому понятию можно взаимооднозначно поставить в соответствие простое число и (4) это соответствие распространить на все понятия, обозначив каждое из них произведением простых чисел, соответствующих простым понятиям, из которых оно составлено (характеристическое число понятия); (5) каждое высказывание (Лейбниц имеет в виду простые категорические суждения) можно трактовать как утверждение существования некоторого арифметического отношения между характеристическими числами понятий, входящих в данное высказывание.

Чтобы задать характеристические числа, нужно искать определения понятий и, в конце концов, сводить их к неразложимым реквизитам. Однако Лейбниц полагал, что даже в том случае, когда фактически не найдены все определения и, тем самым, не найдены все характеристические числа, выполнив требование (5), на основе гипотетического существования характеристических чисел можно задать арифметические критерии корректности рассуждения и доказать все логические законы. Логические фрагменты Лейбница содержат серию попыток сведения отношений между понятиями к численным отношениям. Большинство из них датированы апрелем 1679 г., хотя отдельные идеи, рассмотренные в них, встречаются и в более ранних работах, в том числе в Dissertatio de Arte combinatoria.

При поиске решения проблемы, заключенной в тезисе (5), *исходным для Лейбница была интенсиональная трактовка общеутвердительного высказывания:* оно утверждает включение предиката высказывания в субъект высказывания, т.е. SaP истинно, если и только если понятие P является (конъюнктивной) частью понятия S; точнее, если каждое простое понятие, входящее в содержание P, входит также в содержание S. Пусть s и p – характеристические числа понятий S и P; учитывая способ их задания, Лейбниц заключает, что указанное интенсиональное условие равносильно арифметическому условию: *существует такое натуралное число n, что s=pn*, другими словами, *p является делителем s.* Более точным арифметическим переводом интенсиональной трактовки общеутвердительного высказывания была бы следующая формулировка: *каждый простой делитель p является делителем также s*, символически, $[p]\subseteq[s]$; кроме того, такая формулировка была бы более согласованной с другими логическими положениями, принимаемыми Лейбницем, например, законом идемпотентности для понятий (частноотрицательное высказывание как интенсионально, так и арифметически понимается как отрицание общеутвердительного высказывания).

Лейбницу не удалось найти такие интенсиональные и арифметические условия истинности частноутвердительного и общеотрицательного высказываний, чтобы они совместно с условиями истинности высказываний типа a и o обеспечивали корректность всех законов традиционной APS. Один вариант таких условий, над которым размышлял Лейбниц и который встречается уже в Dissertatio, гласит: каждое частноутвердительное высказывание возникает из общеутвердительного высказывания с теми же терминами либо посредством субальтернации, либо посредством обращения с ограничением. Как заметил Кутюра, это предположение Лейбница подразумевает принятие неверной равносильности $SiP\equiv SaP \vee PaS$, ибо очевидно, что существуют такие термины S и P, для которых, хотя SiP истинно, не выполняются ни SaP, ни PaS. В другом варианте на SiP распространяется с определенным ограничением понимание SaP: в частноутвердительном высказывании утверждается включение предиката в какой-либо вид субъекта. Так как вид получается добавлением нового признака к совокупности признаков рода, Лейбниц полагал, что такому (интенсиональному) пониманию SiP соответствует арифметическое условие: SiP истинно, если и только если характеристическое число s субъекта, умноженное на некоторое число, делится без остатка на характеристическое число p предиката (общеотрицательное высказывание как интенсионально, так и арифметически понимается как отрицание отношения, утверждаемого в SiP). С применением кванторов описанные арифметические условия истинности простых категорических высказываний можно записать следущим образом:

SaP: $\exists n(s=pn)$, SeP: $\forall mn(sm\neq pn)$

SiP: $\exists mn(sm=pn)$, SoP: $\forall n(s\neq pn)$.

Кутюра был прав, когда утверждал, что всегда (т.е. для любых S и P) можно найти числа m и n, удовлетворяющие равенству $sm=pn$ (например, путь $m=p$ и $n=s$); это означает, что при таком понимании SiP формулы SiP и ¬SeP являлись бы законами силлогистики, что противоречит традиционному пониманию APS.

Эти трудности, которые, по-видимому, осознавал и сам Лейбниц, для него были симптомом каких-то дефектов комбинаторики понятий, служащей основанием концепции универсальной характеристики. С целью их устранения Лейбниц скорректировал как свое понимание содержания понятия (термина), так и способ использования чисел в качестве характеров; в частности, в усовершенствованной версии комбинаторики понятий сложное понятие является композицией (сочленением) не только простых понятий – теперь каждая ее составляющая является либо простым понятием, либо отрицанием (дополнением) простого понятия и поэтому каждое понятие обозначается (кодируется) упорядочнной парой чисел; первая компонента этой пары является произведением простых чисел, соотвествующих простым понятиям, которые входят в данное понятие сами, т.е. положительно, а вторая – произведением простых чисел, соответствующих простым понятиям, дополнения которых входят в данное понятие, т. е. входят отрицательно. Это предположение подтверждается употреблением Лейбницем знаков «+» и «–» при описании арифметической интерпретации. Первый член характеристической пары чисел он снабжает знаком «+», второй – знаком «–» (см. [4, 538-546]); однако эти знаки в арифметическом смысле совершенно излишни (Лукасевич их даже не упоминает). Очевидно, что они «реликты» подразумеваемой Лейбницем новой версии комбинаторики понятий: первое число кодифицирует простые понятия, входящие положительно в данное понятие, второе – простые понятия, входящие в данное понятие отрицательно.

Следовательно, для содержания произвольного понятия (термина) T имеется равенство

$T=T_1\cap\ldots\cap T_m\cap T'_{m+1}\cap\ldots\cap T'_{m+n}$,

где $T_1, \ldots, T_{m+n}$ – простые понятия (признаки, реквизиты), « ' » – знак понятийного отрицания (дополнения), а характер T определяется как пара чисел $(t_1\cdot\ldots\cdot t_m, t_{m+1}\cdot\ldots\cdot t_{m+n})$, где $t_1\ldots t_m, t_{m+1}\ldots t_{m+n}$ простые числа, соответствущие простым понятиям $T_1, \ldots, T_m, T_{m+1},\ldots T_{m+n}$[6].

Имея в виду описанную версию комбинаторики понятий, все пункты арифметической семантики, предложенной Лейбницем, обретают неарифметический смысл и становится возможным *перевести* их в интенсионально-семантические утверждения, одновременно выявляя корреляцию, которая существует между обычным экстенсиональным рассмотрением силлогистики [6]; [9] и et интенсиональной трактовкой.

Во-первых, требование взаимной простоты членов упорядоченной пары чисел (t_1, t_2), являющейся допустимым арифметическим значением произвольного термина T, означает, что содержание термина (понятия) T не должно содержать в себе какое-либо простое понятие и положительно, и отрицательно, т. е. оно не должно быть противоречивым, оно должно обеспечивать возможность непустоты экстенсионального значения термина T. Тем самым это утверждение является интенсиональным аналогом требования непустоты объемов силлогистических терминов при их экстенсиональной трактовке.

Арифметическое условие истинности высказывания SaP в новой версии универсальной характеристики означает, что каждое простое понятие, содержащееся в P положительно или отрицательно, содержится также положительно, соотвественно, отрицательно в S и, таким образом, так же, как в старой версии, оно требует *необходимой (аналитической) истинности* соотношения $S\subseteq P$ между объемами терминов S и P. С другой стороны, арифметическое условие истинности высказывания SiP означает, что ни одно простое понятие, содержащееся в одном из понятий S и P положительно или отрицательно, не содержится в другом из них отрицательно, соответственно положительно; другими словами SiP

[6] Может ли понятие состоять только из простых понятий, взятых положительно (тогда n=0), или только из простых понятий, взятых отрицательно (тогда m=0)? Текст Лейбница не содержит никакого указания, могущего помочь в решении этого вопроса. Однако на рассматриваемом общем уровне ничего не мешает допустить такие возможности; ведь, например, простые понятия являются примерами таких понятий. Характерами для подобных понятий будут соответственно служить пары чисел $(t_1\cdot\ldots\cdot t_m, 1)$ и $(1, t_1\cdot\ldots\cdot t_n)$.

истинно, если и только если сочленение SP является непротиворечным и поэтому экстенсиональное соотношение $S \cap P \neq \varnothing$ является *возможно истинным* (аналогично расшифровываются арифметические условия отрицательных высказываний)[7].

Описанную комбинаторику понятий и универсальную характеристику приложим, приспособим к системам B и Sm.

В обычной теоретико-множественной семантике этих систем в качестве значения переменных терминов, кроме произвольных непустых множеств, в отличие от такой же семантики L, допускается и пустое множество. Осмысливая комбинаторику понятий для систем B и Sm и задавая соответствующий метод определения арифметических характеров, следует отказаться от требования непротиворечивости допустимых интенсиональных значений переменных терминов и взаимной простоты членов пар чисел, составляющих соответствующие арифметические характеры. Таким образом, следует расширить область интенсиональных значений терминов противоречивыми понятиями, а в качестве характеров допустить пары произвольных натуральных чисел.

При расширенной области интенсиональных значений переменных терминов необходимая истинность экстенсинальных соотношений $S \subseteq P$ (теоретико-множественно понимаемое SaP в B) и $S \neq \varnothing$ & $S \subseteq P$ (теоретико-множественно понимаемое SaP в Sm) обеспечивается соответственно следущими толкованиями SaP в новой версии комбинаторики понятий: *в B высказывание SaP утверждает, что каждое простое понятие, содержащееся в P положительно или отрицательно, содержится в S таким же способом – положительно, соответственно, отрицательно, или S является противоречивым понятием; в Sm высказывание SaP утверждает, что S не является противоречивым понятием и каждое простое понятие, содержащееся в P положительно или отрицательно, содержится в S таким же способом.* Экстенсиональный смысл высказывания SiP в B и Sm один и тот же, оно понимается как утверждение $S \cap P \neq \varnothing$. Возможную истинность этого соотношения, так же как в случае L, *обеспечивает непротиворечивость сочленения SP (конъюнкция содержаний S и P) и, следовательно, в B и Sm высказывание SiP утверждает, что если какое-нибудь простое понятие содержится в S или P положительно, то оно ни в S, ни в P не содержится отрицательно* (истолкованием отрицательного высказывания является отрицание истолкования соответствующего контрадикторного высказывания).

---

[7] Эта интенсиональная подоплека Лейбницевой арифметической семантики рассматривается независимо от последней В.И.Маркиным в [7].

Перевести эти положения интенсиональной семантики с языка комбинаторики понятий обратно на арифметический язык универсальной характеристики не представляет трудности.

Функцию f назовем *арифметической B-интерпретацией (Sm-интерпретацией)* языка Syl^{+}, если она 1) каждому переменному термину T этого языка приписывает (в качестве значения) упрядоченную пару произвольных натуральных чисел (t_1,t_2), 2) а каждой формуле этого языка – истинностное значение согласно следующим базисным правилам:

при истолковании B

$f(SaP)=И\Leftrightarrow[s_1]\cap[s_2]\neq\varnothing \vee ([p_1]\subseteq[s_1]\&\ [p_2]\subseteq[s_2])$,

при истолкованиии Sm

$f(SaP)=И\Leftrightarrow[s_1]\cap[s_2]=\varnothing\ \&\ ([p_1]\subseteq[s_1]\&\ [p_2]\subseteq[s_2])$,

в обоих случаях

$f(SeP)=И\Leftrightarrow[s_1]\cap[s_2]\neq\varnothing \vee [s_1]\subseteq[p_2]\neq\varnothing \vee ([p_1]\cap[s_2]\neq\varnothing \vee$
$\vee [p_1]\cap[p_2]\neq\varnothing$,

$f(SiP)=И\Leftrightarrow f(SeP)=Л$,

$f(SoP)=И\Leftrightarrow f(SaP)=Л$,

и индуктивным правилам, соответствующим классическим таблицам истинности для пропозициональных связок. Можно стандартным образом определить понятия арифметической B-общезначимости и арифметической Sm-общезначимости.

Доказываются следующие аналоги утверждений (I.1) и (I.2):

(I^0.1) *Каждая доказуемая в B (Sm) формула является арифметически B-общезначимой (сооответственнно, арифметически Sm-общезначимой);*

($I^0$2) *Каждая отбрасываемая в *B (*Sm) формула является арифметически B-опровержимой (соответственно, арифметически Sm-опровержимой).*

Доказательства проводятся индуктивно точно так, как доказательства утверждений (I.1) и (I.2), и почти полностью сводятся к проверке соответствующих типов арифметической общезначимости и опровержимости аксиом исчислений B, *B, Sm и *Sm. Имеется единственное отклонение – при доказательстве корректности правила Слупецкого в *B (в *Sm она доказывается методом Слупецкого–Лукасевича точно так, как в *L) применяется следующая лемма: *Если формулы $A\supset D$ и $B\supset D$ арифметически B-опровержимы, где A и B – отрицательные атомы, D – дизъюнкция прозвольных атомов, а A имеет вид SoP, то существует арифметическая B-интерпретация f языка Syl^{+} такая, что f опровергает $B\supset D$ и числа s_1 и s_2 являются взаимнопростыми.*

Из утверждений (II^0) и (I^0.2) так же, как в случае L, следуют теоремы *полнот ы* для исчислений B и Sm: (III^0) *Каж дая арифмет ически B-общезначимая (Sm-обощезначимая) формула языка Syl^+ доказуема в B (соот вет ст венно, в Sm).* (III^0) вместе с ($I^0$1) составляет утверждение о равнообъемности предикатов выводимости в B (Sm) и арифметической B-общезначимости (соответствено, Sm-общезначимости).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бочаров В. А.* Аристотель и традиционная логика. М., 1984.
2. *Бочаров В.А.* Интерпретация ассерторической силлогистики Аристотеля // Логика Аристотеля. Материалы симпозиума. Тбилиси, 1985. С. 6-20.
3. *Дурглишвили Н. К., Мчедлишвили Л. И.* Обобщение Лейбницева метода арифметизации силлогистики // Современая логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы V общероссийской научной конференции. С.-Пб., 1998. С. 109-118.
4. *Лейбниц.* Сочинения. Том 3. М., 1984. С. 395-617.
5. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики (пер. с англ.). М., 1959.
6. *Маркин В. И.* Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.
7. *Маркин В. И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М., 2001. С. 82-91.
8. *Мчедлишвили Л. И.* Применение Лейбницва метода арифметизации к нетрадиционным системам силлогистики // Смирновские чтения. 2 Международная конференция. М., 1999. С. 47-49.
9. *Мчедлишвили Л.И.* Исчисления отбрасываемых формул для нетрадиционных систем позитивной силлогистики // Логические исследования. Вып 8. М., 2001. С. 92-104.
10. *Смирнов В. А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1981.
11. *Kauppi R.* Über die Leibnizsche Logik. New York; London, 1985. S. 54-65, 145-153.
12. *Prior A.N.* Formal Logic. Oxford, 1962. P. 103-184.
13. *Shepherdson J. C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // JSL. 1956. Vol. 21, N. 2. P. 137-147.
14. *Slupecki J.* On Aristotelian Syllogistic // Studia Philosophica, 1949/50 (4). P. 275-300.
15. *Sotirov V.* Slupecki’s Syllogistic Axiomatized // Preprint.