В.И.Маркин

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИЛЛОГИСТИКА С ИНТЕНСИОНАЛЬНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ*

Abstract. *We set out an intensional semantics for pure positive syllogistic language. According to it each term Q denotes not a set of individuals but a concept* $\mathbf{d}(Q)$ *considered as a non-empty set of positive or negative characters. We define a function * on concepts, which assigns to every concept* α *the contrary concept* α^*: $p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow {\sim}p_i \in \alpha^*$ *and* ${\sim}p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow p_i \in \alpha$, *where* p_i *is a positive character and* ${\sim}p_i$ *is a negative character.* $S\mathbf{a}P$ *means that* $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$, $S\mathbf{e}P$ *means that* $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$. *We prove that this semantics is adequate to syllogistic system with the following axiom schemes:* $(M\mathbf{a}P \& S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$, $(M\mathbf{e}P \& S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$, $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$, $S\mathbf{a}S$, $S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$, $S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.

В предыдущем, восьмом, выпуске «Логических исследований» [3] мною была предложена нестандартная семантика для силлогистики Я.Лукасевича (системы **С4** по классификации В.А.Смирнова [4]), формализующей позитивный фрагмент традиционной силлогистики. Эта семантика основана на оригинальных идеях Г. Лейбница [1 Т.2. С. 501-502; Т.3. С.514-522], суть которых состоит в том, что силлогистика может рассматриваться не только с экстенсиональной точки зрения – как теория отношений между классами индивидов (объемами понятий), но и интенсионально – как теория отношений между совокупностями признаков (содержаниями понятий). При таком подходе субъекты и предикаты категорических суждений трактуются как понятийные конструкции, в качестве значений им сопоставляются множества признаков – положительных и отрицательных, а силлогистические константы **a**, **e**, **i** и **o** рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию.

Приведем краткое изложение данной семантики для силлогистики **С4** (незначительно изменив использовавшиеся в [3] обозначения и терминологию).

Рассмотрим множество *литералов* $\mathbf{L} = \{p_1, {\sim}p_1, p_2, {\sim}p_2, \ldots\}$. Литералы, не содержащие символа “~”, представляют *положительные признаки*, а содержащие данный символ – *отрицательные признаки*. *Непротиворечивым понятием* назовем произвольное непустое и непротиворечивое подмножество **L**, т.е. множество $\alpha \subseteq \mathbf{L}$, удовлетворяющее условиям:

(i) $\alpha \neq \varnothing$;

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 00-03-00273.

(ii) не существует p_i, такого что $p_i \in \alpha$ и $\sim p_i \in \alpha$.

Пусть **H** – множество всех непротиворечивых понятий. Определим на **H** операцию *, которая каждому понятию α сопоставляет *противоположное* ему понятие α^*, замещая каждый положительный литерал на отрицательный с тем же индексом, а каждый отрицательный – на соответствующий положительный:

$$p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow \sim p_i \in \alpha \text{ и } \sim p_i \in \alpha^* \Leftrightarrow p_i \in \alpha.$$

Интерпретирующая функция **d** сопоставляет каждому общему термину в качестве значения некоторое непротиворечивое понятие: $\mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$.

Зададим понятие *значимости* формулы A языка позитивной силлогистики при интерпретации **d** ($\mathbf{d} \models A$). Для атомарных формул:

(**a1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$;
(**e1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$;
(**i1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{i}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) = \varnothing$;
(**o1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{o}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$.

Условия значимости сложных формул обычные.

Согласно приведенным определениям высказывания типа **a** интерпретируются как утверждения о том, что содержание их предиката составляет часть содержания их субъекта; высказывания типа **e** выражают мысль о наличии противоречащих признаков (положительного и отрицательного), один из которых входит в содержание одного понятийного термина, а другой – в содержание другого; высказывания типов **i** и **o**, как обычно, рассматриваются как противоречащие высказываниям типов **e** и **a**, соответственно.

Силлогистическая формула A называется **C4**-*общезначимой*, е.т.е. $\mathbf{d} \models A$ при любой интерпретации общих терминов **d**, которая, как было сказано выше, сопоставляет им непротиворечивые понятия.

В [3] была продемонстрирована адекватность приведенной семантики силлогистической системе **C4**.

Возникает вопрос о возможности построения семантик, исходные конструкции которых имеют интенсиональную природу, для других известных систем силлогистики. Среди них особое место занимает так называемая *фундаментальная силлогистика*, идея которой восходит к работам Ф. Брентано и Г. Лейбница. С семантической точки зрения отличие фундаментальной силлогистики от традиционной заключается в отказе от исходной предпосылки о *непустоте* (и *неуниверсальности* – в случае введения в язык терминного отрицания) объемов общих терминов. В то же время экстенсиональная семантика для этих систем может быть сформулирована так (причем данная формулировка наиболее естественна), что условия истинности категорических высказываний будут одинаковыми: константе **a** соответствует теоретико-множественное включение объема субъекта в объем предиката, константе **e** – пустота пересечения объемов терминов и т.д.

Впервые аксиоматизация фундаментальной силлогистики на базе классического исчисления высказываний была предложена Дж. Шефердсоном [5], причем в языке, содержащем как положительные, так и отрицательные общие термины. Позитивный фрагмент системы Шефердсона – силлогистическое исчисление **ФС** – детально исследован в [2]. Аксиомами **ФС** являются формулы следующих типов:

Ф0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

Ф1. $(M\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{a}P$,	**Ф5.** $S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$,
Ф2. $(M\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$,	**Ф6.** $S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S$,
Ф3. $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S$,	**Ф7.** $S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$,
Ф4. $S\mathbf{a}S$,	**Ф8.** $S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.

Единственное правило вывода в **ФС** – *modus ponens*.

Первая, естественно возникающая гипотеза о том, каким образом может быть построена адекватная интенсиональная семантика для фундаментальной силлогистики, основывается на известных еще в традиционной логике фактах взаимозависимости объемов и содержаний понятий. Выдвижение этой гипотезы описывается следующим рассуждением по аналогии: если при экстенсиональной трактовке категорических высказываний фундаментальная силлогистика получается из традиционной отказом от требования непустоты объемов терминов при сохранении условий истинности высказываний, то при интенсиональном подходе следует отбросить исходную предпосылку о непротиворечивости содержаний, не меняя принципов означивания силлогистических формул.

В точных терминах эта идея выражается следующим образом. *Понятием* назовем произвольное непустое подмножество множества литералов $\mathbf{L} = \{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, ...\}$, т.е. множество $\alpha \subseteq \mathbf{L}$, удовлетворяющее условию (i) $\alpha \neq \varnothing$, но не обязанное удовлетворять условию непротиворечивости (ii).

Пусть **П** – множество всех понятий (как непротиворечивых, так и противоречивых). Очевидно, что $\mathbf{H} \subset \mathbf{П}$.

Расширим до **П** область определения и область значений операции *, сопоставляющей каждому понятию противоположное ему понятие посредством замены положительных литералов на соответствующие отрицательные, а отрицательных на положительные.

Пусть интерпретирующая функция **d** сопоставляет теперь каждому общему термину произвольное (не обязательно непротиворечивое) понятие: $\mathbf{d}(P) \in \mathbf{\Pi}$.

Определения значимости формулы при интерпретации **d** с базисными условиями (**a1**), (**e1**), (**i1**) и (**o1**), а также общезначимости формулы остаются неизменными.

Какое же силлогистическое исчисление аксиоматизирует класс общезначимых формул? Верна ли наша первоначальная гипотеза о том, что таковым является исчисление **ФС**? Оказывается, что это не так: аксиомы типов **Ф5** ($S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$) и **Ф6** ($S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S$) системы **ФС** необщезначимы в данной семантике (они незначимы, напр., при следующей интерпретации **d**: $\mathbf{d}(S) = \{p_1, \sim p_1,\}$, а $\mathbf{d}(P) = \{p_2\}$).

Формализацию интенсиональной семантики силлогистического языка, допускающей использование противоречивых по содержанию понятий, обеспечивает не система **ФС** "экстенсиональной" фундаментальной силлогистики, а ее *подсистема*, получающаяся из **ФС** отбрасыванием аксиомных схем **Ф5** и **Ф6**. Назовем данное исчисление **ИФС**, т.е. системой *"интенсиональной" фундаментальной силлогистики.*

Докажем адекватность приведенной семантики силлогистике **ИФС**.

Несложно продемонстрировать общезначимость каждой аксиомы **ИФС** и инвариантность правила *modus ponens* относительно общезначимости формул. Отсюда следует семантическая непротиворечивость системы **ИФС**.

Метатеорему о семантической полноте **ИФС** доказываем методом Хенкина.

Множество формул Γ называется **ИФС**-*непротиворечивым*, е.т.е. не найдется формул $B_1, B_2, ..., B_k$ таких, что формула $\neg(B_1 \,\&\, B_2 \,\&\, ... \,\&\, B_k)$ была бы теоремой **ИФС**.

Множество формул Δ называется **ИФС**-*максимальным*, е.т.е. оно **ИФС**-непротиворечиво и для любой формулы A верно, что $A \in \Delta$ или $\neg A \in \Delta$. Выделим следующие важные свойства Δ:

(m1) Δ содержит все теоремы **ИФС**,
(m2) Δ замкнуто относительно *modus ponens,*
(m3) $\neg A \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$,
(m4) $A \& B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$,
(m5) $A \vee B \in \Delta$, е.т.е. $A \in \Delta$ или $B \in \Delta$,
(m6) $A \supset B \in \Delta$, е.т.е. $A \notin \Delta$ или $B \in \Delta$.

Стандартно доказывается утверждение о возможности расширения произвольного **ИФС**-непротиворечивого множества формул до **ИФС**-максимального.

С каждым **ИФС**-максимальным множеством $\mathbf{\Delta}$ связывается *каноническое приписывание* значений общим терминам – функция $\mathbf{d}_\Delta$, определяемая следующим образом:

$$\mathbf{d}_\Delta(Q) = \{t\colon Q\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}\} \cup \{\sim t\colon Q\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}\},$$

где Q и T используются (как и употреблявшиеся ранее буквы S, P и M) в качестве синтаксических переменных по общим терминам (пусть язык силлогистики содержит общие термины P_1, P_2, P_3, ...), а t есть положительный литерал с тем же индексом, что и общий термин, представляемый синтаксической переменной T (напр., t есть литерал p_j, е.т.е T представляет общий термин P_j).

Прежде всего покажем, что $\mathbf{d}_\Delta(Q)$ является понятием, т.е. удовлетворяет условию непустоты (i):

1. $Q\mathbf{a}Q \in \mathbf{\Delta}$	**Ф4**, (m1);
2. $q \in \mathbf{d}_\Delta(Q)$	1, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
3. $\mathbf{d}_\Delta(Q) \neq \varnothing$	2.

Индукцией по длине силлогистической формулы A доказывается основная лемма:

Лемма. *Для произвольного* **ИФС**-*максимального множества* $\mathbf{\Delta}$ *и произвольной формулы* A *верно*: $A \in \mathbf{\Delta}$, *е.т.е.* $\mathbf{d}_\Delta \models A$.

Базис индукции содержит четыре случая.

I. A есть $S\mathbf{a}P$.

Докажем сначала, что $S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta} \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$.

1. $S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$	допущение;
2. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	допущение;
3. $P\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$	2, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
4. $(P\mathbf{a}T \mathbin{\&} S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$	**Ф1**, (m1);
5. $S\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$	4,3,1, (m4), (m2);
6. $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	5, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
7. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	допущение;
8. $P\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$	7, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
9. $(P\mathbf{e}T \mathbin{\&} S\mathbf{a}P) \supset S\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$	**Ф2**, (m1);
10. $S\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$	9,8,1, (m4), (m2);
11. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	10, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
12. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$	2–6,7–11, опр. $\mathbf{d}_\Delta$ и $\subseteq$;
13. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$	12, (**a1**).

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P \Rightarrow S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$.

1. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$	допущение;
2. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$	1, (**a1**);
3. $P\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$	**Ф4**, (m1);
4. $p \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	3, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
5. $p \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	2,4;

6. $S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$	5, опр. $\mathbf{d}_\Delta$.

II. A есть $S\mathbf{e}P$.

Докажем сначала, что $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta} \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$.

1. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	допущение;
2. $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф3**, (m1);
3. $P\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	2,1, (m2);
4. $S\mathbf{a}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф4**, (m1);
5. $\sim s \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	3, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $s \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$	5, опр. *;
7. $s \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
8. $\mathbf{d}_\Delta(P)^* \cap \mathbf{d}_\Delta(S) \neq \varnothing$	6,7;
9. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$	8, (**e1**).

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P \Rightarrow S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$.

1. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$	допущение;
2. $\mathbf{d}_\Delta(P)^* \cap \mathbf{d}_\Delta(S) \neq \varnothing$	1, (**e1**);
3. сущ-ет t: ($t \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$ и $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$) или ($\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$)	2;
4. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$ и $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	допущение;
5. $S\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	4, опр. *;
7. $P\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$	6, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
8. $P\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	**Ф3**, (m1);
9. $T\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	8, 7; (m2);
10. $(T\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}T) \supset S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	**Ф2**, (m1);
11. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	10,9,5, (m4), (m2);
12. $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)^*$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	допущение;
13. $S\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$	12, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
14. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	12, опр. *;
15. $P\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$	14, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
16. $S\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф3**, (m1);
17. $T\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	16,13; (m2);
18. $(T\mathbf{e}S \,\&\, P\mathbf{a}T) \supset P\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф2**, (m1);
19. $P\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	18,17, 15; (m4), (m2);
20. $P\mathbf{e}S \supset S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	**Ф3**, (m1);
21. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	20,19; (m2);
22. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	3,4-11,12-21.

III. A есть $S\mathbf{i}P$.

Данный случай сводится к случаю (II) в силу наличия в $\mathbf{\Delta}$ аксиомы **Ф7** ($S\mathbf{i}P \equiv \neg S\mathbf{e}P$), свойств максимального множества, а также того факта, что условия значимости формул вида $S\mathbf{i}P$ (**i1**) и $S\mathbf{e}P$ (**e1**) противоречат друг другу.

IV. A есть $S\mathbf{o}P$.

Данный случай сводится к случаю (I) в силу наличия в $\mathbf{\Delta}$ аксиомы **Ф8** ($S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$), свойств максимального множества, а также того факта, что условия значимости формул вида $S\mathbf{o}P$ (**o1**) и $S\mathbf{a}P$ (**a1**) противоречат друг другу.

Доказательство индуктивного перехода тривиально: оно основывается на классической семантике пропозициональных связок и свойствах (m1)–(m6) максимального множества. Лемма доказана.

Теперь легко обосновать утверждение о семантической полноте **ИФС**.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу A. Допустим, что она недоказуема в **ИФС**. Тогда формула $\neg\neg A$ также не будет теоремой этой системы. Отсюда, по определению **ИФС**-непротиворечивого множества, следует, что таковым является $\{\neg A\}$. Расширим его до **ИФС**-максимального множества $\mathbf{\Delta}$. Согласно основной лемме, $\mathbf{d}_{\Delta} \models \neg A$. Значит, сама формула A при каноническом приписывании (в силу семантики пропозиционального отрицания) не является значимой, что противоречит исходному предположению о ее общезначимости.

Система **ИФС** "интенсиональной" фундаментальной силлогистики в плане дедуктивных особенностей во многом сходна со своим "экстенсиональным" аналогом – исчислением **ФС**. В обеих системах доказуемы одни и те же базисные силлогистические законы: 15 модусов простого категорического силлогизма, законы диагоналей логического квадрата, принципы обращения для высказываний типов **e** и **i**, закон силлогистического тождества для **a**. Кроме того, в каждой из систем отбрасываются некоторые законы традиционной силлогистики: модусы силлогизма с общими посылками и частным заключением, законы подчинения, принцип обращения для высказываний типа **a**, принцип контрарности **a** и **e**, принцип субконтрарности **i** и **o**, закон силлогистического тождества для **i**.

Система **С4**, формализующая позитивный фрагмент традиционной силлогистики, легко получается из **ИФС** добавлением принципа контрарности, т.е. схемы аксиом

$\neg(S\mathbf{a}P \ \& \ S\mathbf{e}P)$.

Перейдем теперь к рассмотрению другого вопроса: о возможности построения адекватной интенсиональной семантики для "экстенсиональной" фундаментальной силлогистики **ФС**.

Базисные конструкции этой семантики точно такие, как и для системы **ИФС**, в частности, в качестве возможных значений общих терминов допускаются противоречивые понятия. Изменяются лишь семантические определения атомарных силлогистических формул. Понятие *значимости* силлогистической формулы (при интерпретации **d**) для **ФС** задается следующим образом:

(**a2**) **d** |= S**a**P, е.т.е. **d**(P) $\subseteq$ **d**(S) или **d**(S) $\notin$ **H**;
(**e2**) **d** |= S**e**P, е.т.е. **d**(S) $\cup$ **d**(P) $\notin$ **H**;
(**i2**) **d** |= S**i**P, е.т.е. **d**(S) $\cup$ **d**(P) $\in$ **H**;
(**o2**) **d** |= S**o**P, е.т.е. **d**(P) \ **d**(S) $\neq \varnothing$ и **d**(S) $\in$ **H**.

Согласно данному определению, общеутвердительное высказывание значимо, если содержание его предиката составляет часть содержания его субъекта или же субъект противоречив (т.е. максимально информативен). Смысл общеотрицательного высказывания состоит в наличии в содержаниях субъекта и предиката противоречащих признаков (или у какого-либо из понятий в отдельности, или по отношению друг к другу).

Нетрудно убедиться в том, что при принятии исходной предпосылки (ii) о непротиворечивости понятий условия значимости формул в семантиках для **ИФС** и **ФС** эквивалентны. Однако в семантиках указанных систем, где условие (ii) не постулируется, условия значимости общих высказываний в **ФС** оказываются более слабыми, а условия значимости частных высказываний – более сильными, чем в **ИФС**. Для условий (**a2**) и (**a1**), (**o2**) и (**o1**) верность этого утверждения очевидна. Что же касается условий (**e2**) и (**e1**), (**i2**) и (**i1**), справедливость сказанного станет наглядной, если эквивалентным образом переформулировать условия (**e2**) и (**i2**):

(**e2**) **d** |= S**e**P, е.т.е. **d**(P)* $\cap$ **d**(S) $\neq \varnothing$ или **d**(S) $\notin$ **H** или **d**(P) $\notin$ **H**;
(**i2**) **d** |= S**i**P, е.т.е. **d**(P)* $\cap$ **d**(S) = $\varnothing$ и **d**(S) $\in$ **H** и **d**(P) $\in$ **H**.

При доказательстве непротиворечивости системы **ФС** относительно интенсиональной семантики с условиями значимости (**a2**), (**i2**), (**e2**), (**o2**) некоторую сложность представляет лишь демонстрация общезначимости аксиом типов **Ф1** и **Ф2**:

Ф1. (M**a**P & S**a**M) $\supset$ S**a**P

1. **d** |= M**a**P & S**a**M	допущение;
2. **d**(P)$\subseteq$**d**(M) или **d**(M)$\notin$**H**	1, (**a2**);
3. **d**(M)$\subseteq$**d**(S) или **d**(S)$\notin$**H**	1, (**a2**);
4. **d**(M)$\subseteq$**d**(S)	допущение;
5. **d**(P)$\subseteq$**d**(M)	допущение;
6. **d**(P)$\subseteq$**d**(S)	5,4, транзитивность $\subseteq$;
7. **d**(P)$\subseteq$**d**(S) или **d**(S)$\notin$**H**	6;
8. **d**(M)$\notin$**H**	допущение;
9. **d**(S)$\notin$**H**	4,8, опр. **d** и **H**;
10. **d**(P)$\subseteq$**d**(S) или **d**(S)$\notin$**H**	9;
11. **d**(P)$\subseteq$**d**(S) или **d**(S)$\notin$**H**	2, 5-7,8-10;

12. $\mathbf{d}(S)\notin\mathbf{H}$	допущение;
13. $\mathbf{d}(P)\subseteq\mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S)\notin\mathbf{H}$	13;
14. $\mathbf{d}(P)\subseteq\mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S)\notin\mathbf{H}$	3,4-11,12-13;
15. $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$	14, (**a2**).

Ф2. $(M\mathbf{e}P\ \&\ S\mathbf{a}M) \supset S\mathbf{e}P$

1. $\mathbf{d} \models M\mathbf{e}P\ \&\ S\mathbf{a}M$	допущение;
2. $\mathbf{d}(M)\cup\mathbf{d}(P)\notin\mathbf{H}$	1, (**e2**);
3. $\mathbf{d}(M)\subseteq\mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S)\notin\mathbf{H}$	1, (**a2**);
4. $\mathbf{d}(M)\subseteq\mathbf{d}(S)$	допущение;
5. $\mathbf{d}(S)\cup\mathbf{d}(P)\notin\mathbf{H}$	2,4, опр. **d** и **H**;
6. $\mathbf{d}(S)\notin\mathbf{H}$	допущение;
7. $\mathbf{d}(S)\cup\mathbf{d}(P)\notin\mathbf{H}$	6, опр. **d** и **H**;
8. $\mathbf{d}(S)\cup\mathbf{d}(P)\notin\mathbf{H}$	3,4-5,6-7
9. $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$	8, (**e2**).

Доказательство семантической полноты осуществляется по тому же плану, что и для системы **ИФС**: аналогичным образом вводятся понятия **ФС**-непротиворечивого и **ФС**-максимального множеств формул, обосновывается утверждение о возможности расширения произвольного **ФС**-непротиворечивого множества до **ФС**-максимального, с каждым **ФС**-максимальным множеством $\mathbf{\Delta}$ связывается *каноническое приписывание* $\mathbf{d}_\Delta$, определяемое тем же способом. Различие состоит только в доказательстве основной леммы:

Лемма. *Для произвольного* **ФС**-*максимального множества* $\mathbf{\Delta}$ *и произвольной формулы A верно*: $A \in \mathbf{\Delta}$, *е.т.е.* $\mathbf{d}_\Delta \models A$.

Достаточно рассмотреть два базисных случая.

I. A есть $S\mathbf{a}P$.

Докажем сначала, что $S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta} \Rightarrow \mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$.

Первые 12 шагов доказательства повторяют соответствующий фрагмент основной леммы для системы **ИФС**. Завершающие шаги искомого доказательства таковы:

13. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$ или $\mathbf{d}_\Delta(S) \notin \mathbf{H}$	12;
14. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$	13, (**a2**).

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P \Rightarrow S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$.

1. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{a}P$	допущение;
2. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$ или $\mathbf{d}_\Delta(S) \notin \mathbf{H}$	1, (**a2**);
3. $\mathbf{d}_\Delta(P) \subseteq \mathbf{d}_\Delta(S)$	допущение;
4. $P\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$	**Ф4**, (m1);
5. $p \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $p \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	3,5;
7. $S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$	6, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
8. $\mathbf{d}_\Delta(S)\notin\mathbf{H}$	допущение;

9. сущ-ет t: $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	8, опр. **d** и **H**;
10. $S\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$	9, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
11. $S\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$	9, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
12. $S\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф3**, (m1);
13. $T\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	12,11, (m2);
14. $(T\mathbf{e}S \;\&\; S\mathbf{a}T) \supset S\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф2**, (m1);
15. $S\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	14,13,10, (m4), (m2);
16. $S\mathbf{e}S \supset S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$	теорема **ФС**[1], (m1);
17. $S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$	16,15;
18. $S\mathbf{a}P \in \mathbf{\Delta}$	2,3-7,8-17.

II. A есть $S\mathbf{e}P$.

Докажем сначала, что $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta} \;\Rightarrow\; \mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$.

1. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	допущение;
2. $S\mathbf{e}P \supset P\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф3**, (m1);
3. $P\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	2,1, (m2);
4. $S\mathbf{a}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф4**, (m1);
5. $\sim s \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	3, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $s \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
7. $\mathbf{d}_\Delta(S) \cup \mathbf{d}_\Delta(P) \notin \mathbf{H}$	5,6;
8. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$	7, (**e2**).

Докажем далее, что $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P \;\Rightarrow\; S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$.

1. $\mathbf{d}_\Delta \models S\mathbf{e}P$	допущение;
2. $\mathbf{d}_\Delta(S) \cup \mathbf{d}_\Delta(P) \notin \mathbf{H}$	1, (**e2**);
3. сущ-ет t: $[t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)]$ или $[t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)]$ или $[t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)]$ или $[t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)]$	2, опр. **d** и **H**;
4. $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$	допущение;
5. $S\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
6. $S\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$	4, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
7. $S\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф3**, (m1);
8. $T\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	7,6, (m2)
9. $(T\mathbf{e}S \;\&\; S\mathbf{a}T) \supset S\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	**Ф2**, (m1);
10. $S\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$	9,8,5, (m4), (m2);
11. $S\mathbf{e}S \supset S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	теорема **ФС**[2], (m1);
12. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	11,10; (m2);
13. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$	допущение;
14. $P\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$	13, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
15. $P\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$	13, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
16. $P\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	**Ф3**, (m1);
17. $T\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$	16,15, (m2);

[1] Данная формула доказывается в системе **ФС** с использованием аксиом **Ф6**, **Ф7** и **Ф8**.
[2] Данная формула доказывается в системе **ФС** с использованием аксиом **Ф5** и **Ф7**.

18. $(T\mathbf{e}P \,\&\, P\mathbf{a}T) \supset P\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — **Ф2**, (m1);
19. $P\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — 18,17,14, (m4), (m2);
20. $P\mathbf{e}P \supset S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — теорема **ФС**[3], (m1);
21. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — 20,19, (m2);
22. $t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ — допущение;
23. $S\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$ — 22, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
24. $P\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$ — 22, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
25. $P\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — **Ф3**, (m1);
26. $T\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — 25,24, (m2);
27. $(T\mathbf{e}P \,\&\, S\mathbf{a}T) \supset S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — **Ф2**, (m1);
28. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — 27,26,23, (m4), (m2);
29. $t \in \mathbf{d}_\Delta(P)$ и $\sim t \in \mathbf{d}_\Delta(S)$ — допущение;
30. $P\mathbf{a}T \in \mathbf{\Delta}$ — 29, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
31. $S\mathbf{e}T \in \mathbf{\Delta}$ — 29, опр. $\mathbf{d}_\Delta$;
32. $S\mathbf{e}T \supset T\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$ — **Ф3**, (m1);
33. $T\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$ — 32,31, (m2);
34. $(T\mathbf{e}S \,\&\, P\mathbf{a}T) \supset P\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$ — **Ф2**, (m1);
35. $P\mathbf{e}S \in \mathbf{\Delta}$ — 34,33,30, (m4), (m2);
36. $P\mathbf{e}S \supset S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — **Ф3**, (m1);
37. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — 36,35, (m2);
38. $S\mathbf{e}P \in \mathbf{\Delta}$ — 3,4-12,13-21,22-28,29-37.

Лемма (а вместе с этим и семантическая полнота **ФС**) доказана.

Комбинируя различные условия значимости для **a** и **o** с различными условиями значимости для **e** и **i**, можно получить адекватные семантики еще для двух систем позитивной силлогистики, занимающих промежуточное положение между исчислениями **ИФС** и **ФС**.

Пусть сначала силлогистические константы **a** и **o** трактуются в духе **ФС**, а константы **e** и **i** – в духе **ИФС**:

(**a2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$ или $\mathbf{d}(S) \notin \mathbf{H}$;
(**i1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{i}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) = \varnothing$;
(**e1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P)^* \cap \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$;
(**o2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{o}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$ и $\mathbf{d}(S) \in \mathbf{H}$.

Класс общезначимых в такой семантике формул аксиоматизирует исчисление, получающееся из **ФС** отбрасыванием схемы аксиом **Ф5** ($S\mathbf{i}P \supset S\mathbf{i}S$). Назовем эту систему **ИС1**.

Далее, пусть, наоборот, константы **a** и **o** трактуются в духе **ИФС**, а **e** и **i** – в духе **ФС**:

(**a1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{a}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \subseteq \mathbf{d}(S)$;
(**i2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{i}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \in \mathbf{H}$;

[3] Данная формула доказывается в **ФС** с использованием аксиом **Ф5**, **Ф7** и **Ф3**.

(**e2**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{e}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(S) \cup \mathbf{d}(P) \notin \mathbf{H}$;
(**o1**) $\mathbf{d} \models S\mathbf{o}P$, е.т.е. $\mathbf{d}(P) \setminus \mathbf{d}(S) \neq \varnothing$.

Адекватная формализация данной семантики получается отбрасыванием из **ФС** схемы аксиом **Ф6** ($S\mathbf{o}P \supset S\mathbf{i}S$). Назовем эту систему **ИС2**.

Весь необходимый материал для демонстрации семантической непротиворечивости и полноты исчислений **ИС1** и **ИС2** уже содержится в приведенных выше доказательствах, касающихся систем **ИФС** и **ФС**. Так, пункт I (A есть $S\mathbf{a}P$) основной леммы для **ИС1** повторяет доказательство соответствующего случая леммы для **ФС**, а пункт II (A есть $S\mathbf{e}P$) – соответствующего случая леммы для **ИФС**. Что же касается основной леммы для системы **ИС2**, то здесь, напротив, случай I доказывается так же, как в лемме для **ИФС**, а случай II – как в лемме для **ФС**.

В заключение поставлю одну проблему, касающуюся статуса представленных в данной статье силлогистических систем **ИФС**, **ИС1** и **ИС2**. Существуют ли “экстенсиональные” семантики для этих исчислений, построенные в том же духе, что и подобная семантика для **ФС**? Иными словами, имеется ли адекватная трактовка силлогистических констант указанных исчислений в терминах булевой логики классов или, что в сущности то же самое, существуют ли операции (рекурсивно задаваемые по степени сложности формулы), которые погружали бы системы **ИФС**, **ИС1** и **ИС2** в классическое одноместное исчисление предикатов?

Позволю высказать гипотезу, что ответы на поставленные вопросы – отрицательные. Справедливость данной гипотезы означала бы, что по крайней мере в некоторых существенных отношениях интенсиональный подход к построению силлогистических теорий семантически гибче и богаче стандартного, экстенсионального.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбниц Г.В.* Сочинения: В 4 т. Т. 2–3. М.: Мысль, 1983-1984.
2. *Маркин В.И.* Силлогистические теории в современной логике. М.: МГУ, 1991.
3. *Маркин В.И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 82-91.
4. *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев: Наукова думка, 1980.
5. *Shepherdson J.C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // Journal of Symbolic Logic. Vol. 21 (1956). No.2. P. 137-147.