В.Х.Хаханян

СИСТЕМА NFI, РАВНОНЕПРОТИВОРЕЧИВАЯ С СИСТЕМОЙ КУАЙНА NF

Abstract. *We suggest an intuitionistic variant of the famous W. Quine's NF which we call NFI and which is equiconsistent with NF.*

0. Первоначальный вариант аксиоматической системы теории множеств, формализовавший «наивное» содержательное учение Г.Кантора о множествах, мог быть представлен всего двумя постулатами: аксиомой объемности и схемой аксиом свертки (см., например, [1]). Однако обнаруженное Б.Расселом противоречие в отмеченной выше формальной системе из двух постулатов привело в течение 20 последующих лет и затем почти всей первой половины прошлого столетия к созданию сначала системы аксиоматической теории множеств Э.Цермело (1908 г.), а затем и к широко известной в настоящее время системе теории множеств Цермело–Френкеля ZF (1922 г.). В терминах цитированной статьи В.Н.Гришина и А.Г.Драгалина это две аксиоматические системы из группы 1, где аксиома свертывания ограничивается так, чтобы обеспечить «...наиболее естественный способ формализации обычных математических доказательств и в то же время позволяет избежать известных парадоксов».

Наряду с этим (и по времени появления даже более ранние) были предложены аксиоматические системы другого типа (группа 2 по классификации В.Н.Гришина и А.Г.Драгалина), например, простая теория типов Б.Рассела (1910 г.). Опуская различные аксиоматические системы теории множеств из группы 3 (мы вернемся к ним позже), которые в первой половине прошлого столетия не пользовались вниманием в силу особой специфики применяемых средств, отметим, что в группу 4 по той же классификации попали системы аксиоматических теорий множеств NBG (система теории множеств с классами, 1925 г.) и система NF Куайна (1937 г.). Мы остановимся на этой системе NF и дадим ее краткое описание и характеристику.

1. В 1937 г. Куайн предложил аксиоматическую систему теории множеств, получившую название «New Foundations» [8], которая включала, как и первоначальная формализация «наивной» теории множеств Г.Кантора, те же два постулата, однако в схеме свертки соответствующая формула A должна была быть стратифицируемой (формула A языка первого порядка теории множеств

называется стратифицируемой, если она может быть получена из формулы языка простой теории типов стиранием типов). Отметим, что в NF реализуется возможность преодоления расслоения понятий, имеющее место в теории типов. Также, первоначальный вариант NF содержал аксиому бесконечности, вывод которой в указанной в самом начале системе теории множеств из двух постулатов (формализующей теорию множеств Г.Кантора) не переносится на систему NF, однако Э.Шпеккер доказал следующие два факта (см. [9]): аксиома бесконечности выводима в системе NF и в NF выводимо отрицание аксиомы выбора. Система NF обладает рядом свойств, резко отличающих ее как от системы «слоев» теории типов Рассела, так и от системы Цермело и Цермело–Френкеля, универсум множеств которых может быть построен постепенно, шаг за шагом (кумулятивная иерархия). До настоящего времени не удалось построить модель универсума для теории NF ZF-средствами и тем самым выяснить вопрос об относительной непротиворечивости NF и ZF (модель NF может быть получена из модели теории множеств TT + принцип типовой неопределенности). Ниже мы опишем кратко основные результаты, полученные для теории множеств NF.

2. Как уже отмечалось, Э.Шпеккер доказал, что в NF выводятся аксиома бесконечности и отрицание аксиомы выбора (дальнейшая сводка результатов взята в основном из [10]). Разобьем эту сводку на фрагменты: а) уже упоминавшиеся результаты Шпеккера о выводимости аксиомы бесконечности и отрицания аксиомы выбора, б) NF равнонепротиворечива с TT + «принцип типовой неопределенности» (см. [10]), в) NF равнонепротиворечива с расширением теории Цермело с аксиомой выделения, ограниченной Δ-формулами (к теории множеств Цермело добавлена аксиома, утверждающая, что есть непустое множество), г) если NFU есть система NF, в которой аксиома объемности ограничена к непустым множествам, то NFU равнонепротиворечива с NFU + «O есть канторово множество» (O – множество всех пустых множеств; множество M – канторово, если существует 1-1 отображение из M на множество одноэлементных подмножеств M), д) результаты Р.Йенсена о равнонепротиворечивости и независимости NFU и ее расширений аксиомами бесконечности и выбора. Существует еще обширный ряд менее известных результатов, касающихся систем теорий множеств NF и NFU, которые мы здесь упоминать не будем.

3. Начиная с 1973 г. появляется ряд работ, посвященных теории множеств типа ZF или TT, но с интуиционистской логикой

(такие теории можно было бы отнести к группе 3, см. классификацию выше, однако они носят достаточно ярко выраженный конструктивный характер, и обзор результатов по данной тематике уже появляется в разделах «Конструктивная математика»). За последние 30 лет в работах Х.Фридмана, Дж.Майхилла, В.Поуэлла, Р.Грайсона, В.Хаханяна и др. была предложена достаточно мощная, равнонепротиворечивая с ZF аксиоматическая система теории множеств с интуиционистской логикой, обладающая рядом конструктивных свойств: это система ZFI, совместимая с принципами Чёрча и Маркова, а также с принципом униформизации, в которой допустимы правила Чёрча и Маркова; эта теория обладает свойствами полной экзистенциальности и нумерической экзистенциальности; ZFI как расширение для арифметики и анализа является консервативной над последними; были предложены три очень общих класса моделей для такой теории множеств с целью доказательства ряда метаматематических утверждений о непротиворечивости и независимости этой аксиоматической системы с некоторыми конструктивными, интуиционистскими и теоретико-множественными принципами; для отмеченной теории (к сожалению, мы не даем тут точной формулировки, так как это достаточно объемная процедура) получена модель, являющаяся расширением негативной интерпретации Гёделя для арифметики и анализа до уровня теории множеств. Именно этот последний факт и еще одну простую, но интересную идею и использовал автор для формулировки и доказательства заявленной в названии проблемы.

4. Пусть T – множество аксиом в теоретико-множественном языке первого порядка. Пусть T^C – аксиоматическая теория P^C+T, где P^C – классическая логика предикатов и пусть T^I – аксиоматическая теория P^I+T, где P^I – интуиционистская логика предикатов. Пусть A – какая-либо формула языка, отмеченного выше, и пусть

T^C „ A, $\neg T^I$ „ A, $\neg T^I$ „ $\neg$A.

Тогда теория T^I+A есть подтеория T^C и можно попытаться подобрать A так, чтобы получить перевод формул из теории T^C в формулы теории T^I+A так, чтобы полученное погружение позволило доказать непротиворечивость теории T^C относительно теории T^I+A. Именно такой прием и использовал В.Поуэлл при построении стандартной интерпретации ZFC в ZFCI (теория множеств ZFC, но с интуиционистской логикой, более точная формулировка дается в цитируемой ниже статье), добавив к последней теории принцип «double complement»:

$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \neg\neg z \in x)$, который мы впоследствии обозначили как DCS (см. [7]).

5. Дадим теперь точную формулировку аксиоматической системы теории множеств NFI. Язык этой теории есть теоретико-множественный язык первого порядка (один сорт переменных, один бинарный предикат $x \in y$ и стандартный набор логических связок, кванторов и вспомогательных символов). Берем аксиомы и схемы аксиом интуиционистской логики предикатов и два собственных постулата системы NF: схему аксиом свертки по стратифицируемым формулам и аксиому объемности. К полученной системе добавим еще следующую аксиому, выводимую в NF:
C. $\forall xy[\neg\neg x \in y \leftrightarrow \approx x \in y)]$, где $\approx y = \{z \mid \neg\neg z \in y\}$, т.е. $\approx y$ есть двойное дополнение y. Конечно, в классической логике предикатов C доказуемо, т.е. NF „ C. Устроим теперь стандартную геделеву негативную интерпретацию $*$ формул нашего языка в формулы нашего же языка (для справки см., например, [2]), т.е. $\varphi \rightarrow \varphi^*$.

Теорема. 1. NF „ $\varphi \Rightarrow$ NFI+C „ φ^*.
2. NFU „ $\varphi \Rightarrow$ NFUI+C „ φ^*, где NFU – теория множеств NF с аксиомой объемности по непустым множествам.

Следствие. 1. NF непротиворечива относительно NFI+C.
2. NFU непротиворечива относительно NFUI+C.
(теория NFUI получается из NFU аналогично тому, как NFI получается из NF).

Доказательство **Теоремы**.
1. Схема аксиом свертки имеет вид $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi(z))$, где формула φ не содержит y свободно и является стратифицируемой.$*$-перевод этой схемы имеет вид $\neg\neg\exists y \forall z(\neg\neg z \in y \leftrightarrow \varphi^*(z))$, где φ^* – $*$-перевод формулы φ (в книге А.Г.Драгалина негативный перевод для атомарных формул тривиален, для теории же множеств перевод формулы $(x \in y)^*$ есть формула $\neg\neg(x \in y)$). Индукцией по построению формулы нашего языка теории множеств легко доказывается следующая

Лемма: а) если φ – стратифицируемая формула, то φ^* – также стратифицируемая формула; б) в P^I „ $\varphi^* \leftrightarrow \neg\neg\varphi^*$. Применяем теперь схему аксиом свертки к формуле φ^* и получаем

$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi^*(z))$ и затем $\exists y \forall z(\neg\neg z \in y \leftrightarrow \neg\neg\varphi^*(z))$

и, пункт б) **леммы**, $\exists y \forall z(\neg\neg z \in y \leftrightarrow \varphi^*(z))$ и, окончательно, двойное отрицание последней формулы.

2. Аксиома объёмности имеет вид

$\forall xyz[\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \wedge x \in z \rightarrow y \in z]$

$*$-перевод этой аксиомы таков:

$\forall xyz[\forall u(\neg\neg u \in x \leftrightarrow \neg\neg u \in y) \wedge \neg\neg x \in z \rightarrow \neg\neg y \in z]$.

Фиксируем x, y, z и предположим, что в NFI выводимы два конъюнктивных члена посылки. Для множеств $\approx x$ и $\approx y$ найдутся и единственные (в силу аксиомы DCS^{-1}) такие множества x и y, что $\forall u(u\in\approx x\leftrightarrow\neg\neg u\in x)$ и $\forall u(u\in\approx y\leftrightarrow\neg\neg u\in y)$ и, в силу первого конъюнктивного члена посылки перевода аксиомы объемности, $\forall u(u\in x\leftrightarrow u\in y)$ ($\approx x$ и $\approx y$ множества в силу схемы аксиом свертки $\exists\approx x\forall z(z\in\approx x\leftrightarrow\neg\neg z\in x)$ и для $\approx y$ – аналогично; в этом главное отличие при распространении геделева перевода на NF, так как для ZF (и аналогичных ей теорий, например, Z или NBG, т.е. теорий из группы 1) основная трудность – доказательство $*$-перевода для аксиомы объемности. Один из вариантов преодоления этой трудности – это добавление какого-либо классически выводимого утверждения к интуиционистскому варианту ZFI (см. упоминавшуюся выше работу В.Поуэлла). Другой вариант – погружение классической теории с объемностью в такую же теорию без аксиомы объемности (см. [5]). В связи со сказанным становится неясным утверждение D.Dzierzgovski о том, что если интуиционистская часть теории T есть та же теория T, но с заменой P^C на P^I: «Let us define the intuitionistic part of a classical theory T as the intuitionistic theory whose proper axioms are identical to the proper axioms of T», то «It’s a well-known fact, proved Heyting and Myhill, that ZF is identical with its intuitionistic oart», все цитируется из «Models of intuitionistic TT and NF», Semin. Math./ Institute Math. Pure et Appl., Univ. Cathol. Louvain, 1994, 1-2, P.1-23; статья должна была появиться в журнале «The Journal of Symbolic Logic», но я ее не нашел; тут же автор заявляет, что для TT и NF этот факт не имеет места).

Завершим доказательство перевода аксиомы объемности. Так как в силу C $x\in\approx y\leftrightarrow\approx x\in\approx y$, то $\neg\neg x\in z\rightarrow\neg\neg y\in z$, что и завершает доказательство перевода аксиомы объёмности. **Теорема** доказана (для NFU и NFUI доказательство проводится аналогично).

6. В заключение сформулируем ряд проблем, может быть и не очень трудных, связанных с тематикой интуиционистской NF. Из «ближайших» задач отметим следующие: будет ли аксиома бесконечности выводима в NFI? Аналогичный вопрос о выводимости отрицания аксиомы выбора. Другими словами, можно ли результаты Э.Шпеккера перенести на NFI?

Для NFUI задачи таковы: можно ли (я думаю, что «да») результаты Р.Йенсена относительно NFU перенести на NFUI? Конечно, мы не приводим точных формулировок задач выше, однако их, возможно, нужно еще уточнять. И, наконец, отметим следующую работу, любезно предоставленную мне В.Н.Гришиным и которая содержит обширную библиографию по NF [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гришин В.Н., Драгалин А.Г.* Аксиоматическая теория множеств // Математическая энциклопедия. Т. 1. 1977. С. 104-109.
2. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979. С. 46
3. *Boffa M.* The consistency problem for NF, The Journal of Symbolic Logic. Vol. 42, No. 2. June 1977, P. 215-220.
4. *Boffa M.* The point on Quine's NF (with a bibliography) // Theoria IV, (2), 3-1*3 (1984).*
5. *Friedman H.* The consistency of classical set theory relative to a set theory with intuitionistic logic // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 38, No. 2. 1973, P.315-319.
6. *Posser J.B.* Logic for mathematicians // Chelsea Publishing Co., New York, 1978, XYI + 574 p. Appendix A
7. *Powell W.R.* Extending Godel's negative interpretation to ZF // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 40, No. 2. 1975, P.221-229.
8. *Quine W.* New Foundations for mathematical logic // American Mathem. Monthly. Vol. 44. P. 70-80.
9. *Specker E.* The axiom of choice in Quine's New Foundations for mathematical logic // Proceedings of National Academy of Science of the USA. Vol. 39, 1953, P. 972-975.
10. *Specker E.* Typical ambiguity, Logic, methodology and philosophy of science // Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford, 1962, P. 116-124.