Ю.В.Ивлев

ОСНОВНЫЕ ОБЛАСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ КВАЗИМАТРИЧНОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *The basic notion of quasi-matrix logic is a notion of quasi-matrix. A set* $(Q,G,qf_1,...,qf_s)$ *is a quasi-matrix.* Q *and* G *are non-empty sets.* $Q \subseteq G$; $qf_1,...,qf_s$ *are quasi-functions.*

This logic had been created to describe connections between statements containing notions "necessity", "possibility", "contingency" and some others meaning as factual (physical, ontological) modalities. The main systems of four-valued and three-valued quasi-matrix logic are presenting in [1-6].

Quasi-matrix logic has been applied to the fields beyond logic (theory of notion, philosophical categories, theory of argumentation, etc) and in the other parts of logic as well. These fields are para-consistent logic for dubitable information, logic of propositional attitudes, three-valued and five-valued logic of norms.

Основным понятием квазиматричной логики является понятие квазиматрицы. Квазиматрица – это множество $(Q,G,qf_1,...,qf_s)$, где Q и G – непустые множества, $Q \subset G$; $qf_1,...,qf_s$ – квазифункции.

Эта логика создавалась для описания связей по логическим формам между суждениями, содержащими выражения «необходимо», «случайно», «возможно» и некоторые другие, понимаемые как фактические (физические, онтологические) алетические модальности. Основные системы четырехзначной и трехзначной алетической модальной логики изложены в [1–6].

Квазиматричная логика нашла приложение вне логики (философские категории, теория аргументации, теория абстрактных автоматов и т. д.), а также в других разделах логической науки. Укажем некоторые из этих разделов.

1. Квазиматричная паранепротиворечивая логика высказываний, которыми выражается сомнительная информация

Язык этой логики содержит логические термины $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, соответственно понимаемые как знаки отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации, а также символы T и K, которые соответственно читаются «достоверно известно» и «известно».
Определение формулы обычное. Определения логических терминов:

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 00-03-00319.

A	**¬A**	**TA**	**KA**	**∧**	**n**	**c**	**i**	**∨**	**n**	**c**	**i**	**⊃**	**n**	**c**	**i**
n	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**	**c**	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**c**	**i**
c	**c**	**i**	**n**	**c**	**c**	**i|c**	**i**	**c**	**n**	**n|c**	**c**	**c**	**n**	**n|c**	**c**
i	**n**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**c**	**i**	**I**	**n**	**n**	**n**

Значения **n**, **c**, **i** понимаются, соответственно, так: «высказывание является несомненно истинным», «информация, выражаемая высказыванием, является сомнительной», «высказывание является несомненно ложным». Выражения **i|c** и **n|c** соответственно читаются «то ли **i**, то ли **c**», «то ли **c**, то ли **n**». Выделенное значение **n**.

Исчисление, формализующее семантически построенную логику, содержит схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом классического исчисления высказываний, в которых метапеременные обозначают модализированные формулы, а также следующие схемы аксиом, в которых метапеременные обозначают любые формулы системы:

$TA \supset A$; $\neg A \supset \neg TA$; $A \supset KA$; $\neg KA \supset \neg A$;
$TA \supset KA$; $\neg T\neg A \supset KA$; $KA \supset \neg T\neg A$;
$TA \supset TTA$; $KTA \supset TA$; $KA \supset TKA$; $KKA \supset KA$;
$\neg KA \supset T(A \supset B)$; $TB \supset T(A \supset B)$;
$T(A \supset B) \supset (TA \supset TB)$; $T(A \supset B) \supset (KA \supset KB)$; $K(A \supset B) \supset (TA \supset KB)$; $KB \supset K(A \supset B)$; $K\neg A \supset K(A \supset B)$;
$TA\wedge TB \supset T(A\wedge B)$; $KA\wedge TB \supset K(A\wedge B)$; $TA\wedge KB \supset K(A\wedge B)$; $T(A\wedge B) \supset TA\wedge TB$; $K(A\wedge B) \supset KA\wedge KB$;
$TA\vee(KA\wedge K\neg A)\vee\neg KA$;
$TA\vee TB \supset T(A\vee B)$; $KA\vee KB \supset K(A\vee B)$; $T(A\vee B) \supset TA\vee KB$;
$T(A\vee B) \supset KA\vee TB$; $K(A\vee B) \supset KA\vee KB$.

Правила вывода: modus ponens; правило замены формулы $\neg\neg A$ на A и vice versa; правило Гёделя – $A \Rightarrow TA$.

Определение доказательства обычное.

Для доказательства метатеоремы о семантической полноте вводится понятие альтернативной интерпретации.

Альтернативная интерпретация – это функция $\|\ \|$. Ее определение:

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\|\in\{n, c, i\}$.
Если $\|A\|$ и $\|B\|$ определены, то

$\|\neg A\| = n \Leftrightarrow \|A\| = i$; $\|\neg A\| = c \Leftrightarrow \|A\| = c$; $\|\neg A\| = i \Leftrightarrow \|A\| = n$;
$\|A\wedge B\|= n \Leftrightarrow \|A\| = \|B\| = n$;
если ($\|A\| = n$ и $\|B\| = c$) или ($\|A\| = c$ и $\|B\| = n$), то $\|A\wedge B\| = c$;
если $\|A\| = i$ или $\|B\| = i$, то $\|A\wedge B\|= i$;
если $\|A\| = \|B\| = c$, то $\|A\wedge B\| \in \{i, c\}$;
если $\|A\| = n$ или $\|B\| = n$, то $\|A\vee B\|= n$;
если $\|A\| = \|B\| = c$, то $\|A\vee B\| \in \{n, c\}$;

если $||A|| = ||B|| = i$, то $||A \vee B|| = i$;
если ($||A|| = i$ и $||B|| = c$) или ($||A|| = c$ и $||B|| = i$), то $||A \vee B|| = c$;
если $||A|| = i$ или $||B|| = n$, то $||A \supset B|| = n$;
если $||A|| = ||B|| = c$, то $||A \supset B|| \in \{n, c\}$;
если $||A|| = c$ и $||B|| = i$, то $||A \supset B|| = c$;
$||A|| = n$ и $||B|| = i \Leftrightarrow ||A \supset B|| = i$;
$||TA|| = n \Leftrightarrow ||A|| = n$; если $||A|| = c$ или $||A|| = i$, то $||TA|| \in i$;
$||KA|| = i \Leftrightarrow ||A|| = i$; если $||A|| = n$ или $||A|| = c$, то $||KA|| = n$.

В качестве метатеоремы о семантической полноте доказывается утверждение: *множество формул* $\boldsymbol{\Delta}$*, совместимое с исчислением, выполнимо.* Множество формул $\boldsymbol{\Delta}$ расширяется до максимального совместимого с исчислением множества формул $\boldsymbol{\Theta}$. Вводится функция $|| \ ||_{\Theta}$ такая, что для произвольной формулы A верно: $||A||_{\Theta} = n \Leftrightarrow TA \in \boldsymbol{\Theta}$**;** $||A||_{\Theta} = c \Leftrightarrow KA \in \boldsymbol{\Theta}$ и $K\neg A \in \boldsymbol{\Theta}$**;** $||A||_{\Theta} = i \Leftrightarrow \neg KA \in \boldsymbol{\Theta}$**.** Индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу доказывается, что функция $||A||_{\Theta}$ является альтернативной интерпретацией.

Очевидно, что функция $|| \ ||_{\Theta}$ приписывает выделенное значение каждой формуле из $\boldsymbol{\Delta}$.

Соотношение принципов классической, построенной паранепротиворечивой, релевантной логик и логики, двойственной логике Хао Вана, представлено в следующей таблице.

Классическая логика	Паранепротиворечивая	Релевантная	Двойственная Хао Вану
(1) принцип <u>двухзначности</u> – высказывания принимают значения из области {t, f}	принцип <u>трехзначности</u>: из области {n, c, i}	принцип <u>трехзначности</u>: из области {n, c, i}	принцип <u>трехзначности</u>: из области {n, c, i}
(2) принцип <u>непротиворечия:</u> высказывание не может иметь оба значения	<u>непротиворечия</u>: не может иметь более одного значения из из области {n, c, i}	может иметь два и три	может иметь два и три
(3) принцип <u>исключенного третьего:</u> высказывание обязательно принимает значение из указанной области	принцип <u>исключенного четвертого</u>	–	принцип <u>исключенного четвертого</u>

(4) принцип <u>тождества</u>: в сложном высказывании, системе высказываний, аргументации одно и то же высказывание принимает одно и то же значение из области {t,f}	<u>тождества</u>: из области {n, c, i}	–	–
(5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в пропозициональной логике этот принцип выступает в качестве <u>принципа матричности</u> – логические термины определяются посредством матриц, в логике предикатов он выражается в интерпретации логических терминов посредством функций).	принцип квазиматричности: логические термины интерпретируются посредством <u>квазиматриц</u>	принцип квазиматричности	принцип квазиматричности

Описание состояний классической логики: $\{a'_1, ..., a'_r, ...\}$. a'_m есть a_m или $\neg a_m$. Описаниями состояний релевантной логики являются все подмножества множества $\{a_1^n, a_1^c, a_1^i, ..., a_r^n, a_r^c, a_r^i, ...\}$. Если α – описание состояний релевантной логики, то переменная a_m принимает значение n в α если и только если $a_m^n \in \alpha$, a_m принимает значение c, если и только если $a_m^c \in \alpha$, a_m принимает значение i, если и только если $a_m^i \in \alpha$. Определение релевантной импликации: $\models A \to B \Leftrightarrow A \models B \Leftrightarrow$ информация B относительно всех описаний состояний (I(B,M)) есть часть информации A относительно всех описаний состояний (I(A, M)) $\Leftrightarrow$ $M_A \subseteq M_B$. (M_A и M_B – все описания состояний, в которых A, соответственно B, имеет значение n. Описаниями состояний логики, дуальной логике Хао Вана, являются все подмножества множества $\{a_1^n, a_1^c, a_1^i, \ldots, a_r^n, a_r^c, a_r^i, \ldots\}$, для которых верно: $\forall' a_s(a_s^n \in \alpha \vee' a_s^c \in \alpha \vee' a_s^i \in \alpha)$. $\forall'$ и $\vee'$ – метаязыковые символы.

Исчисление, формализующее описанную семантику релевантной логики, содержит схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом исчисления E. В этих схемах аксиом метапеременные обозначают модализированные формулы, главный знак импликации соответствует релевантной импликации, а остальные вхождения знака импликации соответствуют материальной импликации. Дополнительными схемами аксиом являются следующие 28 схем, метапеременные в которых обозначают любые формулы:

$TA \to KA$; $TA \to A$;
$\neg A \to \neg TA$; $A \to KA$; $\neg KA \to \neg A$;
$\neg T\neg A \to KA$; $KA \to \neg T\neg A$;
$TA \to TTA$; $KTA \to TA$;
$KA \to TKA$; $KKA \to KA$;
$\neg KA \to T(A \supset B)$; $TB \to T(A \supset B)$;
$T(A \supset B) \to (TA \supset TB)$; $T(A \supset B) \to (KA \supset KB)$;
$K(A \supset B) \to (TA \supset KB)$; $KB \to K(A \supset B)$;
$K\neg A \to K(A \supset B)$; $TA \wedge TB \to T(A \wedge B)$;
$KA \wedge TB \to K(A \wedge B)$; $TA \wedge KB \to K(A \wedge B)$;
$T(A \wedge B) \to TA \wedge TB$; $K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$;
$TA \vee TB \to T(A \vee B)$; $KA \vee KB \to K(A \vee B)$;
$T(A \vee B) \to TA \vee KB$; $T(A \vee B) \to KA \vee TB$; $K(A \vee B) \to KA \vee KB$.

Правила вывода:
modus ponens $A \to B, A \Rightarrow B$;
введение конъюнкции $A, B \Rightarrow A \wedge B$;
правило замены произвольного вхождения $\neg\neg A$ на A и vice versa;
правило Геделя.

Логика, двойственная логике Хао Вана содержит, кроме базиса, аналогичного базису релевантной логики, те же 28 схем аксиом (где $\to$ – импликация Хао Вана) и дополнительную схему аксиом $TA \vee (KA \wedge K\neg A) \vee \neg KA$.

2. Логика пропозициональных установок

Символы $\Box_к$ и $\Diamond_к$ вводятся как сокращения для выражений «к уверен, что…», «к допускает, что…», соответственно. (Символ «к» можно опускать, если ясно, о каком субъекте идет речь. Язык содержит кроме этих и обычных символов следующие специальные символы: $'$, $*$, $+$, $\to$ – соответственно суботрицание, субконъюнкция, субдизъюнкция и субимпликация; субпеременные а, б, в, $а_1$, … . Субпеременная является субформулой. Если А и В – субформулы, то A′, (A∗B), (A + B), (A→ B) – субформулы. Если A – субформула, то $\oplus_{i1},\ldots, \oplus_{ir}A$ – формула (Индексы выражений $\oplus_{i1},\ldots, \oplus_{ir}$ различны, и $\oplus_{i1}$ есть $\Box_{i1}$ или $\Diamond_{i1}$ и т. д.) Если С и Д – формулы, то ¬С, (С∧Д) и т. д. – формулы. Субформула A может принимать значения n_k, i_k, c_k, которые соответственно означают: k уверен, что A истинно, k уверен, что A ложно, k допускает, что A истинно, и допускает, что A ложно. Определения:

A	¬A	$\Box_к$ A	$\Diamond_к$ A
n_k	i_k	t	t
c_k	c_k	f	t
i_k	n_k	f	f

A	B	(A∗ B)	(A + B)	(A→ B)
n	n	n	n	n
n	c	c	n	c
n	i	i	n	i
c	n	c	n	n
c	c	i/c	n/c	n/c
c	i	i	c	c
i	n	i	n	n
i	c	i	c	n
i	i	i	i	n

Выделенное значение – t.

Пусть дана формула $\Box_1\ \Box_2\ \Diamond_3\ \Diamond_4(а+б)$. В каждой строке таблицы переменной приписываются четыре значения. Пусть в некоторой строке переменной а приписываются значения
$n_1\ c_2\ i_3\ i_4$, а переменной б – $n_1\ c_2\ n_3\ i_4$.

Получаем:

$$\begin{array}{cccccccc}
\Box_1 & \Box_2 & \Diamond_3 & \Diamond_4 & (& а & + & б). \\
 & & & & & n_1 & n_1 & n_1 \\
t & t/f & t & f & & c_2 & n_2/c_2 & c_2 \\
 & & & & & i_3 & n_3 & n_3 \\
 & & & & & i_4 & i_4 & i_4
\end{array}$$

Строка таблицы расщепляется на две подстроки:

$$\begin{array}{cccccccc}
\Box_1 & \Box_2 & \Diamond_3 & \Diamond_4 & (& а & + & б). \\
t & t & t & f & & & & \\
t & f & t & f & & & &
\end{array}$$

$|\Box_1\ \Box_2\ \Diamond_3\ \Diamond_4\ (\ а\ +\ б\ )| = t$, если и только если $\forall_i\ |\oplus_i\ (а+б)|= t$, где i – переменная, область значений которой есть {1, 2, 3, 4}.

3. Трехзначная деонтическая логика

Язык содержит символы:

1) p, g, r, s, p_1, g_1, … – переменные для деяний (действий и бездействий);
2) $\cdot$, $\cup$, $'$ – знаки операций над деяниями, соответственно читаются «и», «или», «не» («воздержание от…»);
3) O, P – операторы, которые читаются «обязательно», «разрешено»;
4) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ – логические связки:
5) скобки.

Определение субформулы:

1) переменная для деяний является субформулой;
2) если A и B являются субформулами, то A', $(A\cdot B)$, $(A\cup B)$ – субформулы;
3) ничто иное не является субформулой.

Определение формулы:

1) если A – субформула, то OA, PA – формулы;
2) если B и C – формулы, то $\neg B$, $(B\wedge C)$, $(B\vee C)$, $(B\supset C)$ – формулы;
3) ничто иное формулой не является.

Определения:

A	A′
n	i
c	c
i	n

(A·B)	n	c	i
n	n	c	i
c	c	i/c	i
i	i	i	i

(A∪B)	n	c	i
n	n	n	n
c	n	n/c	c
i	n	c	i

Значения n, c, i соответственно читаются «обязательно», «безразлично», «запрещено». Операции $'$, $\cdot$, $\cup$, имеют следующий смысл, соответственно. Выражение A' обозначает деяние, заключающееся в воздержании от деяния A, выражение $(A\cdot B)$ – деяние, заключающееся в последовательном выполнении деяний A и B (A, а затем B) или же в одновременном выполнении этих деяний. Выражение A$\cup$B обозначает деяние, заключающееся в выполнении или деяния A, или деяния B, или в последовательном выполнении деяний A и B (A, а затем B), или в одновременном выполнении этих деяний.

Определения терминов O и P:

A	OA	PA
n	t	t
c	f	t
i	f	f

Формула принимает значения из области {t, f}. Выделенное значение – t. Определения терминов $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ обычные.

Формализацией семантически заданной логики является исчисление $S_{3д}$, содержащее схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом классического исчисления высказываний (КИВ), в которых метапеременные обозначают формулы (но не субформулы), а также следующие дополнительные схемы аксиом, в которых буквами A и B обозначены субформулы:

$OA \supset PA$, $\neg OA' \supset PA$,
$PA \supset \neg OA'$, $OA \wedge OB \supset O(A \cdot B)$,
$O(A \cdot B) \supset OA \wedge OB$,
$PA \wedge OB \supset P(A \cdot B)$,
$OA \wedge PB \supset P(A \cdot B)$,
$P(A \cdot B) \supset PA \wedge PB$,
$OA \vee OB \supset O(A \cup B)$,
$PA \vee PB \supset P(A \cup B)$,
$P(A \cup B) \supset PA \vee PB$,
$O(A \cup B) \supset PA \vee OB$, $O(A \cup B)\ ) \supset OA \vee PB$.

Правила вывода: modus ponens и замена произвольного вхождения субформулы A'' на A, и vice versa.

4. Пятизначная деонтическая логика

Язык содержит те же символы, что и язык трехзначной деонтической логики, за следующим исключением. Вместо символов O и P используются символы Он, Ом, Рн, Рм, которые соответственно читаются «обязательно нормативно», «обязательно морально», «разрешено нормативно», «разрешено морально». Соответствующим образом изменяется определение формулы.

В семантике используются следующие значения субформул: о, о′, б, з, з′, которые соответственно читаются «обязательно», «одобряемо», «безразлично», «запрещено», «порицаемо».

Определения:

A	о	о′	б	з	з′
A′	з	з′	б	о	о′

Пусть | | – функция приписывания значений субформулам. |A·B| = min (|A|, |B|), кроме случая, когда |A| = |B| =б. В этом случае |A·B| ∈{б, з, з′}. |A∪B| = max (|A|, |B|), кроме случая, когда |A| = |B| =б. В этом случае |A∪B| ∈{б, о, о′}.

A	OнA	OмA	PнA	PмA
о	t	t	t	t
о′	f	t	t	t
б	f	f	t	t
з′	f	f	t	f
з	f	f	f	f

t – выделенное значение. Остальные логические термины определяются обычным образом.

Формализация пятизначной деонтической логики, осуществленная моим учеником Кузнецовым А. М.:

1) схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом КИВ, в которых метапеременные обозначают формулы (но не субформулы);
2) дополнительные схемы аксиом, в которых буквами A и B обозначены субформулы:

OнA⊃OмA, OнA⊃PнA, OмA⊃PмA,
OнA⊃PмA, OмA⊃PнA,
¬OнA′ ≡ PнA, ¬OмA′ ≡ PмA,
PмA⊃PнA,
OнA∧OнB ≡ Oн(A·B), OмA∧OмB ≡ Oм(A·B),
OнA∧PнB ⊃ Pн(A·B), OнA∧OмB ⊃ Oм(A·B),
OмA∧PмB ⊃ Pм(A·B),
Pн(A·B) ⊃ PнA∧PнB, Pм(A·B) ⊃ PмA∧PмB,
¬PнA′ ⊃ PнA,
OнA ⊃ Oн(A∪B), OмA ⊃ Oм(A∪B),
PнA∨PнB ≡ Pн(A∪B), PмA∨PмB ≡ Pм(A∪B),
Oн(A∪B) ⊃ PнA∨OнB, Oм(A∪B) ⊃ PмA∨OмB,
PнA∧PнB′ ⊃ Pн(A·B)′, PмA∧PмB′ ⊃ Pм(A·B)′,
PнA ⊃ Pн(A∪B),
PмA′∨¬PмB ⊃ PM(A∪B)′;

3) правила вывода и определения те же, что и в предшествующей системе.

Возможно построение **шестизначной деонтической логики,** в которой значение «безразлично» заменяется двумя значениями: «безразлично юридически», «безразлично морально».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев В. Ю., Ивлев Ю. В.* Проблема построения теории фактических модальностей // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000. С. 269-278.
2. *Ивлев Ю. В.* Таблицы истинности для модальной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Философия. 1973, № 6. С. 51-61.
3. *Ивлев Ю. В.* Содержательная семантика модальной логики. М., 1985. 170 с.
4. *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М., 1991. 224 с.
5. *Ивлев Ю. В.* Квазифункциональная логика // НТИ, сер. 2. Информ. процессы и системы. 1992. № 6.
6. *Ивлев Ю. В.* Квазиматричная логика – основа теории фактических модальностей // Логические исследования. Вып. 8. М., 2001. С. 50-64.
7. *Ivlev Y. V.* Theory of Logical Modalities // Multi. Val. Logic. 2000. Vol, 5. P. 91-102.
8. *Ivlev Y. V.* Outlines of the transition from the principles of traditional logic to the principles of non-classical logic // Zwischen traditioneller und modernen logik. Nichklassische Ansatze. Mentis, 2001. S. 297-310.
9. *Ivlev Y. V.* Quasi-matrix logic as a paraconsistent logic for dubitable information // Logic and Logical Philosofy. Vol. 8. 2000. P. 91-97.
10. *Ivlev Y. V.* Quasi-Functional Logic and Logic of Propositional Attitudes // Philosophie und Logik. Frege-Kolloquien, Jena, 1989/1991. Berlin; New York, 1993. S.200-204.
11. *Кузнецов А. М.* Квазиматричная логика норм. Автореферат дис. канд. филос. наук. М., 1998.