Л.Эсакиа

МОДАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ II ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ И СИСТЕМА МАККИНСИ

Abstract. *We are going to discuss certain systems (K4.G and K4.Grz) of modal logic that are of special interest in connection with the study of the notions of provability in Peano Arithmetic. K4.G (respectively, K4.Grz) is the result of adjoint a modal version G of the second incompleteness theorem (respectively, the formula Grz) to the modal system K4.*

Вводные замечания

В нашем рассмотрении мы ограничимся системами модальной логики, которые прямо или косвенно связаны с Логикой доказуемости. Оговоримся, что это наше ограничение не следует ассоциировать со следующими словами Булоса, сказанными им в связи с известной критикой Куайна: "*Far from undermining Quine's critique of modality, Provability Logic provides an example of the interpretation of the box whose intelligibility is beyond question. Quine has never published an opinion on the matter, but it would be entirely consonant with the views he has expressed for him to hold that Provability Logic is what modal logicians should been doing all along*" ([1, с. XXXIII]).

Как мы знаем, гёделева модальная трансляция *Tr* погружает пропозициональное исчисление Гейтинга *HC* в классическую модальную систему Льюиса *S4*; иными словами, система *S4* является модальным компаньоном исчисления *HC*. По-видимому, первым не-льюисовым расширением системы *S4* была модальная система *S4.1*, сформулированная Маккинси [5] более чем полстолетия тому назад. Отметим, что Маккинси в этой работе предложил интересный метод синтаксического определения модальных операторов. На странице 83 он пишет: "*As the intuitive basis for the syntactical definition of possibility I take the position that to say a sentence is possible means that there exists a true sentence of the same form. Thus, for example, it would be said that the sentence, "Lions are indigenous to Alaska" is possible, because of the fact that the sentence, "Lions are indigenous to Africa" has the same form and is true"*.

В дальнейшем было установлено [10], что система *S4.1* – это еще один модальный компаньон исчисления *HC* (при той же гёделевой погружающей процедуре). Это наблюдение уже не воспринималось как неожиданное, так как ранее, в 1967 г., Гжегорчик аксиоматически определил модальную систему *S4.Grz* и показал, что она является модальным компаньоном исчисления *HC*. Итак, мы имеем

Утверждение. (a) *HC* |- p $\Leftrightarrow$ *S4* |- Tr(p) ([4])

(b) *HC* |- p $\Leftrightarrow$ *S4.1* |- Tr(p) ([10])

(c) *HC* |- p $\Leftrightarrow$ *S4.Grz* |- Tr(p) ([3])

Напомним, определения модальных систем *S4.Grz* и *S4.1*:

S4.Grz = *S4* + $\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to \Box p$

S4.1 = *S4* + $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$

Системы K4.G и K4.Grz

Несомненно, основным представителем доказуемостной логики следует считать модальную систему Гёделя–Лёба *GL*; напомним ее формулировку.

Определение. Модальная система ***GL*** получается из известной системы *K4* постулированием формулы Лёба $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ в качестве дополнительной аксиомы.

В 1976 г. Соловай определил доказуемостную интерпретацию формул системы *GL*, при которой модальность $\Box$ трактуется как «доказуемость в арифметике Пеано *PA*». Говоря более техническим языком, арифметической реализацией формул системы *GL* называется отображение *, сопоставляющее каждой атомной формуле p предложение p* арифметики Пеано, коммутирующее со всеми не-модальными связками и $(\Box p)^* = \mathrm{Bew}(\langle p^* \rangle)$, где Bew(.) – стандартный предикат доказуемости арифметики *PA*.

Теорема 1. [10]. *Для каждой формулы p* GL |- p $\Leftrightarrow$ (PA |- p* *при любой арифметической реализации* * *предложение p* доказуемо в PA*, т.е. PA |- p*) .

Вспомним [1], что предложение s арифметики Пеано *PA* называется *демонстрируемым* (Dem($\langle s \rangle$)), если s истинно и доказуемо. *“Since every provable sentence is true, the distinction between provability and demonstrability is one in «intension» only, but Löb’s theorem shows that Bew($\langle s \rangle$)& s, the arithmetization of the assertion that s is demonstrable, is equivalent to the arithmetization Bew($\langle s \rangle$) of the assertion that s is provable only if s is actually provable”* ([1, p. 9]). Известно, что интерпретация модального оператора $\Box$ как Dem(.) адекватна для системы *S4.Grz*. Технически этот факт может быть выражен следующим образом. Обозначим через *Split* (=Splitting map) «расщепляющее» преобразование формул p модальной системы, состоящее в замене (=«расщеплении») каждой подформулы

формулы p вида $\Box q$ на $\Box q \wedge q$. Булосом, Голдблаттом и Кузнецовым было замечено, что

(1) S4.Grz |- p $\Leftrightarrow$ GL |- Split(p*).

Этот факт вместе с Теоремой 1, влечет вышеуказанную адекватность системы *S4.Grz*. Таким образом, система *S4.Grz* «совпадает» с фрагментом системы *GL*; а именно теоремы системы *S4.Grz* мы можем «отождествить» с теми доказуемыми в системе *GL* формулами, в которые модальный оператор $\Box$ имеет вхождения только вида $\Box p \wedge p$. Очевидно, что модальные выражения вида $\Diamond p$ преобразуются расщепляющим преобразованием в $\Diamond p \vee p$. Следует заметить, что в контексте временно́й логики с оператором F (Future) Прайор [6], говоря о модальных фрагментах временно́й логики, ссылается на Диодорово определение $\Diamond p$ как $p \vee Fp$, т.е. возможное – это то, что истино или будет истинным.

Следует отметить, что композиция гёделевой трансляции *Tr*: HC $\rightarrow$ S4.Grz и расщепляющего отображения Split: S4.Grz $\rightarrow$ GL дает нам в качестве следствия адекватную доказуемостную интерпретацию интуиционистской логики.

Модальную систему *K4* также следует отнести к системам доказуемостной логики: ее аксиомы

$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$,

$\Box p \rightarrow \Box\Box p$

и правило вывода

$p / \Box p$

являются модальными версиями основных требований Гильберта–Бернайса (*the Hilbert–Bernays Derivability conditions*), накладываемых на предикат доказуемости. Подчеркивая это обстоятельство, Сморинский в своей книге [8], посвященной доказуемостной логике, именует систему *K4* базисной модальной системой, обозначая ее *BML*, и замечает: “*...BML axiomatises those properties of Bew*(.) *that do not depend on the Diagonalisation Lemma*” ([8, p. 66]). Хотя модальная система *K4* корректна при доказуемостной интерпретации (т.е. *K4*|-p $\Rightarrow$ PA|-p* для любой арифметической реализации *), существуют модальные формулы p, не доказуемые в *K4,* любая арифметическая реализация которых доказуема в *PA*. Важным примером такой формулы является модальная версия

(G) $\neg\Box\bot \rightarrow \neg\Box\neg\Box\bot$

знаменитой второй Теоремы Гёделя о неполноте (из непротиворечивости следует недоказуемость непротиворечивости). Вспомним остроумную реакцию Андре Вейля на это обнаружение Гёделя:

“God exists, since Arithmetic is consistent; the Devil exist, since we cannot prove it”([9, p.110]).

Обозначим через *K4.G* модальную систему, полученную из *K4* постулированием формулы *G* в качестве дополнительной аксиомы: *K4.G = K4 + G*.

Наблюдение 1. *Доказуемость произвольной формулы p в системе S4.1 равносильна доказуемости расщепленной формулы Split(p) в системе K4.G ; символически:*

(2) S4.1 |- p $\Leftrightarrow$ *K4.G |- Split(p).*

Отметим, что модальная система *K4.G* является строго промежуточной между системами *K4* и *GL*, т.е. *K4* $\subset$ *K4.G* $\subset$ *GL*. Включение *K4.G* $\subseteq$ *GL* очевидно, так как подстановка в формулу Лёба $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ $\perp$ вместо p и применение правила контрапозиции дает нам формулу (G) $\neg\Box\perp \to \neg\Box\neg\Box\perp$. С другой стороны, в двухточечном *K4*-фрейме (W,R), где W = {x,y} и xRx, xRy, формула G верна, в то время как формула Лёба опровержима, что и дает нам правое собственное включение *K4.G* $\subset$ GL. То же двухточечное множество W, но с отношением Q, таким, что xQy и yQy, является K4-фреймом, в котором формула G ложна; это обеспечивает собственность включения K4 $\subset$ K4.G. Таким образом, модальная система *K4.G* позволяет анализировать модальную версию второй Теоремы Гёделя изолированно, не привлекая формулу Лёба.

Второе наше наблюдение касается модальной системы Гжегорчика. Как мы уже отмечали (см. соотношение (1) и комментарий к нему), расщепляющее преобразование *Split* вкладывает систему *S4.Grz* в систему Гёделя–Лёба *GL*. Обозначим через *K4.Grz* систему, полученную из *K4* постулированием формулы

(Grz) $\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to \Box p$

в качестве дополнительной аксиомы; символически: *K4.Grz* =

K4 + *Grz*.

Наблюдение 2. *Для любой модальной формулы p справедливо соотношение:*

(3) *S4.Grz* |- p $\Leftrightarrow$ *K4.Grz* |- Split(p);

более того, модальная система K4.Grz является наименьшим нормальным расширением системы K4, для которого это соотношение справедливо.

Определим «внутри» модальной системы Гёделя–Лёба *GL* новый модальный оператор ∇, положив:

(A) $\nabla p := \neg\Box\perp \to p \wedge \Box p$.

Ограничившись языком, содержащим (коме булевых операторов) только новый модальный оператор ∇, определим модальную систему ***S*** следующим образом: для любой формулы p будем считать, что S |- p $\Leftrightarrow$ GL |- p.

Наблюдение 3. *В модальной сист еме S доказуемы все т еоремы сист емы K4.Grz, не доказуема формула Лёба, хот я доказуема модальная версия G вт орой Теоремы Гёделя.*

Пусть теперь ***S****** – модальная система, полученная из *GL* тем же приёмом, но использующая вместо (A) определение

(A*) $\nabla p := (\Box\bot \to p)\wedge\Box p$.

Наблюдение 4. *В модальной сист еме S* доказуемы все т еоремы сист емы K4.Grz, но не доказуемы ни формула Лёба, ни формула G.*

Учитывая, что в обоих системах новый модальный оператор ∇ «удовлетворяет требованиям», выраженным в аксиомах и правилах системы *K4* (т.е. требованиям Гильберта–Бернайса), обе системы *S* и *S** – арифметически корректны; при доказуемостной интерпретации модального оператора ∇ система *S* «допускает» вторую Теорему Гёделя, но «блокирует» Диагональную Лемму, в то время как в системе *S**«блокируется» и то и другое.

В Приложении мы представим некоторые соображения алгебраического характера, лежащие в основе этих наблюдений.

Приложение

В нескольких словах отметим топологическую мотивировку расщепляющего преобразования. Как известно, основной топологической операцией является операция предельного перехода, сопоставляющая подмножеству A топологического пространства X множество dA (*derived set*) всех предельных точек множества A. Вспомним, что точка $x\in X$ называется *предельной* точкой (*limit point*) множества A (т.е. $x\in dA$), если любая её окрестность U содержит точку $y\in A$, отличную от x. В терминах операции деривации d процедура топологического замыкания cA множества A определяется как присоединение к множеству A всех его предельных точек, т.е. $cA = A \cup dA$ (сравни с процедурой расщепления модальности $\Diamond$). Операция деривации d удовлетворяет условиям:

3. $d\varnothing=\varnothing$, $d(A\cup B)=dA\cup dB$, $ddA\subseteq A\cup dA$.

Алгебраическое рассмотрение этой топологической операции приводит к понятию алгебры с деривацией; вспомним, что алгебра $(\mathbf{B},\vee,\wedge,\neg,\mathbf{d})$ называется *модальной алгеброй*, если $(\mathbf{B},\vee,\wedge,\neg)$ – булева алгебра с наименьшим 0 и наибольшим 1 элементами, **d** операция, удовлетворяющая условиям нормальности и аддитивности, т.е.

4. $\mathbf{d}0=0$, $\mathbf{d}(a\vee в)=\mathbf{d}a\vee\mathbf{d}в$ для любых $a,в\in\mathbf{B}$.

Модальная алгебра $(\mathbf{B},\mathbf{d})$, удовлетворяющая условию $\mathbf{dd}a\leq a\vee\mathbf{d}a$, называется *алгеброй с деривацией* или *wK4*-алгеброй. Системой *wK4* была названа [12] ослабленная версия системы *K4*, а именно аксиома «транзитивности» $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ системы *K4* была заменена на более слабую аксиому $p\wedge\Box p\rightarrow \Box\Box p$. Алгебраическими моделями этой системы, т.е. *wK4*-алгебрами являются алгебры с деривацией. На каждой модальной алгебре $(\mathbf{B},\mathbf{d})$ определим опреатор $\mathbf{C}$: $\mathbf{C}a= a\vee\mathbf{d}a$ для любого $a\in\mathbf{B}$. В [12] было отмечено, что оператор удовлетворяет условиям Куратовского

(3) $\mathbf{C}0=0$, $a \leq \mathbf{C}a$, $\mathbf{CC}a=\mathbf{C}a$, $\mathbf{C}(a \vee b)=\mathbf{C}a \vee \mathbf{C}b$,

если и только если опреатор $\mathbf{d}$ является оператором деривации. Таким образом, с каждой *wK4* алгеброй (и тем более с каждой *K4*-алгеброй) ассоциируется алгебра с замыканием $(\mathbf{B},\mathbf{C})$, что и лежит в основе расщепляющих преобразований:

S4 |- p $\Leftrightarrow$ *wK4* |- Split(p) и *S4* |- p $\Leftrightarrow$ *K4* |- Split(p);

заметим, что система *wK4* является наименьшей из нормальных расширений *K*-системы, для которых справедливы указанные эквивалентности.

Вернемся, однако, к системе Маккинси. Пусть $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ – произвольная алгебра с замыканием (т.е. *S4*-алгебра) и определим, как обычно, дуальную операцию $\mathbf{I}$: $\mathbf{I}a=\neg\mathbf{C}\neg a$, $a\in\mathbf{B}$.

Лемма 1. *Семейство* $\mathbf{B}^*=\{a\in\mathbf{B}\colon \mathbf{IC}a \leq \mathbf{CI}a\}$ *образует подалгебру исходной алгебры и, следовательно, алгебра с замыканием* $(\mathbf{B}^*,\mathbf{C})$ *удовлетворяет условию Маккинси* $\mathbf{IC}a \leq \mathbf{CI}a$ *для любого* $a\in\mathbf{B}^*$. *Кроме того, все открытые элементы алгебры* $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ *принадлежат* $\boldsymbol{B}^*$[11].

Известно, что алгебра $\mathbf{H}=\{\mathbf{I}a\colon a\in \mathbf{B}\}$ всех открытых элементов произвольной алгебры с замыканием $(\mathbf{B},\mathbf{C})$ образует алгебру Гейтинга. Нетрудно проверить, что любая алгебра Гейтинга изоморфна алгебре всех открытых элементов подходящей алгебры Маккинси. Эти замечания и Лемма 1 лежат в основе погружения *Tr*: *HC* $\rightarrow$ *S4.1* исчисления Гейтинга в систему Маккинси.

Теперь убедимся в справедливости соотношения:

(4) *S4.1* |- p $\Leftrightarrow$ *K4.G* |- Split(p).

($\Rightarrow$) Из вышеприведенных замечаний уже следует, что расщепления аксиом системы *S4* доказуемы в системе *wK4* (и тем более в системах *K4* и *K4.G*). Остается убедиться в выводимости в системе *K4.G* расщепленной версии Split($\Box\Diamond p\rightarrow \Diamond\Box p$) аксиомы Маккинси ($\Box\Diamond p\rightarrow \Diamond\Box p$). Пусть $(\mathbf{B},\mathbf{d})$ – *K4*-алгебра, удовлетворяющая алгебраическому эквиваленту $\mathbf{d}1 \leq \mathbf{d}\neg\mathbf{d}1$ аксиомы *G* (модальность $\Diamond$

соответсвует оператору **d**). Заметим, что $\neg\mathbf{d}1 = (a\wedge\neg\mathbf{d}1)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}1)$ и, следовательно, $\mathbf{d}1 \le \mathbf{d}\neg\mathbf{d}1 \Leftrightarrow \neg\mathbf{d}1 \vee \mathbf{d}\neg\mathbf{d}1 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}(\neg\mathbf{d}1) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}1)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}1)) = 1$ (1). Используя $\mathbf{C}a = a\vee \mathbf{d}a$ и $\mathbf{I}a=a\wedge \neg\mathbf{d}\neg a$, получаем:

(2) $\mathbf{IC}a \le \mathbf{CI}a \Leftrightarrow \mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}\neg a)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}a)) = 1$; так как $\neg\mathbf{d}1 \le \neg\mathbf{d}a$ и $\neg\mathbf{d}1 \le \neg\mathbf{d}\neg a$ для любого $a \in \mathbf{B}$, получаем

$((a\wedge\neg\mathbf{d}1)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}1)) \le ((a\wedge\neg\mathbf{d}\neg a)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}a))$ и, следовательно,

(3) $\mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}1)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}1)) \le \mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}\neg a)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}a))$.

Из равенства (1), используя (3), получаем

$\mathbf{C}((a\wedge\neg\mathbf{d}\neg a)\vee(\neg a\wedge\neg\mathbf{d}a)) = 1$, т.е. $\mathbf{IC}a \le \mathbf{CI}a$. Таким образом,

S4.1 |- p $\Rightarrow$ *K4.G* |- Split(p).

($\Leftarrow$) Пусть (W,R) – конечный транзитивный фрейм; нетрудно убедиться в равносильности следующих условий:

(а) аксиома (G) $\neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ верна в Крипке фрейме (W,R);

(б) отношение достижиости R обладает следующим свойством:

$\forall x(\exists y(xRy) \Rightarrow \exists y(xRy \ \& \ \neg\exists z(yRz)))$. Допустим теперь, что формула p не выводима в *S4.1.* Ввиду финитной аппроксимируемости системы *S4.1* (см.[7]) существует конечное квази-упорядоченное множество (W,Q), опровергающее формулу p. Обозначим через MaxW множество всех максимальных точек фрейма (W,Q) (напомним, что точка $x \in W$ является максимальной точкой, если $\forall y(xQy \Rightarrow x = y))$. «Слегка» трансформируем отношение Q; точнее, определим новое отношение R следующим способом: (1) если $x \neq y$, то $xRy \Leftrightarrow xQy$; (2) если

$x=y$, то $xRx \Leftrightarrow xQx \ \& \ x\in MaxW$. Легко убедиться, что Q совпадает с рефлексивным замыканием отношения R и R обладает свойством, отмеченным в пункте (б). Следовательно, формула Split(p) опровержима в (W, R). Контрапозиция дает нам

S4.1 |- p $\Rightarrow$ K4.G |- Split(p) и, следовательно,

S4.1 |- p $\Leftrightarrow$ K4.G |- Split(p). □

До перехода к комментариям, непосредственно относящимся ко второму нашему наблюдению, заметим, что система *K4.Grz* является строго промежуточной между *K4* и *GL*, т.е.

(5) *K4* $\subset$ *K4.Grz* $\subset$ *GL*.

Прежде всего убедимся, что *K4.Grz* $\subseteq$ *GL*, т.е. если *K4.Grz* |- p, то GL |- p. Вспомним, что *K4*-алгебра (**B**,**d**) является

(а) *GL*-алгеброй, если и только если для любого элемента $a\in\mathbf{B}$ справедливо равенство $\mathbf{d}a = \mathbf{d}(a\wedge\neg\mathbf{d}a)$ (дуальная форма формулы Лёба);

(б) *K4.Grz*-алгеброй, если и только если справедливо условие
$\mathbf{d}a \le \mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)$ (дуальная форма аксиомы Гжегорчика).

Лемма 2. *Каждая GL-алгебра является K4.Grz-алгеброй, т.е. условие (а) влечет условие (б).*

Доказательство. Ясно, что $\mathbf{d}a \wedge \neg a \le \mathbf{d}a$; используя монотонность оператора $\mathbf{d}$, получаем $\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a) \le \mathbf{dd}a$; но $\mathbf{dd}a \le \mathbf{d}a$, следовательно, $\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a) \le \mathbf{d}a$ и $\neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a) \le \neg\mathbf{d}a$; умножая обе части на a, получаем $a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a) \le a \wedge \neg\mathbf{d}a$ и, следовательно,
$\mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)) \le \mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}a)$. Наконец, используя (а), получаем
$\mathbf{d}a \le \mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)$. Итак, $K4.Grz \subseteq GL$. □

Легко проверить, что в двухточечном *K4*-фрейме (W, R), рассмотренном в конце предыдущего раздела, формула Лёба опровержима; следовательно $K4.Grz \subset GL$. Тут же заметим, что так как в том же фрейме (W, R) опровержима и формула G, то
$K4.Grz + G \subset GL$. Таким образом, обе рассматриваемые нами системы *K4.G* и *K4.Grz* - арифметически корректны.

Перейдем теперь к обоснованию второго наблюдения.

Лемма 3. *Следующие условия равносильны*:
(в) *алгебра* **(B,d)** *является K4.Grz-алгеброй,*
(г) *ассоциированная алгебра с замыканием* **(B,C)**
(*т.е. алгебра, в которой* $\mathbf{C}a = a \vee \mathbf{d}a$) *является S4.Grz-алгеброй.*

Доказательство. Фактически нам достаточно показать равносильность условий (в) $\mathbf{d}a \le \mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)$ и

(г) $\mathbf{C}a \le \mathbf{C}(a \wedge \neg\mathbf{C}(\mathbf{C}a \wedge \neg a)$.

($\Leftarrow$) «Расщепим» условие (г) пошагово:

1. $\mathbf{C}a \wedge \neg a = \neg a \wedge (a \vee \mathbf{d}a) = \neg a \wedge \mathbf{d}a$

2. $a \wedge \neg\mathbf{C}(\mathbf{d}a \wedge \neg a) = a \wedge \neg((\mathbf{d}a \wedge \neg a) \vee \mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)) =$
$= a \wedge \neg(\mathbf{d}a \wedge \neg a) \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)) = a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a) \wedge (\neg\mathbf{d}a \vee a) =$
$= a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)$; итак, условие (г) равносильно условию
(г*) $a \vee \mathbf{d}a \le (a \wedge \neg\mathbf{d}\,(\mathbf{d}a \wedge \neg a)) \vee \mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a))$.

Используя монотонность и аддитивность оператора $\mathbf{d}$, получаем $\mathbf{d}a \vee \mathbf{dd}a \le \mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)) \vee \mathbf{dd}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a))$. Применяя аксиому *K4* $\mathbf{dd}a \le \mathbf{d}a$, получаем $\mathbf{d}a \le \mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a))$.

($\Rightarrow$) Заметим предварительно, что так как $\mathbf{d}a \wedge \neg a \le \mathbf{d}a$, то $\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a) \le \mathbf{dd}a \le \mathbf{d}a$ и, следовательно, $\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a) \le \mathbf{d}a$ и $\neg\mathbf{d}a \le \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)$. Умножив обе части на a, получаем

(д) $a \wedge \neg\mathbf{d}a \le a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)$. Условие (д) вместе с (в) дает
$\mathbf{d}a \vee (a \wedge \neg\mathbf{d}a) \le (a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a)) \vee \mathbf{d}(a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a))$. Используя равенство $\mathbf{d}a \vee (a \wedge \neg\mathbf{d}a) = a \vee \mathbf{d}a$, получаем $a \vee \mathbf{d}a \le (a \wedge \neg\mathbf{d}(\mathbf{d}a \wedge \neg a))$

$\vee$ **d**(a$\wedge\neg$**d**(**d**a$\wedge\neg$a)), т.е. условие (г*), которое, как отмечено выше, равносильно (г). □

В заключение дадим краткий комментарий к Наблюдениям 3 и 4.

Пусть задана GL-алебра (**B**,**d**); зафиксируем произвольный элемент e$\in$**B** и определим одноместный оператор

(+) $\mathbf{d}_e$a : = (a$\wedge$e) $\vee$ **d**a для любого a$\in$**B**.

Лемма 4. (1*) Алгебра (**B**, $\mathbf{d}_e$) является K4.Grz-алгеброй, причем операторы замыкания, ассоциированные с* **d** *и* $\mathbf{d}_e$, *совпадают, т.е.* a $\vee$ **d**a = a $\vee$ $\mathbf{d}_e$a *для любого a$\in$**B**;*

(2*) Любая конечная K4.*Grz-алгебра *(**B**,**d'**) может быть получена из GL-алебры (**B**,**d**) указанным способом, т.е. для любого a$\in$**B** **d'**a = $\mathbf{d}_e$a при подходящем выборе e$\in$**B**;*

(3) Следствия выбора параметра таковы:

(а*) если* e = 0, *то операторы* **d** и $\mathbf{d}_e$ *совпадают;*

(б) *если* e $\neq$ 0 и e $\leq$ **d**1, *то в полученной алгебре* (**B**, $\mathbf{d}_e$*) верна формула G, но опровержима формула Лёба;*

(в) *если* e = 1, *то полученная алгебра* (**B**, $\mathbf{d}_e$) *является S4.Grz-алгеброй;*

(г) *если условие* e $\leq$ **d**1 *ложно, то в агебре* (**B**, $\mathbf{d}_e$) *опровержимы и формула Лёба и формула G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boolos G.* On systems of modal logic with provability interpretations // Theoria. 1980. Vol. 46. P. 7-18.
2. *Boolos G.* The Logic of Provability. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
3. *Grzegorczyk A.* Some relations systems and the associated topological spaces // Fund.Math. 1967. Vol. 60. P. 223-231.
4. *Gödel K.* Eine Interpretation intuitionishen Aussagenkalkulus // Ergebnisse eines mathematischen Kolloqiums. 1933. Bd. S. 39-40.
5. *McKinsey J.C.* On the syntactical construction of systems of Modal logic // Journal of Symbolic Logic. 1945. Vol. P. 83-94.
6. *Prior A.* Past, Present and Future. Oxford: Clarendon Press, 1967.
7. *Segerberg K.* Decidability of S4.1 // Theoria. 1968. Vol. 34. P. 1-15.
8. *Smorinski C.* Self-Reference and Modal Logic. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
9. *Smullyan R.* Forever Undecided. Oxford: Oxford University Press, 1988.
10. Solovay R.M. Provability interpretations of modal logic // Israel Journal of Mathematics. 1976. Vol. 25. P. 287-304.
11. *Эсакиа Л.* К теории модальных и суперинтуиционистких систем // Логический вывод. М.: Наука, 1979.
12. *Эсакиа Л.* Слабая транзитивность – реституция // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001. С. 244-255.