А.В.Чагров

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА АКСИОМАТИЗАЦИИ ТАБЛИЧНОЙ НОРМАЛЬНОЙ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ*

Abstract. *The main results: solving the old algorithmic problems of tabularity and coincidence of normal modal logics with given tabular logic. The problem of tabularity is undecidable; the problem of coinciting is decidable only when given tabular logic is inconsistent. There are other results; open problems are discussed.*

Введение

Среди всевозможных неклассических пропозициональных логик табличные логики, т.е. логики, обладающие конечными точными моделями, занимают особое место. Во-первых, это самые простые логики по способу семантического задания, а посему разумно, изучая произвольные логики из какой-либо данной совокупности, начинать это изучение с табличных членов совокупности. А во-вторых, многие из возникающих естественным образом логик финитно аппроксимируемы, так что если ограничить длину интересующих нас формул некоторым числом, то для каждой из этих логик можно найти конечную модель, точную для получившегося фрагмента.

С табличными логиками связаны несколько различных алгоритмических проблем, из которых к настоящему времени решены многие, но далеко не все. Частью это обусловлено тем, что большинство решений было получено в ситуациях, когда решения положительны, т.е. соответствующие алгоритмы существуют. Описание общей картины имеющихся данных читатель может найти в главе об алгоритмических проблемах в модальной логике в книге М.В.Захарьящева и автора [9]. Там же можно проконсультироваться о современном состоянии теории модальных логик.

Здесь мы займемся одной конкретной алгоритмической проблемой, которая долгое время оставалась открытой. Формулировка проблемы такова. *Пусть L – фиксированная табличная нормальная модальная логика. Существует ли алгоритм, который по произвольной формуле φ дает ответ на вопрос: является ли* $\mathbf{K} + \varphi$ *аксиоматизацией* L? Следует заметить, что каждая таб-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 00-06-80037.

личная логика может быть аксиоматизирована в виде **K** + φ, т.е. одной аксиомой, дополнительной к **K**, что обеспечивает нетривиальность проблемы для всякой такой логики.

Разумно предположить, что решение проблемы зависит от выбора логики L. Для одного варианта такого выбора, когда L – противоречивая логика, положительное решение (оно же – положительное решение проблемы непротиворечивости нормальной модальной логики) известно давно. Оно непосредственно следует из теоремы Макинсона [11] (см. теорему 8.67 [9]; далее эта теорема формулируется точно, поскольку существенно будет использоваться). Ниже мы получаем отрицательные решения во всех остальных случаях.

Для удобства читателя мы приводим все необходимые определения и другой исходный материал, детали которого см. в [9].

Предварительные сведения

Модальные формулы (короче, формулы) строятся стандартным образом из пропозициональных переменных p_0, p_1, … и константы $\bot$ (ложь) с помощью обычных пропозициональных связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ (конъюнкция, дизъюнкция, импликация) и модальной связки $\Box$ (необходимо, что …). Другие связки считаются здесь обычными сокращениями:
$\neg\varphi = \varphi \to$ b, $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ (отрицание и эквивалентность), $(\varphi = \neg\Box\neg\varphi$ (возможно, что …).

Нормальной модальной логикой (короче, логикой) является всякое множество формул, включающее в себя все классически тождественно истинные формулы, формулу $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ и замкнутое относительно правил вывода, подстановку, *modus ponens* (из формул φ и $\varphi \to \psi$ следует ψ), правила Гёделя (из формулы φ следует $\Box\varphi$). Минимальную нормальную модальную логику обозначаем **K**, минимальную логику, содержащую формулу φ – **K** + φ; совокупность (решетку) всех нормальных модальных логик обозначаем *NExt***K**. Нас интересуют здесь только логики такого вида, поскольку: во-первых, все табличные логики конечно аксиоматизируемы; во-вторых, ввиду замкнутости всякой логики относительно правил соединения и разделения конъюнкции всякую конечно аксиоматизируемую логику можно аксиоматизировать одной формулой, дополнительной к **K**; в-третьих, в силу теоремы А.В.Кузнецова, см. [5] или теорему 17.1 [9], алгоритмические проблемы в данной области осмысленны (т.е. в случае своей нетривиальности *a priori* допускают положительное решение) только для конечных аксиоматизаций логик.

Напомним подходящий для наших целей семантический аппарат. Называем пару $\langle W,R\rangle$, где W – непустое множество (его элементы называются (возможными) мирами, или, ввиду графического изображения, точками), а R – бинарное отношение (достижимости) на нем, модальной шкалой Крипке (короче, шкалой).

Вместо $\langle a,b\rangle \in R$ пишем aRb. Записи типа $aRbRc$ являются сокращениями – aRb и bRc. Запись aR^nb означает, что из a в b можно попасть по отношению R за n шагов: aR^0b означает $a = b$, aR^1b – aRb, aR^2b – $\exists c\ (aRcRb)$, и т.д.

Изображаем шкалы графически: точки шкалы – кружочками, закрашенными (черными) – иррефлексивные, незакрашенными (белыми) – рефлексивные; отношение достижимости между различными точками – отрезками (из точки на нижнем конце отрезка достижима точка на верхнем конце) или векторами (стрелками), опуская отрезки или векторы, которые получаются по транзитивности, которая в случае ее выполнения для всей шкалы или какой-либо части шкалы особо оговаривается.

Оценка на шкале $\langle W,R\rangle$ – это функция V, сопоставляющая каждой переменной некоторое множество точек из W. Истинность формулы в точках шкалы $F = \langle W,R\rangle$ при оценке V определяется обычным образом. Считаем, что формула истинна в шкале, если она оказывается истинной в каждой точке шкалы при любой оценке. Шкала с оценкой называется моделью.

Устройство «верхней» части *NExt*$\mathbf{K}$ описывает теорема Макинсона [11]: всякая непротиворечивая нормальная модальная логика содержится в логике шкалы • (логике $\mathbf{K}$ + □b) или в логике шкалы о (логике $\mathbf{K}$ + □$p \leftrightarrow p$). Здесь первый случай имеет место тогда, когда логике не принадлежит формула (a.

Логика является табличной, если она совпадает со множеством формул, истинных в некоторой конечной шкале (другими словами, является логикой этой шкалы); хорошо известно, что это определение эквивалентно иным определениям, связанным, например, с конечными алгебрами, а не шкалами, см. [9]. Имеется удобная для наших целей синтаксическая (формульная) характеризация табличных логик. Для ее формулировки используются последовательности формул α_s и β_s (обозначения носят локальный характер, поскольку далее этого абзаца формулы α_s и β_s не используются, в частности, буквы α и β ниже мы используем и для других целей), определяемых следующим образом:

$$\alpha_n = \neg(\varphi_1 \wedge ((\varphi_2 \wedge ((\varphi_3 \wedge \ldots \wedge (\varphi_n)\ldots)),$$

$$\beta_n = \wedge_{0\leq m\leq n-1} \neg (^m((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge (\varphi_n),$$

где $\varphi_i = p_1 \wedge \ldots \wedge p_{i-1} \wedge \neg p_i \wedge p_{i+1} \wedge \ldots \wedge p_n$, при $1 \leq i \leq n$. В частности, в [9] доказывается, что

1. *логика, расширяющая* **K** *(*с постулированием или без постулирования правил Гёделя*), таблична тогда и только тогда, когда для некоторого s ей принадлежит формула* $\alpha_s \wedge \beta_s$;
2. *имеется эффективно вычислимая функция f(s), такая, что все шкалы с корнем, в которых истинна формула* $\alpha_s \wedge \beta_s$, *имеют не более f(s) точек.*

Кроме того, там же отмечается простой факт: в шкале $F = \langle W,R\rangle$ опровергается формула α_s в точке x_1 в точности тогда, когда в F имеется псевдоцепь длины s, начинающаяся с x_1, т.е. $x_1Rx_2 \ldots Rx_s$ для некоторых различных $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Основным инструментом получения результатов о неразрешимости в дальнейшем будет сведение к интересующим нас модальным соотношениям проблем, касающихся машин Минского. Прежде всего напомним минимальный набор определений и фактов об этих машинах. Подробности с некоторыми несущественными изменениями можно найти, например, в [1].

Машина Минского с двумя лентами (в другой терминологии такие машины называют также регистровыми машинами с двумя регистрами или автоматами с двумя магазинами) полностью описывается своей программой, т.е. конечным списком инструкций следующих типов:

$\alpha \to \langle\beta,1,0\rangle$, $\alpha \to \langle\beta,0,1\rangle$,

$\alpha \to \langle\beta,-1,0\rangle$ $(\langle\gamma,0,0\rangle)$, $\alpha \to \langle\beta,0,-1\rangle$ $(\langle\gamma,0,0\rangle)$,

Последнюю, например, инструкцию следует понимать так: если машина находится в состоянии с номером α и на второй ленте записано число больше нуля, то, не меняя информации на первой ленте, уменьшить записанное на второй ленте число на единицу и перейти в состояние с номером β; если же на второй ленте записан ноль, т.е. «вычитать нечего», то из состояния с номером α перейти в состояние с номером γ, не меняя записи на лентах. Отождествляем машину Минского с ее программой.

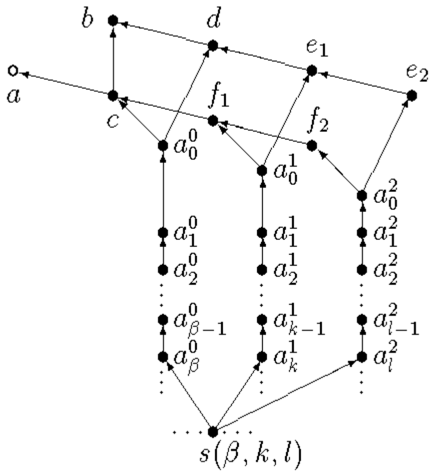
Будем называть тройку $\langle\alpha,k,l\rangle$ конфигурацией машины Минского, подразумевая, что α – номер состояния, k, l – записи (т.е. числа) на первой и второй лентах. Если конфигурация $\langle\alpha,k,l\rangle$ некоторым вычислением по программе P переходит в $\langle\beta,m,n\rangle$, то пишем P: $\langle\alpha,k,l\rangle \to \langle\beta,m,n\rangle$.

Исходной для дальнейшего неразрешимой проблемой будет следующая проблема конфигураций: по программе P и конфигурациям $\langle\alpha,k,l\rangle$ и $\langle\beta,m,n\rangle$ определить, верно ли, что P: $\langle\alpha,k,l\rangle \to \langle\beta,m,n\rangle$. Ее неразрешимость следует из известных более сильных утверждений, см. [1].

Моделирование вычислений выводами в модальных исчислениях

Здесь мы приведем подходящую для наших целей модификацию формульного моделирования вычислений на машинах Минского, первоначально использованного в [3], [4], см. также [5] и [9].

Итак, представим формулы, имитирующие конфигурации машин Минского. Для удобства зафиксируем произвольную программу P и произвольную конфигурацию $\langle \alpha,m,n\rangle$. Для понимания «смысла» вводимых формул полезно иметь в виду транзитивную шкалу i_0 из приводимого ниже рисунка.



На этом рисунке точки $a_\beta{}^0$, $a_k{}^1$, $a_l{}^2$ изображают компоненты конфигурации $\langle \beta,k,l\rangle$, а $s(\beta,k,l)$ – саму эту конфигурацию. Полагаем, что в этой шкале имеются в точности такие точки $s(\beta,k,l)$, что P: $\langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$. Приведем формулы, описывающие точки шкалы в том смысле, что в точке истинна формула, обозначаемая той же, но прописной буквой и с теми же индексами, если они есть, которая в остальных точках ложна (поскольку формулы константны, оценка никакого значения не имеет):

$A = (\mathrm{a} \wedge \Box(\mathrm{a}$, $B = \Box\mathrm{b}$, $C = (A \wedge (B \wedge \neg((B$,
$D = \neg C \wedge (B \wedge \neg((B$, $E_1 = (D \wedge \neg((D$, $E_2 = (E_1 \wedge \neg((E_1$,
$F_1 = (C \wedge \neg((C$, $F_2 = (F_1 \wedge \neg((F_1$,
$A_0{}^0 = (C \wedge (D \wedge \neg((C \wedge \neg((D$,
$A_0{}^1 = (E_1 \wedge (F_1 \wedge \neg((E_1 \wedge \neg((F_1$,
$A_0{}^2 = (E_2 \wedge (F_2 \wedge \neg((E_2 \wedge \neg((F_2$,
$A_{j+1}{}^i = (A_j{}^i \wedge \neg((A_j{}^i \wedge \wedge_{i \neq k=0}{}^2 \neg(A_0{}^k$,

при $i \in \{0,1,2\}$, $j \leq 0$. Формулы, соответствующие в указанном смысле точкам вида $s(\beta,k,l)$, имеют более сложное обозначение $S(\beta,A_k{}^1, A_l{}^2)$, которое будет удобно в дальнейшем, где

$$S(\beta,\varphi,\psi) = \wedge_{i=0}{}^\beta(A_i{}^0 \wedge \neg(A_{\beta+1}{}^0 \wedge (\varphi \wedge (\psi \wedge \neg((\varphi \wedge \neg((\psi.$$

Проверить сказанное о только что приведенных формулах не составляет труда. Отсюда следует

Лемма 1. *При любой оценке на шкале* i_0 *множество точек, в которых истинна формула* $S(\beta,A_k^{\ 1},A_l^{\ 2})$*, состоит ровно из одной точки* $s(\beta,k,l)$*, если* P*:* $\langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$*, и пусто, если условие* P*:* $\langle\alpha,m,n\rangle \to \langle\beta,k,l\rangle$ *не выполняется.*

Нам понадобятся еще формулы, позволяющие описывать не только фиксированные конфигурации, как $S(\beta,A_k^{\ 1},A_l^{\ 2})$, но и произвольные. Для этого используем

$$Q_1 = ((A_0^{\ 1} \vee A_0^{\ 1}) \wedge \neg(A_0^{\ 0} \wedge \neg(A_0^{\ 2} \wedge p_1 \wedge\neg(\ p_1,$$
$$Q_2 = (A_0^{\ 1} \wedge \neg(A_0^{\ 0} \wedge \neg(A_0^{\ 2} \wedge (p_1 \wedge \neg((p_1,$$
$$R_1 = ((A_0^{\ 2} \vee A_0^{\ 2}) \wedge \neg(A_0^{\ 0} \wedge \neg(A_0^{\ 1} \wedge p_2 \wedge \neg(\ p_2,$$
$$R_2 = (A_0^{\ 2} \wedge \neg(A_0^{\ 0} \wedge \neg(A_0^{\ 1} \wedge (p_2 \wedge \neg((p_2.$$

Потребуем, чтобы переменные p_1 и p_2 не использовались для иных целей, в частности – не содержались ни в одном из вариантов вводимой далее формулы χ.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi \equiv \psi$ *означает принадлежность логике* **K** *формулы* $\varphi \leftrightarrow \psi$*, а* φ^* *– результат подстановки в* φ *формул* $(^kA_0^{\ 1}$, $(^lA_0^{\ 2}$ *вместо переменных* p_1, p_2*. Тогда:*

$$Q_1^* \equiv A_k^{\ 1},\ Q_2^* \equiv A_{k+1}^{\ \ 1},\ R_1^* \equiv A_l^{\ 2},\ R_2^* \equiv A_{l+1}^{\ \ 2},$$
$$(S(\beta,Q_i,R_j))^* \equiv S(\beta,A_{k+(i\text{-}1)}^{\ \ 1},A_{l+(j\text{-}1)}^{\ \ 2}),$$
$$(S(\beta,Q_1,A_0^{\ 2}))^* \equiv S(\beta,A_k^{\ 1},A_0^{\ 2}),$$
$$(S(\beta,,A_0^{\ 1},\ R_1))^* \equiv S(\beta,A_0^{\ 1},\ A_l^{\ 2}).$$

Доказательство тривиально.

Столь же просто, но чуть более рутинно, доказывается

Лемма 3. (i) *Пусть при некоторой оценке на шкале* i_0 *для некоторой точки* x *выполняется* x ё Q_1*. Тогда для некоторого индекса* $i \geq 0$

$\{x : x$ ё $Q_1\} = \{\ a_{\mathrm{i}}^{\ 1}\}$, $\{\ x : x$ ё $Q_2\ \} = \{\ a_{\mathrm{i+1}}^{\ 1}\}$.

(ii) *Пусть при некоторой оценке на шкале* i_0 *для некоторой точки* x *выполняется* x ё Q_2*. Тогда для некоторого индекса* $i \geq 1$

$\{x : x$ ё $Q_2\} = \{\ a_{\mathrm{i}}^{\ 1}\}$, $\{\ x : x$ ё $Q_1\ \} = \{\ a_{\mathrm{i\text{-}1}}^{\ 1}\}$.

(iii) *Пусть при некоторой оценке на шкале* i_0 *для некоторой точки* x *выполняется* x ё R_1*. Тогда для некоторого индекса* $i \geq 0$

$\{x : x$ ё $R_1\} = \{\ a_{\mathrm{i}}^{\ 2}\}$, $\{\ x : x$ ё $R_2\ \} = \{\ a_{\mathrm{i+1}}^{\ 2}\}$.

(iv) *Пусть при некоторой оценке на шкале* i_0 *для некоторой точки* x *выполняется* x ё R_2*. Тогда для некоторого индекса* $i \geq 1$

$\{x : x$ ё $R_2\} = \{\ a_{\mathrm{i}}^{\ 2}\}$, $\{\ x : x$ ё $R_1\ \} = \{\ a_{\mathrm{i\text{-}1}}^{\ 2}\}$.

Замечания. 1) В дальнейших рассуждениях используются не столько сами утверждения из леммы 3, сколько получающиеся из них аналоги этих утверждений для формул вида $S(\beta,Q_i,R_j)$, $S(\beta,A_0^{\ 1},R_1)$, $S(\beta,Q_1,A_0^{\ 2})$. Мы не приводим их очевидные формулировки, поскольку соответствующие доказательства состоят по существу в ссылках на утверждения леммы 3. 2) В последующем рассматриваются изменения шкалы i$_0$, однако утверждения лемм 1, 3 и некоторых других непосредственно с ними связанных, как нетрудно проследить, сохранятся.

Теперь мы готовы к тому, чтобы подходящим для наших целей образом имитировать формулами машины Минского. Но прежде изменим шкалу i$_0$, сделав это так, чтобы все предыдущие утверждения остались верными: добавим к ней точку g, достижимую из a, и положив, что из g достижимы все точки шкалы, в частности, g рефлексивна. Результат изменения обозначим i$_1$.

Теорема 1. *Пуст ь χ – произвольная формула, опроверж имая в любой т очке шкалы* i$_1$, *кроме* b, *т акая, чт о* $\mathbf{K} + \chi$ Ó (a. *Тогда проблема определения по произвольной формуле φ, верно ли, чт о* $\mathbf{K} + \varphi = \mathbf{K} + \chi$, *алгорит мически неразрешима.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь χ из формулировки теоремы, определим новую формулу A –

A = (a ∧ □(a∧ ((□b.

Для вводимых далее формул используем сокращение (оператор «всеведения»): 0 = (((.

Теперь инструкциям программы P сопоставляем имитирующие формулы так:

- в случае $I = \gamma \to \langle \delta,1,0 \rangle$ полагаем

  $AxI = \neg\, \chi \wedge 0\, S(\gamma,Q_1,R_1) \to \neg\, \chi \wedge 0\, S(\delta,Q_2,R_1)$;
- в случае $I = \gamma \to \langle \delta,0,1 \rangle$ полагаем

  $AxI = \neg\, \chi \wedge 0\, S(\gamma,Q_1,R_1) \to \neg\, \chi \wedge 0\, S(\delta,Q_1,R_2)$;
- в случае $I = \gamma \to \langle \delta_1,\text{-}1,0 \rangle(\langle \delta_2,0,0 \rangle)$ полагаем

  $AxI = (\neg\, \chi \wedge 0\, S(\gamma,Q_2,R_1) \to \neg\, \chi \wedge 0\, S(\delta_1,Q_1,R_1)) \wedge$
  $\wedge (\neg\, \chi \wedge 0\, S(\gamma,A_0^{\,1},R_1) \to \neg\, \chi \wedge 0\, S(\delta_2, A_0^{\,1},R_1))$;
- в случае $I = \gamma \to \langle \delta_1,0,\text{-}1 \rangle(\langle \delta_2,0,0 \rangle)$ полагаем

  $AxI = (\neg\, \chi \wedge 0\, S(\gamma,Q_1,R_2) \to \neg\, \chi \wedge 0\, S(\delta_1,Q_1,R_1)) \wedge$
  $\wedge (\neg\, \chi \wedge 0\, S(\gamma,Q_1, A_0^{\,2}) \to \neg\, \chi \wedge 0\, S(\delta_2, Q_1, A_0^{\,2}))$.

Теперь определяем формулу

$AxP = \wedge_{I \in P}\, AxI$.

Индукцией по длине вычисления по программе P с использованием леммы 2 доказывается

Лемма 4. *Пуст ь $P : \langle \alpha,m,n \rangle \to \langle \beta,k,l \rangle$. Тогда*
$\mathbf{K} + AxP$ „ $\neg\, \chi \wedge 0\, S(\alpha,A_m^{\,1}, A_n^{\,2}) \to \neg\, \chi \wedge 0\, S(\beta,A_k^{\,1}, A_l^{\,2})$.

Заметим, что, как и следует ожидать, верно и обращение утверждения этой леммы, т.е. при подходящем выборе программы P исчисление $\mathbf{K} + AxP$ неразрешимо. Вернемся, однако, к нашей задаче; тем более что нас будет интересовать не это исчисление, а некоторое его расширение.

Введем логику

$$L = \mathbf{K} + AxP +$$
$$+ (\neg \chi \wedge 0\, S(\alpha, A_m^{\;1}, A_n^{\;2}) \to \neg \chi \wedge 0\, S(\beta, A_k^{\;1}, A_l^{\;2})) \to \chi.$$

Лемма 4. *Пусть* $P : \langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$. *Тогда* $L = \mathbf{K} + \chi$.

Доказательство. Включение $L \subseteq \mathbf{K} + \chi$ следует из устройства аксиом L, дополнительных к $\mathbf{K}$: каждая из них содержит положительное вхождение χ, а потому принадлежит $\mathbf{K} + \chi$. Обратное включение получается применением леммы 4 и правила *modus ponens*.

В ходе доказательства следующей леммы используется то, что множество точек i_1, в которых опровержима χ, совпадает с множеством тех точек i_1, из которых «за три шага» (через g) достижима всякая имеющаяся в i_1 точка вида $s(x,y,z)$, а также леммы 1 и 3.

Лемма 5. *Пусть* P: $\langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$. *Тогда* i_1 □ *и, в частности, по выбору* χ *выполняется* $\chi \notin L$, *то есть логика* L *не совпадает с* $\mathbf{K} + \chi$.

Утверждение теоремы 1 следует из лемм 4 и 5.

Теперь извлечем из доказанной довольно общей теоремы более конкретные следствия.

Обратим внимание, что из любой точки i_1, кроме b, исходят сколь угодно длинные псевдоцепи, а значит в каждой из этих точек опровергается аксиоматика любой табличной логики. Кроме того, если логике не принадлежит (а, то по теореме Макинсона [11] ее аксиомы не могут опровергаться в одноэлементной иррефлексивной шкале, а потому и в точке b шкалы i_1. Эти факты вместе с теоремой 1 дают нам следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* L' *– такая табличная нормальная модальная логика, что* (а $\notin L'$. *Тогда проблема совпадения с* L' *в* $NExt\mathbf{K}$ *неразрешима.*

Кроме того, из леммы 5 получаем, что если P: $\langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$, то L не таблична, а потому выполняется и

Теорема 3. *Проблема табличности в* $NExt\mathbf{K}$ *неразрешима.*

Непосредственным следствием теоремы 1 является такой факт: *если* L' *– конечно-аксиоматизируемое непротиворечивое нормальное расширение логики* $\mathbf{GL} = \mathbf{K4} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$, *то проблема совпадения нормального расширения* $\mathbf{K}$ *с* L' *неразрешима.* Можно, конечно, привести и другие примеры утверждений такого рода, однако для **K4**, например, теорема 1 не действует, поскольку ее аксиома □p → □□p не опровержима в точке g шкалы ì$_1$. Но можно вновь изменить немного конструкцию, добавив к шкале ì$_1$ новую точку g', из которой достижима только g. После такого изменения g' станет единственной точкой новой шкалы, в которой опровергается □p → □□p, и единственной ее точкой, из которой за два шага достижимы точки вида $s(x,y,z)$. Теперь, рассуждая как и выше, мы получим, что верна

Теорема 4. *Пусть L' – конечно-аксиоматизируемое непротиворечивое нормальное расширение логики* **K4**. *Тогда проблема совпадения нормальной модальной логики с L' неразрешима.*

Обратимся теперь к двум близким к табличности свойствам – предтабличности и локальной табличности. Первое свойство зависит от выбора семейства рассматриваемых логик, поэтому уточним, что здесь нормальная модальная логика предтабличная, если она не таблична, но всякое ее собственное нормальное расширение таблично.

Теорема 5. *Свойство предтабличности в NExt***K** *алгоритмически неразрешимо.*

Доказательство. Выберем в ходе доказательства теоремы 1 в качестве χ аксиоматизацию какого-нибудь предтабличного расширения **GL**, например, **GL** + □□b. Тогда в случае P: $\langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$ логика L оказывается предтабличной в силу леммы 4. Если же условие P: $\langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$, то логика шкалы ì$_1$ оказывается собственным нормальным расширением L, которое не таблично. В самом деле, нетабличность логики шкалы ì$_1$ уже отмечалась в доказательстве теоремы 2; по лемме 4 эта логика является расширением L. Теперь заметим, что ì$_1$ ë □(□b → p) ∨ □(□b → ¬ p). Образуем шкалу ì$_2$, добавив к ì$_1$ «двойника» точки b, т.е. иррефлексивную точку b', находящуюся в таких же отношениях с точками ì$_1$, что и b. Как лемма 5, доказывается, что ì$_2$ ë L, в то же время, введя оценку так, что b Ó p, b' ëp, мы получим g Ó □(□b → p) ∨ □(□b → ¬ p), то есть эта формула не принадлежит L.

Следующее утверждение доказано, по существу, в ходе доказательства теоремы 2.

Теорема 6. *Проблема локальной табличности нормальных модальных логик неразрешима.*

Доказательство. В самом деле, пусть χ – как в доказательстве теоремы 2. По лемме 4 в случае P: $\langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$ логика L таблична, а значит, и локально таблична. А в случае, если условие P:

$\langle \alpha,m,n\rangle \to \langle \beta,k,l\rangle$ не выполняется, из леммы 5 следует, что существует бесконечно много попарно не эквивалентных константных формул. Примером могут служить формулы A_i^0, $i \in \omega$, поскольку i_1 Ó $A_i^0 \to A_j^0$ при $i \neq j$. Таким образом, даже фрагмент L из формул без переменных не является табличным.

Основной результат

В предыдущем разделе мы в качестве одного из первых результатов, связанных с моделированием работы машин Минского выводами в модальных исчислениях, доказали теорему 2, которая является частью объявленного во введении нашего основного результата, а именно: здесь будет доказана

Теорема 7. *Прот иворечивая логика – эт о единст венная т абличная нормальная модальная логика, проблема совпадения с кот орой произвольной нормальной модальной логики разрешима.*

Доказательство. Прежде всего, обратимся к противоречивой логике. В силу теоремы Макинсона [11] логика $\mathbf{K} + \varphi$ противоречива в точности тогда, когда φ опровергается и в шкале •, и в шкале о, что ввиду их конечности эффективно проверяемо.

Что касается проблем совпадения с непротиворечивыми табличными логиками, то ввиду доказанной теоремы 2 нам осталось рассмотреть произвольную непротиворечивую табличную логику L', такую что L' „ (a. Покажем, что и в этом случае проблема совпадения с L' в $NExt\mathbf{K}$ неразрешима.

В доказательстве теоремы 2 мы довольно существенно использовали то, что рассматриваемые логики имели в качестве расширения логику $\mathbf{K}$ + □b. По теореме Макинсона [11] все остальные логики содержат $\mathbf{D} = \mathbf{K}$ + (a.

Опять воспользуемся изменением шкалы i_0: добавим к ней две точки – g_0 и g_1, положив, что g_0 рефлексивна, g_1 иррефлексивна, но из g_1 достижимы все остальные точки шкалы, кроме a и b, причем сама g_1 достижима только из a и b. Результат изменения обозначим i_3.

Теорема 8. *Пуст ь χ – произвольная формула, опроверж имая в некот орой т очке шкалы i_3, но не в g_0, причем $\mathbf{K} + \chi$ „ (a. Тогда проблема определения по произвольной формуле φ, верно ли, чт о $\mathbf{K} + \varphi = \mathbf{K} + \chi$, алгорит мически неразрешима.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь χ из формулировки теоремы и оценку для ее переменных, при которой χ в i_3 опровергается.

Опровержимость χ хотя бы в одной точке i_3, но не в g_0, дает нам, что χ содержит по крайней мере одну переменную, скажем, u, такую, что для опровержения χ в i_3 необходимо, чтобы в i_3 были точки, в которых u оценена по-разному, так как в противном случае опровергающая χ модель на i_3 будет иметь в качестве p-морфного образа модель из одной точки, т.е. χ удастся-таки опровергнуть в g_0. Легко видеть, что g_0 при этом оказывается единственной точкой i_3, в которой истинна формула

γ_0 = □□□$u \vee$ □□□$\neg u$,

а g_0 – единственная точка i_3, в которой истинна формула

$\gamma_1 = (\gamma_0 \wedge (u \vee (u \vee ((u) \wedge (\neg u \vee (\neg u \vee ((\neg u).$

Отметим, что из любой точки i_3, кроме g_0, «за три шага» достижима любая точка, т.е. мы вновь можем использовать оператор «всеведения» 0 (т.е. (((). Однако теперь мы, конечно же, меняем χ из предыдущего раздела на χ, рассматриваемую здесь, и меняем формулы, характеризующие (при условии выбора оценки, опровергающей χ в какой-нибудь точке, конечно) точки a и b на следующие:

$A = (\gamma_1 \wedge ((\gamma_1, B = (\gamma_1 \wedge \neg((\gamma_1.$

Все остальные определения формул оставляем без изменений.

Сохраняя определения после указанных изменений, заново введем логику

$L = \mathbf{K} + AxP +$

$+ (\neg \chi \wedge 0\, S(\alpha, A_m{}^1, A_n{}^2) \to \neg \chi \wedge 0\, S(\beta, A_k{}^1, A_l{}^2)) \to \chi.$

Вновь стандартно доказывается

Лемма 6. *Пусть P: $\langle \alpha, m, n\rangle \to \langle \beta, k, l\rangle$. Тогда $L = \mathbf{K} + \chi$.*

В ходе доказательства следующей леммы используется то, что множество точек i_3, в которых опровержима χ, совпадает с множеством тех точек i_3, из которых «за три шага» достижима всякая имеющаяся в i_3 точка вида $s(x,y,z)$.

Лемма 7. *Пусть P: $\langle \alpha, m, n\rangle \to \langle \beta, k, l\rangle$. Тогда i_3 □ и, в частности, по выбору χ выполняется $\chi \notin L$, то есть L не совпадает с $\mathbf{K} + \chi$.*

Утверждение теоремы 8 следует из лемм 6 и 7. А теорема 8 завершает доказательство теоремы 7.

Теперь аналогично тому, как было получено утверждение теоремы 2, получаем ее аналог в случае, рассматриваемом в теореме 8.

Теорема 9. *Пусть L' – непротиворечивая табличная нормальная модальная логика, такая, что L' „ (а. Тогда проблема совпадения нормальной модальной логики с L' неразрешима.*

Теореме 4 аналогична по доказательству

Теорема 10. *Пусть L' – конечно-аксиоматизируемое непротиворечивое нормальное расширение логики* **K4D** = **K4** + (а. *Тогда проблема совпадения нормального расширения* **D** *с L' неразрешима.*

Замечание. Утверждения теорем данного раздела без изменения доказательств можно усилить, рассматривая нормальные расширения **D** вместо нормальных расширений **K**.

Заключительные замечания

Здесь мы упомянем некоторые близкие к решенной в предыдущих разделах проблеме задачи, как имеющие близкие решения, так и остающиеся открытыми.

Прежде всего, какова ситуация в естественных подрешетках решетки *NExt***K**? (Об одной из них мы упомянули в конце предыдущего раздела.) Напомним, что проблема табличности модальных логик рассматривалась изначально для нормальных расширений **S4**: независимо в [2] и в [10] было получено положительное ее решение с помощью полного описания совокупности предтабличных в *NExt***S4** логик, которых оказалось всего пять, причем достаточно просто устроенных. В то же время интерес представляет несколько более обширный класс логик – *NExt***K4**. Оказалось [6], что в этом случае совокупность предтабличных логик континуальна, т.е. идеи, использованные в [2] и [10], непосредственно не применимы. Однако для проблемы табличности важны лишь локально табличные предтабличные логики, а вот их-то удается описать вполне приемлемым образом, см. [7]. Как известно, локальная табличность расширения **K4** эквивалентна его конечнослойности. Так вот, в каждом конечном слое (т.е. слое с конечным номером) расширений **K4** имеется лишь конечное эффективно описываемое множество достаточно простых предтабличных логик. Учитывая это описание и то, что в случае установления локальной табличности расширения **K4** можно эффективно вычислить номер слоя, которому оно принадлежит, получаем, что *если разрешима проблема локальной табличности (эквивалентно, проблема конечно-слойности) нормальных расширений* **K4**, *то разрешима и проблема табличности нормальных расширений* **K4**. Посылка этого утверждения – до сих пор открытая проблема. Заметим, что аналог проблемы, решенной нашей теоремой 7, в случае *NExt***K4** довольно прост: всякая проблема совпадения нормального расширения **K4** с данной фиксированной табличной логикой разрешима. Это обосновывается с помощью критерия типа Янкова: в *NExt***K4** всякая табличная логика имеет конечное эффективно находимое множество непосредственных предшественников по включению и все они табличны. Аналогичный результат не верен для *Ext***K4**, т.е. для всех, а не обязательно замкнутых по правилу Гёделя, расширений **K4**: здесь оказывается неразрешимой даже проблема непротиворечивости, как, впрочем, и все другие упоминавшиеся проблемы; точно такая картина справедлива для *NExt***K4t** – решетки нормальных расширений временной логики транзитивных шкал, не говоря уж о *NExt***Kt**, см. [8]. Отметим, что при рассмотрении *Ext***S4** мы оказываемся в существенно более благоприятной алгоримической ситуации: для табличных логик действуют критерии типа Янкова (в частности, разрешима проблема непротиворечивости), разрешимы проблемы табличности, локальной табличности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.
2. *Максимова Л.Л.* Предтабличные расширения логики S4 Льюиса // Алгебра и логика. 1975. Т. 14. № 1. С. 28–55.
3. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства логики доказуемости // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 3. С. 350–367.
4. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства логики доказуемости. II// Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 613–623.
5. *Чагров А.В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 1994. Вып. 5. С. 62–108.
6. *Blok V.J.* Pretabular varieties of modal algebras // Studia Logica. 1980. V.39. No. 2/3. P. 101–124.
7. *Chagrov A.V.* A first-order effect and modal propositional formulas // Andrea Cantini, etc. (Eds.) Logic and Foundation of Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 209–217.
8. *Chagrov A.V., Shehtman V.B.* Algorithmic aspects of tense logics // L.Pacholski, J.Tiuryn. (Eds.) Computer Science Logic, CSL `94. Springer, Lecture Notes in Computer Science. 1995. V. 933. P. 442–455.
9. *Chagrov A.V.. Zakharyaschev M.* Modal Logic // Oxford University Press, 1997. 603 p.
10. *Esakia L.L., Meskhi V.Yu.* Five critical systems // Theoria. Vol. 40. P. 52–60.
11. *Makinson D.C.* Some embedding theorems for modal logic // Notre Dame J. Form. Log. 1977. Vol. 12. P. 252–254.