М.Н.Бежанишвили

ЧАСТИЧНЫЕ ЭПИСТЕМИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ И «СЛУЧАЙНЫЕ» ТОЖДЕСТВА

Abstract. *The article deals with some difficulties which arise in normal modal predicate systems with identity (based on standard semantics of possible worlds). In such systems we can derive some theorems which, under the intended interpretation, are intuitively unacceptable. One of them says: every true statement of identity is necessarily true, or, in other words, there are no true contingent statements of identity. Such theorems seem more unacceptable when we interpret the necessity operator epistemically as 'someone knows that…' It is shown that difficulties of such kind do not arise in partial epistemic modal systems with identity (based on semantics of partial possible worlds), and no assertions of the above-mentioned kind are provable in them.*

Присоединение аксиом тождества к стандартным модальным предикатным системам, основанным на обычной семантике возможных миров, как известно, порождает определенные трудности. Они связаны с толкованием тождества в квантифицированных модальных контекстах и не соответствуют нашим обычным интуитивным представлениям о модальных понятиях. Целью настоящей статьи является обсуждение подобных трудностей и путей их устранения. Поэтому в статье большая часть доказательств будет опущена. Они полностью могут быть восстановлены на основе проведенного нами семантического анализа.

Для введения тождества в первопорядковых предикатных системах обычно расширяют словарь языка соответствующей системы символом «=», а к аксиомам системы, для любых индивидных переменных x и y, присоединяют специальные аксиомы тождества:

1. $x = x$,
2. $(x=y)\supset(A(x)\supset A(y))$,

где $A(z)$ – произвольная формула, а $A(x)$ и $A(y)$ получаются из нее заменой одних и тех же вхождений индивидной переменной z на x и y соответственно. Если рассматриваемая система, кроме того, содержит правила модус поненс (из A и $A\supset B$ следует B), модализации (из A следует $\Box A$) и закон перестановки антецедентов (из $A\supset(B\supset C)$ следует $B\supset(A\supset C)$), а в качестве $A(z)$ в (2) мы выбираем $\Box(x=z)$, то легко сможем вывести интуитивно неприемлемую формулу

3. $(x = y)\supset\Box(x = y)$.

Теперь, если $\Box$ интерпретируется как необходимость, то (3) утверждает, что всякое истинное тождество необходимо. Другими словами, не существует случайно истинных тождеств, т.е. из того случайного факта, скажем, что число планет совпадает с числом муз, согласно (3), следует необходимость их тождества, хотя число планет, естественно, свободно могло быть отличным от числа муз и даже от девяти. Очевидно, что совпадение этих чисел совершенно случайно.

В литературе утверждение (3) называют «парадоксом утренней звезды» (см. [6]). Планета Венера, самое яркое светило после солнца и луны, уже в древности была известна как вечерняя звезда и утренняя звезда. Парадокс, связанный с (3), заключается в следующем: из того факта, что утренняя звезда в нашем мире совпадает с вечерней звездой, следует, что утренняя звезда совпадает с вечерней звездой в каждом возможном мире. Однако это не соответствует нашему интуитивному пониманию необходимости.

Если исследуемая система содержит законы контрапозиции (из $A\supset B$ следует $\neg B\supset\neg A$), протаскивания отрицания через оператор необходимости ($\neg\Box A\equiv\Diamond\neg A$), навешивания оператора необходимости на стороны импликации (из $A\supset B$ следует $\Box A\supset\Box B$), специфическую аксиому системы Брауэра ($A\supset\Box\Diamond A$) и правило силлогизма (из $A\supset B$ и $B\supset C$ следует $A\supset C$), тогда из (3) легко можно будет вывести другую интуитивно неприемлемую формулу

4. $(x\neq y)\supset\Box(x\neq y)$,

утверждающую, что всякое истинное неравенство необходимо, т.е. не существует случайно истинных неравенств, что, как и (3), не согласуется с нашими интуитивными представлениями о необходимости.

Как видим, формула (3) будет доказуемой в предикатной версии минимальной модальной системы K, расширенной присоединением аксиом тождества (1) и (2), а также во всех охватывающих ее нормальных модальных системах. (4) же будет доказуемой только в предикатных версиях систем Брауэра и S5, расширенных добавлением аксиом тождества (1) и (2). Но в обычных реляционных семантиках для модальных систем, содержащихся в таких версиях системы Брауэра и S5, верным оказывается также формула (4) и поэтому к аксиомам каждой такой системы следует присоединить и формулу (4) (см. [5]).

Крипке объяснял трудность, связанную с (3), следующим образом: формула (3) не покажется парадоксальной, если мы правильно истолкуем смысл тождества. Рассматриваемый объект, в нашем примере число 9, обладающий случайным качеством быть равным числу планет, есть тот же объект, обладающий другим случайным качеством, – быть равным числу муз, но истинность указанного тождества на самом деле необходима, поскольку оно выражает совпадение этого объекта с самим собой (см. [8], а также [5]). В этом же духе можно объяснить приемлемость утверждения (4). Но при эпистемическом толковании знака $\Box$ это объяснение сразу теряет убедительность и утверждения (3) и (4) становится еще более парадоксальными. В самом деле, в таком случае (3) означает, что всякое истинное тождество заведомо известно некоторому лицу. Но знание неким лицом некоторого тождества вряд ли кто-либо сведет к тривиальному совпадению объекта с собой. Например, если переменная x в (3) интерпретируется как человек, называющий себя царевичем Дмитрием, переменная y – как Григорий Отрепьев, а $\Box$ – как знание или вера воеводы Мнишека, то неизбежно придем к парадоксальному заключению. Действительно, из того факта, что человек, называющий себя царевичем Дмитрием, есть Григорий Отрепьев, ни в коем случае не следует будто воевода Мнишек, выдавая свою дочь замуж за него, знал (или хотя бы считал), что его будущий зять – самозванец. Вряд ли удовлетворился бы он осознанием той очевидной логической истины, что этот человек, кто бы он ни был, совпадает с самим собой. Как справедливо подчеркивал Фреге, знание тождества предметов – это знание равенства смыслов их имен (ср. [2]). Итак, если модальный оператор $\Box$ мы интерпретируем эпистемически, т.е. читаем $\Box$ как «некое лицо знает, что …», тогда утверждения (3) и (4) будут выражать особые виды логического всеведения, поскольку они утверждают, что всякое истинное тождество (неравенство) известно некоторому лицу.

Ограничить (2) немодализированной формулой A(x) в духе Куайна (ср. [9]) или требованием, чтобы вхождения переменной x, заменяемые на y, не находились в A(x) в области действия модального оператора (ср.[5]), не является полноценным выходом из затруднения. В предложенной ниже семантике частичных возможных миров легко опровергается (3), так как когда формула $x = y$ истинна в мире w для данных значений x и y, она может быть неопределенной в некотором достижимом (для лица пропозициональной установки знания или веры) частичном мире w. Правда при этом возникают дополнительные осложнения, к рассмотрению которых мы вернемся позже.

Некоторые логики предложили системы первопорядковой предикатной модальной логики (так называемые системы случайного тождества). Но в них возникают такие трудности, для разрешения которых либо надо менять первопорядковую логику предикатов, либо – модальную пропозициональную логику (ср., например, [6], [4], [5]). Они неестественны и с эпистемической точки зрения.

Здесь мы семантически опишем самую слабую эпистемическую систему с тождеством $EpT^{=}$, которая получается присоединением к алфавиту первопорядковой эпистемической системы EpT (см. [1]) нового символа «=», а к аксиомам EpT замыкания всеобщности утверждений (1) и (2).

Эпистемическая предикатная система EpT содержит логические связки: $\neg$, $\wedge$ и $\vee$, модальный оператор знания $\Box$, кванторы: $\forall$ и $\exists$. Остальные связки (как экстенсиональные, так и интенсиональные) вводятся надлежащими определениями. Формулы и атомарные формулы определяются обычно. А для построения формул $EpT^{=}$ дополнительно используются тождества вида x=y, где x и y – любые индивидные переменные.

$EpT^{=}$-фрейм есть упорядоченная четвёрка $Fr=\langle H,W,R,D\rangle$, где H – множество частичных возможных миров, W – множество тотальных возможных миров, такое, что $\varnothing\neq W\subseteq H$, $R\subseteq H\times H$, причём R рефлексивно в H, D – функция областей, определенная на H, такая, что для всякого $v\in H$ $D(v)\neq\varnothing$ и

(d) если $(w,v)\in R$, то $D(w)\subseteq D(v)$, $w,v\in H$.

Пусть Pr – множество n-арных предикатных букв нашего языка. $EpT^{=}$-моделью является пара $M=\langle Fr, V\rangle$, где Fr – $EpT^{=}$-фрейм, а V – двухместная частичная функция, определенная на $Pr\times H$, такая, что если n=0 (т.е. P^n является пропозициональной переменной) и $v\in W$, то $V(P^n,v)=T$ или $\perp$; а если при этом $v\in H\backslash W$, то $V(P^n,v)=T$ или $\perp$ или ни T, ни $\perp$. В первых двух случаях будем говорить, что V определена для P^n,v и писать $!V(P^n,v)$, а в третьем случае будем говорить, что V не определена для P^n,v и писать $non!V(P^n,v)$. Если n>0, то $V(P^n,v)$ есть пара (T_v,F_v), такая, что $T_v,F_v\subseteq[D(v)]^n$, где $[D(v)]^n$ является n-кратным декартовым произведением D(v) на себя, и если $v\in W$, то $T_v\cap F_v=\varnothing$ и $T_v\cup F_v=[D(v)]^n$, а если $v\in H\backslash W$, то $T_v\cap F_v=\varnothing$.

Пусть, далее, $U = \cup_{v\in H} D(v)$. Если задана $EpT^{=}$-модель, то для всякого $v\in H$ мы сможем определить значение любой формулы A при данном сопоставлении элементов U всем свободным индивидным переменным A в случае, когда A опредеделена.

Если A – атомарная формула, она является пропозициональной переменной P^0 или имеет вид $P^n(x_1,\ldots,x_n)$, где n>0, (поскольку '=' – бинарный предикат, атомарной формулой будет и тож-дество вида x=y). При n=0, $V(P^n, v)$ уже задано моделью. Пусть n>0, $v\in W$ и индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ соответственно сопоставлены элементы $a_1,\ldots, a_n$ из U, тогда $V(P^n(x_1, \ldots,x_n), v) = T$ тогда и только тогда, когда $(a_1,\ldots,a_n)\in T_v$. В противном случае $V(P^n(x_1,$

$\dots,x_n),v) = \perp$. Если же $n>0$, $v \in H \backslash W$ и индивидным переменным $x_1,\dots,x_n$ соответственно сопоставлены элементы $a_1,\dots, a_n$ из U, тогда $V(P^n(x_1, \dots,x_n),v) = T$ тогда и только тогда, когда $(a_1,\dots, a_n) \in T_v$; $V(P^n(x_1, \dots,x_n),v) = \perp$ тогда и только тогда, когда $(a_1,\dots,a_n) \in F_v$; а в противном случае non!$V(P^n(x_1, \dots,x_n),v)$.

Условия оценки формул $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\forall yA(y)$ и $\exists yA(y)$ для любого v из W при данном сопоставлении элементов U всем свободным переменным этих формул совпадают с условиями их истинности в классической логике. А если $v \in H \backslash W$, то условия оценки $\neg A$, $A \wedge B$ и $A \vee B$ при данном сопоставлении элементов U всем свободным переменным этих формул совпадают с трехзначными таблицами Лукасевича (с той несущественной разницей, что третьему неопределенному значению Лукасевича в них соответствует отсутствие значения). Далее, пусть $x_1, \dots,x_n$ – все свободные индивидные переменные, входящие в $\forall yA(x_1, \dots,x_n,y)$, и пусть этим переменным соответственно сопоставлены элементы $a_1,\dots, a_n$ из U. В таком случае $V(\forall yA(x_1, \dots,x_n,y),v) = T$ тогда и только тогда, когда $V(A(x_1,\dots,x_n,y),v) = T$, если при сопоставлении $a_1,\dots,a_n$ переменным $x_1,\dots,x_n$ переменной y сопоставляется любой элемент b из D(v); $V(\forall yA(x_1,\dots,x_n,y),v) = \perp$ тогда и только тогда, когда существует элемент b из D(v), такой, что $V(A(x_1,\dots,x_n,y),v) = \perp$ при том же сопоставлении $a_1,\dots,a_n$ переменным $x_1,\dots,x_n$, когда b сопоставляется переменной y; в противном случае non!$V(\forall yA(x_1, \dots,x_n,y),v)$. Оценка формулы $\exists yA(x_1,\dots,x_n,y)$ определяется двойственным образом.

Наконец, при данном сопоставлении элементов U всем свободным индивидным переменным формулы A $V(\Box A,v) = T$ тогда и только тогда, когда $V(A,u) = T$ (и, следовательно, $V(A,u)$ определена) для всякого u из H, такого, что $(v,u) \in R$; в противном случае $V(\Box A,v) = \perp$ (а именно тогда и только тогда, когда при том же сопоставлении элементов U всем свободным переменным A $V(A,u) = \perp$ или non!$V(A,u)$ для некоторого u из H, такого, что $(v,u) \in R$).

Формула A истинна в модели M при заданном сопоставлении элементов U всем свободным переменным A, если A истинна в M для всякого тотального мира w из W; A истинна в $EpT^=$-модели M, если A истинна в M при всяком сопоставлении элементов U всем свободным переменным A.

Аналогично можно определить $Ep4^=$- и $Ep5^=$-модели, предполагая, что в $Ep4^=$-модели отношение R является транзитивным, а в $Ep5^=$-модели – отношением эквивалентности.

Методом модифицированных диаграмм Крипке в [1] доказана семантическая полнота эпистемических систем EpT и Ep4. Для доказательства полноты $EpT^{=}$ и $Ep4^{=}$ к соответствующим правилам построения EpT- и Ep4-таблиц надо присоединить следующее правило тождества: если таблица t содержит тождество вида x=y, то во всякой формуле A таблицы t следует заменить на y каждое не находящееся в области действия эпистемического оператора $\Box$ вхождение индивидной переменной x. А определение явно замкнутой таблицы надо трансформировать следующим образом: будем говорить, что таблица t явно замкнута, если вместе с формулой A она содержит $\neg A$ или A с верхней черточкой, либо она содержит $\neg(x=x)$ или x=x с верхней черточкой. Подобным же способом можно установить и полноту $Ep5^{=}$.

Для иллюстрации вышеописанной семантики построим $EpT^{=}$-модель, опровергающую утверждение (3). Пусть $H=\{w, v\}$; $W=\{w\}$; $R=\{(w,w), (w,v), (v,v)\}$; $D(w)=\{a,b\}$; $D(v)= \{a,b,c\}$; $U=D(w)\cup D(v)=\{a,b,c\}$; $V(=,w) = (T_w,F_w)$, причём $T_w =\{(a,a), (b,b)\}$ и $F_w = \{(a,b), (b,a)\}$. Как видим, $T_w\cap F_w = \varnothing$ и $T_w\cup F_w = [D(w)]^2$. А $V(=,v) = (T_v,F_v)$, где $T_v=\{(a,a), (c,c)\}$, $F_v =\{(a,c), (c,a)\}$ и $T_v\cap F_v= \varnothing$.

Пусть переменным x и y сопоставляется один и тот же элемент b из U. Тогда $V(x=y,w) = T$, поскольку $(b,b)\in T_w$ $(=\{(a,a), (b,b)\})$. Однако non!$V(x=y,v)$, так как $(b,b)\notin T_v$ $(=\{(a,a), (c,c)\})$ и $(b,b)\notin F_v$ $(=\{(a,c), (c,a)\})$. Поэтому $V(\Box(x=y),w) = \perp$ и, следовательно, $V((x=y)\supset\Box(x=y),w) = \perp$. Это означает, что утверждение (3) не общезначимо в классе фреймов $EpT^{=}$.

В нашем примере отношение R является также транзитивным, поэтому утверждение (3) не будет общезначимым и в классе фреймов $Ep4^{=}$. А если вместо R мы рассмотрим R^2, то получим контрмодель для (3) в $Ep5^{=}$. Нетрудно убедиться, что наша модель также опровергает утверждение (4) и, таким образом, устраняет логическое всеведение в форме утверждений (3) и (4)[1].

Однако в принятом нами толковании кванторов оценка кванторной формулы зависит только от области значений связанной переменной в каждом отдельном возможном мире. Это является слабым пунктом выбранного нами толкования кванторов. Дело в том, что в формулах, содержащих свободные переменные, мы им придаем интерпретацию всеобщности. Поэтому при утверждении такой формулы в качестве теоремы всегда подразумевается ее универсальное замыкание. Рассмотрим формулу

[1] Следует заметить, что семантика частичных возможных миров не является единственным способом для опровержения утверждений (3) и (4). Существуют и другие альтернативы. Например, (3) и (4) можно опровергнуть и с помощью семантики невозможных возможных миров (ср., например, [3]). Но с эпистемической точки зрения мы отдаем предпочтение семантике частичных возможных миров.

$$\forall x\Box P(x)\supset\Box P(y),$$

содержащую свободную индивидную переменную y. Ее мы можем опровергнуть с помощью следующей модели.

$H=\{w,v\}$, $W=\{w\}$, свойства R зависят от того, какую модель мы строим – $EpT^{=}$, $Ep4^{=}$ или $Ep5^{=}$. Но в каждой из них R будет содержать (w,w), (w,v) и (v,v). Далее, $D(w)=\{a\}$, $D(v)=\{a,b\}$,

$U=D(w)\cup D(v) = \{a,b\}$. $V(P,w)=(T_w,F_w)$, где $T_w=\{a\}$, а $F_w=\varnothing$, поэто-му $T_w\cap F_w=\varnothing$ и $T_w\cup F_w=[D(w)]$[1]. $V(P,v)=(T_v,F_v)$, где $T_v=\{a\}$, $F_v= \{b\}$и поэтому $T_v\cap F_v=\varnothing$. Оценим формулу (5) для случая, когда ее свободной переменной y сопоставляется элемент b из U. Так как D(w) содержит единственный элемент a, согласно условию оценки для $\forall$, формула $\forall x\Box P(x)$ будет истинной в мире w, если $\Box P(x)$ будет истинной в w, когда переменной x сопоставляется элемент a из D(w). Но так как $T_w=T_v=\{a\}$, для такого сопоставления $V(P(x), w) = T$ и $V(P(x), v) = T$, в силу чего $V(\Box P(x), w) = T$. Следовательно, $V(\forall x\Box P(x), w) = T$. С другой стороны, $V(P(y), v) = \bot$, поскольку $b\in F_v$. Поэтому $V(\Box P(y), w) = \bot$ и, следовательно, $V(\forall x\Box P(x)\supset \Box P(y), w) = \bot$.

Указанная трудность возникает и в нормальных модальных предикатных системах первого порядка (например в T, S4 и S5). Для устранения подобных трудностей из первопорядковых нормальных модальных систем Крипке, следуя Куайну, предложил так сформулировать первопорядковую модальную логику, чтобы в качестве теорем можно было утверждать только формулы с замыканием всеобщности. В самом деле, пропозициональную форму вида A(x), со свободным вхождением x, мы всегда сможем заменить утверждением $\forall xA(x)$. Формулы со свободными индивидными переменными (т.е. пропозициональные формы) следует рассматривать только ради удобства. Поэтому вместо (5), которое, согласно Куайну, не является утверждением, в качестве теоремы следует принять утверждение

5. $\forall y(\forall x\Box P(x)\supset\Box P(y))$,

являющееся общезначимым в классах фреймов вышеуказанных систем. В самом деле, согласно условию оценки для $\forall$, (6) будет неопровержимой, так как все значения переменной y в каждом отдельном мире w будут принадлежать D(w)[2].

---

[2] Это не означает, что интерпретация всеобщности теорем, содержащих свободные индивидные переменные, является единственно возможным способом устранения трудности, связанной с формулами вида (5), из нормальных модальных систем. В частности, $\Box A$ можно понимать как означающее не то, что A истинно во всех возможных мирах, а как означающее, что A не ложна ни в одном возможном мире, но может быть неопределенной в некоторых из них. Такой подход Крипке называет позицией Фреге—Строусона [7]. В [5], например, он

Еще одна трудность в первопорядковых нормальных модальных системах связана с формулой Баркан. Здесь мы ее представим в виде

(7) $\forall x\Box P(x)\supset\Box\forall xP(x)$.

Согласно утверждению (7) из того факта, что все летающие живые существа актуального мира необходимо являются килегрудными птицами, следует необходимость того, что все летающие живые существа являются килегрудными птицами. Но с интуитивной точки зрения антецедент утверждения (7) вовсе не исключает возможности существования в некотором альтернативном мире летающих живых существ, не являющихся килегрудными птицами. Это, однако, опровергает консеквент утверждения (7).

Согласно нашему интуитивному пониманию, необходимым следует считать то, что является истинным не только в актуальном мире, но и во всех возможных по отношению к нему мирах.

Возможный мир интуитивно можно понимать как множество таких объектов, которые имеют разные свойства и находятся между собой в различных отношениях. Поэтому на вопрос, какие миры являются возможными по отношению к актуальному миру, можно дать разные ответы.

Согласно первому самому простому ответу на наш вопрос, можно предположить, что все возможные миры содержат только те объекты, которые имеются в актуальном мире, но эти объекты в разных возможных мирах могут иметь различные свойства и находиться между собой в различных отношениях.

Во-вторых, можно предположить, что объекты возможного мира могут отличаться от объектов актуального мира не только их свойствами и отношениями, но в них могут также появляться новые предметы. При таком толковании функция областей должна удовлетворять условию (d).

Наконец, третий, по мнению Хьюза и Крессвела (ср. [5]), самый либеральный ответ на наш вопрос предполагает, что возможными по отношению к актуальному миру могут быть не только указанные выше миры, но и те, в которых некоторые объекты актуального мира могут отсутствовать, хотя могут появляться и новые. В таком случае, мы должны отвергнуть условие (d).

Если мы соглашаемся с первым ответом, тогда формула Баркан во всех первопорядковых нормальных модальных системах будет общезначимой в соответствующих классах фреймов. При

использован для формулировки нормальных модальных систем без формулы Баркан.

втором ответе на поставленный выше вопрос она будет опровержимой, а ее конверсия, которая имеет вид

6. $\Box\forall xP(x)\supset\forall x\Box P(x)$

– не опровержима. Если же мы примем третий ответ, то, как показал Крипке (см. [7]), даже в S5 будут опровержимы как формула Баркан, так и ее конверсия.

Рассмотрим теперь эпистемические интерпретации формулы Баркан и ее конверсии. Пусть $\Box$ означает «нам известно, что ...». Тогда утверждение (7) гласит: если для всех летающих в актуальном мире живых существ нам известно, что они являются килегрудными птицами, тогда нам известно и то, что все летающие живые существа являются килегрудными птицами. Но это противоречит нашему интуитивному пониманию знания. Хотя конверсия (7), т.е. утверждение (8), полностью соответствует нашей интуиции.

В EpT и, следовательно, в $EpT^{=}$ опровергается утверждение (7), но доказывается его конверсия (8). То же самое верно и для Ep4 и $Ep4^{=}$. А что касается Ep5 и $Ep5^{=}$, если мы потребуем выполнение условия (d), то ввиду симметричности отношения достижимости R в Ep5-фрейме, области индивидов во всех возможных мирах будут одинаковыми, и как (7), так (8) окажутся верными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бежанишвили М.* Об эпистемической модальной логике предикатов // Семантический анализ неклассической логики. Тбилиси: Мецниереба, 1991. С.80-103.
2. *Frege G.* Über Sinn und Bedeutung // Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik. 1892. Bd. 100. S. 25-50.
3. *Hintikka J.* Impossible possible worlds vindicated // Game-Theoretical Semantics (ed. Saarinen E.). Dordrecht: D.Reidel Publishing Company, 1978. P.367-379.
4. *Hintikka J.* Modality and quantification // Theoria. 1961. Vol. 27. P.110-128.
5. *Hughes G., Cresswell M.* A New Introduction to Modal Logic. London and New York: Routledge, 1996.
6. *Kanger S.* The morning star paradox // Theoria. 1957. Vol. 23. P. 1-11.
7. *Kripke S.* Semantical considerations on modal logic // Acta Philosophica Fennica, Fasc. 1963. Vol. XVI. P. 3-94.
8. *Kripke S.* Naming and Necessity. Cambridge: Harvard University Press, 1972.
9. *Quine W.V.* Reference and modality // From a Logical Point of View. Cambridge: Harvard University Press, 1953.