Д.В.Зайцев

ТЕОРИЯ РЕЛЕВАНТНОГО СЛЕДОВАНИЯ III: КОМБИНАТОРНАЯ СЕМАНТИКА TE

Abstract. *In [1] and [2] the background for pure theory of relevant entailment was built: ideological considerations were axiomatized and supplied with algebraic semantics. In this paper I will prove the adequacy for both relational and combinatory semantics of* ***TE****.*

I

Напомним, что представляет собой алгебраическая структура **TE**. Это группоид: $<\mathbf{D}, \cap, \cup, \neg, {}^\circ>$, где

1. $<\mathbf{D}, \cap, \cup, \neg>$ – решетка ДеМоргана;
2. $\mathbf{a^\circ(b\cup c)=(a^\circ b)\cup(a^\circ c)}$ – решеточная упорядоченность;
3. $\mathbf{a^\circ b\leq c \Leftrightarrow a\leq b\rightarrow c}$ – резидуальность;
4. свойства $^\circ$:
4.1. $\mathbf{a^\circ a=a;}$
4.2. $\mathbf{(a^\circ b)^\circ c \leq a^\circ(b^\circ c);}$
4.3. $\mathbf{(a^\circ b)^\circ c \leq b^\circ(a^\circ c);}$
4.4. $\mathbf{a^\circ b \leq (a^\circ b)^\circ b;}$
5. $\mathbf{a^\circ b\leq c \Leftrightarrow a^\circ\neg c\leq\neg b \Leftrightarrow b^\circ\neg c\leq\neg a}$.

Реляционная модель **TE** – это четверка $\mathrm{R}=<\mathbf{K}, \mathbf{R}, *, \models>$, где $\mathbf{K}\neq\varnothing$, $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{K}^3$, $*: \mathbf{K}\rightarrow\mathbf{K}$, $\models\subseteq\mathbf{K}\times\{A\}$.

Определения:

Df.1. $\mathbf{R^2abcd}$ *iff* $\exists\mathbf{x}$ ($\mathbf{Rabx}$ и $\mathbf{Rxcd}$)

Df.2. $\mathbf{R^2a(bc)d}$ *iff* $\exists\mathbf{x}$ ($\mathbf{Raxd}$ и $\mathbf{Rbcx}$).

Модель на основе приведенных определений удовлетворяет семантическим постулатам:

r.1. $\mathbf{Raaa;}$

r.2. $\mathbf{Rabc}\Rightarrow \mathbf{R^2abbc}$;

r.3. $\mathbf{R^2abcd} \Rightarrow \mathbf{R^2a(bc)d}$;

r.4. $\mathbf{R^2abcd} \Rightarrow \mathbf{R^2b(ac)d}$;

r.5. $\mathbf{Rabc} \Rightarrow \mathbf{Rac^*b^*}$;

r.6. $\mathbf{a^{**}=a.}$

Условия истинности формул:

($\neg$) $\mathbf{a}\models\neg A \Leftrightarrow$ неверно, что $\mathbf{a^*}\models A;$

(&) $\mathbf{a}\models A\&B \Leftrightarrow \mathbf{a}\models A$ и $\mathbf{a}\models B;$

(v) $\mathbf{a}\models A\vee B \Leftrightarrow \mathbf{a}\models A$ или $\mathbf{a}\models B;$

($\rightarrow$) $\mathbf{a}\models A\rightarrow B \Leftrightarrow \forall\mathbf{b,c}\in\mathbf{K}$ (($\mathbf{Rabc}$ и $\mathbf{b}\models A$) $\Rightarrow \mathbf{c}\models B$).

Формула $\boldsymbol{A \to B}$ истинна в модели R (R $\models \boldsymbol{A \to B}$) *iff* из $\boldsymbol{A}$ следует $\boldsymbol{B}$ *iff* $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{K}(\mathbf{a} \models \boldsymbol{A} \Rightarrow \mathbf{a} \models \boldsymbol{B})$.

Формула $\boldsymbol{A}$ общезначима *iff* $\boldsymbol{A}$ истинна во всякой модели ($\forall$R R $\models \boldsymbol{A}$).

II

Адекватность построенной семантики продемонстрировать достаточно легко. Непротиворечивость получается тривиальным способом. Метод доказательства полноты также представляет собой комбинацию доказательства для первоуровневой релевантной логики с доказательством той же метатеоремы для системы **T**.

Схема рассуждений достаточно стандартна для генкиновского доказательства. Допустив общезначимость произвольной импликативной формулы $\models \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ и недоказуемость ($\dashv$)[1] формулы $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$, получаем из второго допущения $\boldsymbol{C} \dashv \boldsymbol{D}$. Для перехода к следующему шагу в рассуждениях требуется так называемая **Лемма расширения** (аналог Леммы Линденбаума), позволяющая утверждать, что одноэлементное множество $\{\boldsymbol{C}\}$ может быть расширено до такого множества **a**, что $\boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{D} \notin \mathbf{a}$. Теперь достаточно задать каноническую оценку в терминах принадлежности: $\boldsymbol{C} \in \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{a} \models_c \boldsymbol{C}$, чтобы перейти к утверждению $\exists$ **a** ($\mathbf{a} \models_c \boldsymbol{C}$ & $\mathbf{a} \Dashv_c \boldsymbol{D}$). (Для обоснования этого перехода потребуется **Лемма о существовании канонической модели**.) Таким образом, $\boldsymbol{C} \Dashv \boldsymbol{D}$, что противоречит второму допущению. Следовательно, если произвольная импликативная формула общезначима в редуцированной реляционной семантике системы **TE**, то она **TE**-доказуема.

Итак, пусть **a** – **TE**-теория, если и только если это множество замкнуто относительно **m.p.** и $\&_в$. **TE**-теория является простой, если выполняется следующее условие: $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \in \mathbf{a} \Rightarrow \boldsymbol{A} \in \mathbf{a}$ или $\boldsymbol{B} \in \mathbf{a}$. Сформулируем важную для релевантной логики **Лемму расширения**:

Если $\boldsymbol{C} \dashv \boldsymbol{D}$*, то существует такая простая теория* **a**, *что* $\boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$ *и* $\boldsymbol{D} \notin \mathbf{a}$.

Прежде чем определить, что значит “формула не выводима из множества формул”, потребуется дать определение отношения выводимости.

Пусть $\boldsymbol{A_1},..., \boldsymbol{A_n}$ формулы, принадлежащие множеству Δ, а $\boldsymbol{B_1},..., \boldsymbol{B_m}$ формулы из множества Γ. Тогда имеет место $\Delta \vdash \Gamma$, если и только если существуют $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2},..., \boldsymbol{A_m}$ из Δ и $\boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2},..., \boldsymbol{B_j}$ из Γ

[1] Далее вместо “невыводимо” будет использоваться знак обратной выводимости “$\dashv$”.

такие, что $\boldsymbol{A}_1\&...\&\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}} \vdash \boldsymbol{B}_1$v...v$\boldsymbol{B}_{\mathrm{j}}$. Для случая, когда Γ одноэлементное множество $\{\boldsymbol{D}\}$, будет верно: если $\Delta \vdash \Gamma$, то $\Delta \vdash \boldsymbol{D}$.

Пусть $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{A}_1$,..., $\boldsymbol{A}_{\mathrm{k}}$ – список формул языка TE. Поскольку Δ может быть любым, в том числе и бесконечным, придется рассмотреть последовательность множеств Δ_0, Δ_1,..., Δ_{k}. Дадим индуктивное определение.

d.0. Пусть $\Delta_0 \dashv \Gamma_0$, и $\Delta_0 = \Delta$ и $\Gamma_0=\{B\}$. Определим $\Delta_{\mathrm{n+1}}$ и $\Gamma_{\mathrm{n+1}}$ через Δ_{n} и Γ_{n}:

d.1. Если $\Delta_{\mathrm{n}} \cup \{\boldsymbol{A}_{\mathrm{n+1}}\} \vdash \Gamma_{\mathrm{n}}$, то $\Delta_{\mathrm{n+1}} = \Delta_{\mathrm{n}}$ и $\Gamma_{\mathrm{n+1}}=\Gamma_{\mathrm{n}} \cup\{\boldsymbol{A}_{\mathrm{n+1}}\}$. То есть $\boldsymbol{A}_{\mathrm{n+1}}$ отвергается.

d.2. Если $\Delta_{\mathrm{n}} \Box \{\boldsymbol{A}_{\mathrm{n+1}}\} \dashv \Gamma_{\mathrm{n}}$, то $\Delta_{\mathrm{n+1}} = \Delta_{\mathrm{n}} \cup\{\boldsymbol{A}_{\mathrm{n+1}}\}$ и $\Gamma_{\mathrm{n+1}}=\Gamma_{\mathrm{n}}$. То есть $\boldsymbol{A}_{\mathrm{n+1}}$ принимается.

d.3. $\mathbf{a} = \cup_{\mathrm{n<w}} \Delta_{\mathrm{n}}$ и $\mathbf{d}=\cup_{\mathrm{n<w}} \Gamma_{\mathrm{n}}$.

Таким образом, все формулы из **d** не выводимы из **a**. Представляется правомерной интуитивная трактовка, согласно которой **a** содержит все формулы, оцениваемые как истинные (приемлемые), а **d** – ложные (отбрасываемые) формулы. Итак, построена теория **a** такая, что выполняется $\Delta \subseteq \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{D} \in \mathbf{d}$. Остается показать, что **a** обладает всеми указанными в лемме чертами.

1. Покажем, что $\mathbf{a} \dashv \mathbf{d}$.

Допустим противное. Это означает, что

(1) существует n>0 и $\Delta_{\mathrm{n}} \vdash \Gamma_{\mathrm{n}}$, но при этом по определению вывода $\Delta_{\mathrm{i-1}} \dashv \Gamma_{\mathrm{i-1}}$.

(2) пусть $\boldsymbol{A}_{\mathrm{n}}$ отброшена и n=i. – допущение

(3) $\Delta_{\mathrm{i-1}} \cup \{\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}\} \vdash \Gamma_{\mathrm{i-1}}$ –- по d.1. из (2)

(4) $\Delta_{\mathrm{i}} = \Delta_{\mathrm{i-1}}$ и $\Gamma_{\mathrm{i}} = \Gamma_{\mathrm{i-1}} \cup\{\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}\}$ – по d.1. из (3)

(5) $\Delta_{\mathrm{i}} \vdash \Gamma_{\mathrm{i}}$ – из (1), (2)

(6) $\Delta_{\mathrm{i-1}} \vdash \Gamma_{\mathrm{i-1}} \cup \{\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}\}$ – из 5, 6

(7) существует конъюнкция $\boldsymbol{B}_1$ и дизъюнкция $\boldsymbol{C}_1$ из элементнов $\Delta_{\mathrm{i-1}}$ и $\Gamma_{\mathrm{i-1}}$ соответственно такие, что $\boldsymbol{B}_1\&\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}} \vdash \boldsymbol{C}_1$. – из 3 по опр. выводимости

(8) $\boldsymbol{B}_1 \vdash \boldsymbol{C}_1v\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}$ – из (6), (4) по опр. выводимости

(9) $\boldsymbol{B}_1 \vdash \boldsymbol{C}_1$ – из (7), (8) на основании выводимости FDE

(10) $\Delta_{\mathrm{i-1}} \vdash \Gamma_{\mathrm{i-1}}$ – из (9) по опр. выводимости

(11) поскольку (10) противоречит (1), следовательно, не верно доп. (2), таким образом,

(12) $\boldsymbol{A}_{\mathrm{n}}$ должно быть принято и n=i

(13) $\Delta_{\mathrm{i-1}} \cup\{\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}\} \dashv \Gamma_{\mathrm{i-1}}$ – из (12) по d.2.

(14) $\Delta_{\mathrm{i}} = \Delta_{\mathrm{i-1}} \cup \{\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}\}$ и $\Gamma_{\mathrm{i}} = \Gamma_{\mathrm{i-1}}$ – из (13) по d.2.

(15) Но, так как $\Delta_{\mathrm{i}} \vdash \Gamma_{\mathrm{i}}$, имеет место $\Delta_{\mathrm{i-1}} \cup \{\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}\} \vdash \Gamma_{\mathrm{i-1}}$, что противоречит (13).

Следовательно, обе возможности рассмотрены и доказано, что $\mathbf{a} \dashv \mathbf{d}$.

2. По построению вывода всякая формула принадлежит **a** или **d**. Если предположить противное, допустив существование некоторой формулы общей для **a** и **d**, то сразу же получаем $\mathbf{a} \vdash \mathbf{d}$, что противоречит 1.

3. $\Delta \subseteq \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbf{d}$. Следовательно, по 2 $\boldsymbol{B} \notin$ а.

Теперь покажем, что **a** – простая (6) теория (4, 5).

4. Пусть $\boldsymbol{F} \subseteq \mathbf{a}$ и $\vdash \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{D}$. Тогда $\mathbf{a} \vdash \boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{D} \in \mathbf{a}$. Ибо в противном случае если $\boldsymbol{D} \in \mathbf{d}$, то $\mathbf{a} \vdash \mathbf{d}$, что противоречит 1. Следовательно, **a** замкнута относительно $\to$.

5. Пусть $\boldsymbol{B} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$, но при этом $\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C} \notin \mathbf{a}$. Тогда $\boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C} \in \mathbf{d}$ и, поскольку $\boldsymbol{B}$, С $\vdash \boldsymbol{B} \& \boldsymbol{C}$, имеет место $\mathbf{a} \vdash \mathbf{d}$, что опять противоречит 1. Таким образом, **a** замкнуто относительно введения конъюнкции.

6. Пусть $\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$, но $\boldsymbol{B} \notin \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{C} \notin \mathbf{a}$. Тогда $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ $\square$**d**. Следовательно, $\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \vdash \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}$, то есть $\mathbf{a} \vdash \mathbf{d}$, что уже в который раз противоречит 1. Таким образом, а – простая.

Этим завершается доказательство Леммы расширения.

Каноническая модельная структура $\mathrm{R}_{\mathbf{c}}$ – это тройка $<\mathbf{K}_{\mathbf{c}}, \mathbf{R}_{\mathbf{c}}, *_{\mathbf{c}}>$, где $\mathrm{K}_{\mathbf{c}}$ -непустое множество простых **TE**-теорий, $\mathbf{R}_{\mathbf{c}}\mathbf{abc} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{A} \forall \boldsymbol{B}$ $((\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{A} \in \mathbf{b}) \Rightarrow \boldsymbol{B} \in \mathbf{c}$, а $*_{\mathbf{c}}$ определяется следующим образом: $\mathbf{a}*_{\mathbf{c}} = \{\boldsymbol{A}: \neg \boldsymbol{A} \notin \mathbf{a}\}$.

Покажем, что имеет место **Утверждение I**

Каноническая модельная структура R_c есть действительно редуцированная реляционная модельная структура ***TE***.

Рассмотрим семантические постулаты, которым $\mathrm{R}_{\mathbf{c}}$ должна удовлетворять.

$\Rightarrow$ r1. Пусть $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{A} \in \mathbf{a}$, по свойству замкнутости теорий относительно введения конъюнкции, это означает, что $\boldsymbol{A} \,\&\, (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \in \mathbf{a}$. Поскольку формула $(\boldsymbol{A} \,\&\, (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})) \to \boldsymbol{B}$ – является теоремой **TE**, по свойству теорий быть замкнутыми относительно **m.p.** будет иметь место $\boldsymbol{B} \in \mathbf{a}$ и, следовательно, $\mathbf{R}_{\mathbf{c}}\mathbf{aaa}$.

$\Rightarrow$ r.2. Пусть $\mathbf{R}_{\mathbf{c}}\mathbf{abc}$. Требуется показать, что существует простая теория **x**, что $\mathbf{R}_{\mathbf{c}}\mathbf{abx}$ и $\mathbf{R}_{\mathbf{c}}\mathbf{xbc}$.

Для начала необходимо продемонстрировать, что можно построить такое множество **x**, которое будет удовлетворять определению простой теории. Итак, пусть $\mathbf{x} = \{\boldsymbol{C}: \exists \boldsymbol{B}\ (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbf{b})$. Покажем, что это теория. Пусть $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2 \in \mathbf{x}$. Тогда $\exists \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ $(\boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{C}_1 \in \mathbf{a}, \boldsymbol{B}_2 \to \boldsymbol{C}_2 \in \mathbf{a}, \boldsymbol{B}_1 \in \mathbf{b}$ и $\boldsymbol{B}_2 \in \mathbf{b}$. Поскольку формула $((\boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{C}_1)\&(\boldsymbol{B}_2 \to \boldsymbol{C}_2)) \to ((\boldsymbol{B}_1 \& \boldsymbol{B}_2) \to (\boldsymbol{C}_1 \& \boldsymbol{C}_2))$ является теоремой **TE**, а **a** – теория (то есть замкнутая относительно $\&_{\text{в}}$ и **m.p.**), $(\boldsymbol{B}_1 \& \boldsymbol{B}_2) \to (\boldsymbol{C}_1 \& \boldsymbol{C}_2) \in \mathbf{a}$. По определению **x** и на основании того, что **b** – теория, аналогичным образом получаем $\boldsymbol{C}_1 \& \boldsymbol{C}_2 \in \mathbf{x}$. Пусть теперь

$\boldsymbol{C_1} \in \mathbf{x}$ и $\vdash \boldsymbol{C_1} \to \boldsymbol{C_2}$. Тогда $\exists \boldsymbol{B_1}$ ($\boldsymbol{B_1} \to \boldsymbol{C_1} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{B_1} \in \mathbf{b}$. Поскольку $\vdash(\boldsymbol{B_1} \to \boldsymbol{C_1}) \to (\boldsymbol{B_1} \to \boldsymbol{C_2}))$, будет иметь место $\boldsymbol{B_1} \to \boldsymbol{C_2} \in \mathbf{a}$. В свою очередь, так как $\boldsymbol{B_1} \in \mathbf{b}$ и по определению **x**, имеет место $\boldsymbol{C_2} \in \mathbf{x}$. Таким образом, **x** – теория.

Для демонстрации того, что **x** – простая теория, требуется доказать специальную **Лемму простоты** (**Priming Lemma**). Доказательство которой в свою очередь опирается на **Лемму расширения** или **Лемму Цорна**. Это стандартный момент в обеспечении семантической полноты для релевантных логик. Поэтому здесь достаточно ограничиться только формулировками.

Итак, **Лемма Цорна** гласит, что *любое непустое частично-упорядоченное множество, в котором каждая цепь имеет верхнюю границу, содержит максимальный элемент*.

Используя это утверждение, легко получить доказательство **Леммы простоты.** *Пусть* ***a'*** *и* ***x'*** *некоторые теории, и* ***d*** *- простая теория. Тогда, если имеет место* ***Ra'x'd****, то существует простая теория* ***x****, для которой верно* $\mathbf{x}' \subseteq \mathbf{x}$ *и* ***Ra'xd***.

Теперь можно продемонстрировать, что будут иметь место $\mathbf{R_c abx}$ и $\mathbf{R_c xbc}$. $\mathbf{R_c abx}$ получается непосредственно из определения **x**. Для $\mathbf{R_c xbc}$ допустим, что $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \in \mathbf{x}$ и $\boldsymbol{A} \in \mathbf{b}$. По определению **x** найдется такая формула $\boldsymbol{A}$, что $\boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{A} \in \mathbf{b}$. По аксиоме сокращения и замкнутости **a** относительно **m.p.** получаем $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \in \mathbf{a}$. Наконец, поскольку имеет место **Rabc**, постольку ($\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{A} \in \mathbf{b}$) $\Rightarrow \boldsymbol{B} \in \mathbf{c}$. Два раза применяя исключение импликации, получаем $\boldsymbol{B} \in \mathbf{c}$, что и завершает доказательство.

Для постулатов r.3 и r.4 доказательство строится аналогичным, весьма изощренным, но тем не менее – благодаря многочисленным исследованиям в области релевантной логики – уже рутинным способом. При этом используются аксиомы суффиксной и префиксной транзитивности.

Два последних постулата нужны для верификации негативных аксиом. Случай с r.6 тривиален и не отличается от аналогичного момента в доказательстве полноты для первоуровневой релевантной логики. В качестве иллюстрации рассмотрим r.5.

$\Rightarrow$ r.5. Дано $\mathbf{R_c abc}$, то есть ($\neg \boldsymbol{B} \to \neg \boldsymbol{A} \in \mathbf{a}$ и $\neg \boldsymbol{B} \in \mathbf{b}$) $\Rightarrow \neg \boldsymbol{A} \in \mathbf{c}$. Пусть $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \in \mathbf{a}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbf{c}^*$ и $\boldsymbol{B} \notin \mathbf{b}^*_{\mathbf{c}}$. Из первого допущения по теореме классической контрапозиции и на основании простоты **a** получаем $\neg \boldsymbol{B} \to \neg \boldsymbol{A} \in \mathbf{a}$. Допущение $\boldsymbol{B} \notin \mathbf{b}^*_{\mathbf{c}}$ равносильно $\neg \boldsymbol{B} \in \mathbf{b}$. Все это вместе с определением $\mathbf{R_c abc}$ дает $\neg \boldsymbol{A} \in \mathbf{c}$, то есть – $\boldsymbol{A} \notin \mathbf{c}^*_{\mathbf{c}}$, что противоречит третьему допущению. Следовательно, $\mathbf{R_c a c^*_c b^*_c}$.

Это завершает доказательства утверждения о том, что каноническая модельная структура R_c есть действительно редуцированная реляционная модельная структура **TE**.

Следующий шаг в доказательстве семантической полноты состоит в демонстрации **Утверждения II** о том,

что *каноническая модель, оценка на которой задана в терминах принадлежности формул простым теориям, есть действительно редуцированная реляционная модель* ***TE***.

Определим $\models_c$ для произвольной формулы следующим образом: $\mathbf{a} \models_c \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \in \mathbf{a}$. Доказательство утверждения сводится к доказательству **Леммы о существовании канонической модели**.

В свою очередь, доказательство леммы ведется методом возвратной индукции по количеству связок в формуле $\boldsymbol{A}$. Большинство случаев тривиально и не отличается от аналогичных для первоуровневой логики. Рассмотрим лишь ситуацию, когда $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$. Требуется продемонстрировать, что $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a} \Leftrightarrow \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ $((\mathbf{R_c abc}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbf{b}) \Rightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbf{c})$.

$\Rightarrow$: Пусть $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$, $\mathbf{R_c abc}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbf{b}$. По определению канонического отношения достижимости ($\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbf{b}) \Rightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbf{c}$. Следовательно, $\boldsymbol{C} \in \mathbf{c}$.

$\Leftarrow$: Допустим, что $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$ $((\mathbf{R_c abc}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbf{b}) \Rightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbf{c})$. Выберем такие $\mathbf{b}^+$ и $\mathbf{c}^+$, чтобы утверждение о $\boldsymbol{C} \in \mathbf{c}$ давало искомое заключение $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$. Пусть $\mathbf{b}^+ = \{\boldsymbol{D} : \vdash \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{D}\}$, а $\mathbf{c}^+ = \{\boldsymbol{C} : \exists \boldsymbol{D}\ (\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{D} \in \mathbf{b}^+\}$. Снимем кванторы по $\mathbf{b}^+$ и $\mathbf{c}^+$. Тогда имеем $\mathbf{R_c a b^+ c^+}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbf{b}^+) \Rightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbf{c}^+$**.** При этом по определению $\mathbf{c}^+$ будет иметь место не только $\boldsymbol{B} \in \mathbf{b}^+$, но и $(\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{B} \in \mathbf{b}^+) \Rightarrow \boldsymbol{C} \in \mathbf{c}^+$, то есть $\mathbf{R_c a b^+ c^+}$. Применив **m.p.**, получаем $C \in c^+$. Но по определению $\mathbf{b}^+$ и $\mathbf{c}^+$ будет также верно $\boldsymbol{B_1} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$ и $\vdash \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_1$. По аксиоме транзитивности и **m.p.** получаем $\vdash (\boldsymbol{B_1} \to \boldsymbol{C}) \to (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$. Поскольку $\mathbf{a}$ – теория, то $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$, что и требовалось получить. Свойство быть простыми теориями для $\mathbf{b}^+$ и $\mathbf{c}^+$ является следствием леммы расширения, о которой шла речь выше. Этим завершается доказательство леммы и, следовательно, утверждения II.

Теперь вернемся к нашему исходному предположению. Пусть $\boldsymbol{C} \dashv \boldsymbol{D}$, то есть $\dashv \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$. Тогда по Лемме расширения существует такая простая теория $\mathbf{a}$, что $\boldsymbol{C} \in \mathbf{a}$ и $\boldsymbol{D} \notin \mathbf{a}$. По Лемме о существовании канонической модели это означает, что $\exists$ $\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \models_c \boldsymbol{C}$ & $\mathbf{a} \,{=}\!\!\!\mid_c \boldsymbol{D})$. Таким образом, $\,{=}\!\!\!\mid \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$, что противоречит допущению. Следовательно, $\forall \boldsymbol{A}^{\to}(\ \mathbf{TE} \models \boldsymbol{A}^{\to} \Rightarrow \mathbf{TE} \vdash \boldsymbol{A}^{\to})$.

III

Комбинаторная семантика **TE** строится по аналогичному принципу. Модель $\boldsymbol{C} = \langle \boldsymbol{K}, \bullet, \#, \Vdash \rangle$, где $\boldsymbol{K} \neq \varnothing$, $\#: \boldsymbol{K} \to \boldsymbol{K}$, $\Vdash \subseteq \boldsymbol{K} \times \{\boldsymbol{A}\}$, а $\bullet$ – бинарная операция на $\boldsymbol{K}$.

Принимаются следующие определения:

DF.1. $(\alpha\bullet\beta)\bullet\gamma=\delta$ *iff* $\exists\theta(\alpha\bullet\beta=\theta$ и $\theta\bullet\gamma=\delta)$

DF.2. $\alpha\bullet(\beta\bullet\gamma)=\delta$ *iff* $\exists\theta(\alpha\bullet\theta=\delta$ и $\gamma\bullet\beta=\theta)$.

Семантические постулаты, которым удовлетворяет $\boldsymbol{C}$, следующие:

c.1. $\alpha\bullet\alpha=\alpha$;
c.2. $\alpha\bullet\beta=\gamma \Rightarrow (\alpha\bullet\beta)\bullet\beta=\gamma$;
c.3. $(\alpha\bullet\beta)\bullet\gamma=\delta \Rightarrow \alpha\bullet(\beta\bullet\gamma)=\delta$;
c.4. $(\alpha\bullet\beta)\bullet\gamma=\delta \Rightarrow \beta\bullet(\alpha\bullet\gamma)=\delta$;
c.5. $\alpha\bullet\beta=\gamma \Rightarrow \alpha\bullet\gamma^{\#}=\beta^{\#}$;
c.6. $\alpha^{\#\#}=\alpha$.[2]

Условия истинности формул:

(¬) $\alpha \Vdash \neg A \Leftrightarrow$ неверно, что $\alpha^{*} \models A$;
(&) $\alpha \Vdash A\&B \Leftrightarrow \alpha \models A$ и $\alpha \models B$;
(v) $\alpha \Vdash A \vee B \Leftrightarrow \alpha \models A$ или $\alpha \models B$;
(→) $\alpha \Vdash A \to B \Leftrightarrow \forall\beta,\gamma\in \boldsymbol{K}\ ((\alpha\beta=\gamma$ и $\beta \Vdash A) \Rightarrow \gamma \Vdash B)$.

Формула $A \to B$ истинна в модели $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C} \Vdash A \to B$) *iff* из A следует B *iff* $\forall\alpha\in \boldsymbol{K}(\alpha \Vdash A \Rightarrow \alpha \Vdash B)$.

Формула A общезначима *iff* A истинна во всякой модели ($\forall \boldsymbol{C}\ \boldsymbol{C} \Vdash A$).

Покажем, что комбинаторная семантика адекватна системе **TE**. Поскольку условия приписывания значений и постулаты для отрицания в обеих (реляционной и комбинаторной) семантиках одинаковы, рассмотрим только семантики позитивного фрагмента **TE**. Для доказательства семантической адекватности комбинаторной семантики покажем, что множество общезначимых в ней формул совпадает с множеством формул, общезначимых в реляционной семантике. Для этого необходимо доказать следующую теорему:

МТ 1. $\forall A\ (\forall \boldsymbol{C}^{+}\ \boldsymbol{C}^{+} \Vdash A \Leftrightarrow \forall R^{+}\ R^{+} \models A)$, где $\boldsymbol{C}^{+}$(R^{+}) есть позитивная модель.

ЛЕММА 1. $\forall A\ \forall R^{+} \exists\ \boldsymbol{C}^{+}\ (\boldsymbol{C}^{+} \Vdash A \Rightarrow R^{+} \models A)$

Доказательство.

I. Покажем, что по каждой реляционной модели можно построить комбинаторную.

[2] Далее будем писать **ab** вместо **a**$\bullet$**b**

Пусть <**K, R,** $\models$> **–** позитивная реляционная модель. Зададим операцию $\bullet$ на подмножествах **K**: $\boldsymbol{\alpha\bullet\beta}$**={c:** $\exists$**a**$\in\alpha\exists$**b**$\in\beta$ **Rabc}**, где α, $\beta\subseteq$ **K**. Пусть теперь ***K*** **–** множество таких подмножеств **K**, что $\forall\alpha\in\boldsymbol{K}$ $\forall\beta\in\boldsymbol{K}$ $\exists\gamma\in\boldsymbol{K}$ $\alpha\beta=\gamma$.

Покажем, что получившаяся пара <**K,** $\bullet$> действительно есть комбинаторная модельная структура.

Множество **K** не пусто в силу **r.1. Raaa.** Это означает, что даже в вырожденном случае, когда **K**={**a**}, **K**=**K**.

Операция $\bullet$ является всюду определенной и однозначной на множестве **K** по условию задания множества **K**.

Пара <**K,** $\bullet$> удовлетворяет постулатам **c.1.- c.4.**

c.1. По **r.1.** и определению $\bullet$ $\alpha\,\alpha=\alpha$.

c.2. $\alpha\,\beta=\gamma$

$\Rightarrow$ γ**={c:** $\exists$**a**$\in\alpha$ $\exists$**b**$\in\beta$ **Rabc}** [по опр. $\bullet$]

$\Rightarrow$ γ**={c:** $\exists$**a**$\in\alpha$ $\exists$**b**$\in\beta$ $\exists$**x**$\in\theta$ (**Rabx** и **Rxbc**)**}** [по **r.2.** и **Df.1.**]

$\Rightarrow$ γ**={c:** $\exists$**x**$\in\theta$ $\exists$**b**$\in\beta$ **Rxbc}** и θ**={x:** $\exists$**a**$\in\alpha$ $\exists$**b**$\in\beta$ **Rabx}** [по опр. $\bullet$ и усл. ист. &]

$\Rightarrow$ $\gamma=\theta\beta$ и $\theta=\alpha\beta$ [по опр. $\bullet$]

$\Rightarrow$ $(\alpha\beta)\,\beta=\gamma$ [по **DF.1.**]

Аналогично доказываются и остальные постулаты. Таким образом, пара <**K,** $\bullet$> действительно есть комбинаторная модельная структура.

Зададим отношение $\Vdash\subseteq\boldsymbol{K}$ x{***A***} стандартным образом.

Условия истинности формул:

(&) $\alpha\Vdash$***A*&*B*** $\Leftrightarrow$ $\alpha\models$***A*** и $\alpha\models$***B*;**

(v) $\alpha\Vdash$***A*v*B*** $\Leftrightarrow$ $\alpha\models$***A*** или $\alpha\models$***B*;**

($\rightarrow$**)** $\alpha\Vdash$***A***$\rightarrow$***B*** $\Leftrightarrow$ $\forall\beta,\gamma\in$**K** (($\alpha\beta=\gamma$ и $\beta\Vdash$***A***) $\Rightarrow$ $\gamma\Vdash$***B***).

Формула ***A***$\rightarrow$***B*** истинна в модели ***C*** (***C*** $\Vdash$***A***$\rightarrow$***B***) *iff* из ***A*** следует ***B*** *iff* $\forall\alpha\in\boldsymbol{K}$ ($\alpha\Vdash$***A*** $\Rightarrow$ $\alpha\Vdash$***B***).

II. Теперь требуется показать, что $\boldsymbol{C}^{+}\Vdash$ ***A***$\rightarrow$***B*** $\Rightarrow$ $R^{+}\models$ ***A***$\rightarrow$***B***.

Пусть $\boldsymbol{C}^{+}\Vdash$ ***A***$\rightarrow$***B***, то есть $\forall\alpha\in\boldsymbol{K}$ ($\alpha\Vdash$***A*** $\Rightarrow$ $\alpha\Vdash$***B***), но не верно, что $R^{+}\models$ ***A***$\rightarrow$***B***. Последнее $\exists$**a**$\in$**K** (**a**$\models$***A*** & **a** $\dashv$***B***)[3]. Для исключения импликации и получения противоречия необходимо, во-первых, **a**$\models$***A*** $\Rightarrow$ $\alpha\Vdash$***A***, а во-вторых, $\alpha\Vdash$***B*** $\Rightarrow$ **a**$\models$***B***, то есть надо доказать

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $\forall$***A*** ($\alpha\Vdash$***A*** $\Leftrightarrow$ **a**$\models$***A***).

Докажем это утверждение методом возвратной математической индукции по числу связок в формуле ***A*.**

1. Пусть ***A*** есть ***B***&***C***.

1.1.

+1. $\alpha\Vdash$***B***&***C***

---

[3] Çäåñü è äàëåå çàïèñü **a** $\dashv$ ***B*** îçíà÷àåò “íå âåðíî, ÷òî **a**$\models$***B***“.

2. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B}$ и $\alpha \Vdash \boldsymbol{C}$ [по усл. ист.]
3. $\mathbf{a} \vDash \boldsymbol{B}$ и $\mathbf{a} \vDash \boldsymbol{C}$ [по инд. доп.]
4. $\mathbf{a} \vDash \boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C}$ [по усл. ист.]

1.2.
+1. $\mathbf{a} \vDash \boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C}$
2. $\mathbf{a} \vDash \boldsymbol{B}$ и $\mathbf{a} \vDash \boldsymbol{C}$ [по усл. ист.]
3. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B}$ и $\alpha \Vdash \boldsymbol{C}$ [по инд. доп.]
4. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B}\&\boldsymbol{C}$ [по усл. ист.]

Аналогично для случая (2), когда $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C}$.

3. Пусть $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$.
3.1.
+1. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$
+2. $\mathbf{Rabc}$ & $\mathbf{b} \vDash \boldsymbol{B}$
3. $\forall\beta,\gamma\in \boldsymbol{K}$ $((\alpha\beta=\gamma$ и $\beta \Vdash \boldsymbol{B}) \Rightarrow \gamma \Vdash \boldsymbol{C})$ [по усл. ист. из 1]
4. $((\alpha\beta=\gamma$ и $\beta \Vdash \boldsymbol{B}) \Rightarrow \gamma \Vdash \boldsymbol{C})$ [$\forall$и. 2 раза из 3]
5. $\mathbf{b} \vDash \boldsymbol{B}$ [&и. из 2]
6. $\beta \Vdash \boldsymbol{B}$ [по инд. доп. из 5]
7. $\exists \mathbf{a}\in\alpha\ \exists \mathbf{b}\in\beta\ \mathbf{Rabc}$ [&и. из 2 и $\exists$в. 2 раза]
8. $\alpha\beta=\gamma$ [по опр. $\bullet$ из 7]
9. $\alpha\beta=\gamma\ \&\beta \Vdash \boldsymbol{B}$ [&в. из 6,8]
10. $\gamma \Vdash \mathbf{C}$ [$\Rightarrow$и. из 4, 9]
11. $\mathbf{c} \vDash \mathbf{C}$ [по инд. доп. из 10]
12. $\forall \mathbf{b},\mathbf{c}\in \mathbf{K}$ $((\mathbf{Rabc}$ **и** $\mathbf{b} \vDash \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{c} \vDash \mathbf{C})$ [$\Rightarrow$в.из 11, $\forall$в. 2 раза **b,c** - абс. ог.]
13. $\mathbf{a} \vDash \boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$ [по усл. ист. из 12]
14. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C} \Rightarrow \mathbf{a} \vDash \boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$ [$\Rightarrow$в. из 13]

3.2.
+1. $\mathbf{a} \vDash \boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$
+2. $\alpha\beta=\gamma\ \&\beta \Vdash \boldsymbol{B}$
3. $\forall \mathbf{b},\mathbf{c}\in \mathbf{K}$ $((\mathbf{Rabc}$ и $\mathbf{b} \vDash \boldsymbol{B}) \Rightarrow \mathbf{c} \vDash \boldsymbol{C})$ [по усл. ист. из 1]
4. $((\mathbf{Rabc}$ и $\mathbf{b} \vDash \boldsymbol{B}) \Rightarrow \mathbf{c} \vDash \boldsymbol{C})$ [$\forall$и. 2 раза из 3]
5. $\beta \Vdash \boldsymbol{B}$ [&и. из 2]
6. $\alpha\beta=\gamma$ [&и. из 2]
7. $\mathbf{b} \vDash \boldsymbol{B}$ [по инд. доп. из 5]
8. $\exists \mathbf{a}\in\alpha\ \exists \mathbf{b}\in\beta\ \mathbf{Rabc}$ [по опр. $\bullet$ из 6]
9. $\mathbf{Rabc}$ [$\exists$и. 2 раза, **a**, **b** - абс. огр. из 8]
10. $\mathbf{Rabc}$ и $\mathbf{b} \vDash \boldsymbol{B}$ [&в. из 7, 9]
11. $\mathbf{c} \vDash \boldsymbol{C}$ [$\Rightarrow$и. из 10, 4]
12. $\gamma \Vdash \mathbf{C}$ [по инд. доп. из 11]
13. $\forall\beta,\gamma\in \mathbf{K}$ $((\alpha\beta=\gamma$ и $\beta \Vdash \boldsymbol{B}) \Rightarrow \gamma \Vdash \boldsymbol{C})$ [$\Rightarrow$в. из 12,$\forall$в. 2 раза **β,γ** - абс. ог.]

14. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$ [по усл. ист. из 13]
15. $\mathbf{a} \models \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C} \Rightarrow \alpha \Vdash \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$ [$\Rightarrow$в. из 14],

что и завершает доказательство **Утверждения 1.**

Итак, допустив

+1. $\forall \alpha \in \boldsymbol{K}\ (\alpha \Vdash \boldsymbol{A} \Rightarrow \alpha \Vdash \boldsymbol{B})$

+2. $\exists \mathbf{a} \in \mathbf{K}\ (\mathbf{a} \models \boldsymbol{A}\ \&\ \mathbf{a} \dashv \boldsymbol{B})$, получаем

3. $\alpha \Vdash \boldsymbol{A} \Rightarrow \alpha \Vdash \boldsymbol{B}$ [$\forall$и. из 1]
4. $\mathbf{a} \models \boldsymbol{A}\ \&\ \mathbf{a} \dashv \boldsymbol{B}$ [$\exists$т., **a** - абс. огр из 2]
5. $\mathbf{a} \models \boldsymbol{A}$ [&и. из 4]
6. $\mathbf{a} \dashv \boldsymbol{B}$ [&и. из 4]
7. $\mathbf{a} \models \boldsymbol{A} \Rightarrow \alpha \Vdash \boldsymbol{A}$ [из Утв. 1.]
8. $\alpha \Vdash \boldsymbol{A}$ [$\Rightarrow$и. из 7,5]
9. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B}$ [$\Rightarrow$и. из 3,8]
10. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B} \Rightarrow \mathbf{a} \models \boldsymbol{B}$ [из Утв. 1.]
11. $\mathbf{a} \models \boldsymbol{B}$ [$\Rightarrow$и. из 10,9]
12. $\neg \exists \mathbf{a} \in \mathbf{K}\ (\mathbf{a} \models \boldsymbol{A}\ \&\ \mathbf{a} \dashv \boldsymbol{B})$ [$\neg$в. из 6.11]
13. $\mathrm{R}^{+} \models \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ [по усл. ист. из 12], что и требовалось доказать.

Таким образом, Лемма 1. доказана.

ЛЕММА 2. $\forall \boldsymbol{A}\ \forall \boldsymbol{C}^{+} \exists \mathrm{R}^{+}\ (\mathrm{R}^{+} \models \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{C}^{+} \Vdash \boldsymbol{A})$

Доказательство.

I. Покажем, что по каждой комбинаторной модели можно построить реляционную.

Пусть <**K**, $\bullet$, $\Vdash$> – позитивная комбинаторная модель. Пусть **K** есть **K**. Определим отношение достижимости **R** следующим образом: **Rabc** $\Leftrightarrow$**a**$\bullet$ **b=c**.

Покажем, что получившаяся пара <**K, R**> действительно есть реляционная модельная структура.

Множество **K** не пусто в силу не пустоты **K**.

Пара <**K, R**> удовлетворяет постулатам **r.1.- r.4.**

r.1. По **c.1.** $\alpha\ \alpha=\alpha$. По определению **R** это равносильно **Raaa**.

r.2. Rabc

$\Rightarrow \alpha\ \beta=\gamma$ [по опр. **R**]
$\Rightarrow \exists\theta\ (\alpha\bullet\beta=\theta$ и $\theta\bullet\beta=\delta)$ [по **c.2.** и **DF.1**]
$\Rightarrow$ **Rabx** и **Rxbc** [$\exists$и.θ - абс. огр., по опр. **R**]
$\Rightarrow \exists$**x** (**Rabx** и **Rxbc**) [$\exists$в.]
$\Rightarrow$ $\mathbf{R}^2$**abbc** [по **Df.1.**]

Аналогично доказываются и остальные постулаты. Таким образом, пара <**K, R**> действительно есть реляционная модельная структура.

Зададим отношение $\models \subseteq \mathbf{K} \times \{\boldsymbol{A}\}$ стандартным образом.

Условия истинности формул:

(&) $\mathbf{a} \models \boldsymbol{A\&B} \Leftrightarrow \mathbf{a} \models \boldsymbol{A}$ и $\mathbf{a} \models \boldsymbol{B}$;

(v) $\mathbf{a} \models \boldsymbol{A \vee B} \Leftrightarrow \mathbf{a} \models \boldsymbol{A}$ или $\mathbf{a} \models \boldsymbol{B}$;

(→) $\mathbf{a} \models \boldsymbol{A \to B} \Leftrightarrow \forall \mathbf{b,c} \in \mathbf{K}$ ((**Rabc** и $\mathbf{b} \models \boldsymbol{A}$) $\Rightarrow \mathbf{c} \models \boldsymbol{B}$).

Формула $\boldsymbol{A \to B}$ истинна в модели R (R $\models \boldsymbol{A \to B}$) *iff* из ***A*** следует ***B*** *iff* $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{K}(\mathbf{a} \models \boldsymbol{A} \Rightarrow \mathbf{a} \models \boldsymbol{B})$.

II. Теперь требуется показать, что $R^{+} \models \boldsymbol{A \to B} \Rightarrow C^{+} \Vdash \boldsymbol{A \to B}$.

Для этого опять потребуется доказать

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $\forall \boldsymbol{A}\ (\alpha \Vdash \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \mathbf{a} \models \boldsymbol{A})$.

Рассмотрим только случай, когда ***A*** есть $\boldsymbol{B \to C}$.

1.

+1. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B \to C}$

+2. **Rabc** & $\mathbf{b} \models \boldsymbol{B}$

3. $\forall \beta,\gamma \in \boldsymbol{K}\ ((\alpha\beta=\gamma$ и $\beta \Vdash \boldsymbol{B}) \Rightarrow \gamma \Vdash \boldsymbol{C})$ [по усл. ист. из 1]

4. $((\alpha\beta=\gamma$ и $\beta \Vdash \boldsymbol{B}) \Rightarrow \gamma \Vdash \boldsymbol{C})$ [∀и. 2 раза из 3]

5. $\mathbf{b} \models \boldsymbol{B}$ [&и. из 2]

6. $\beta \Vdash \boldsymbol{B}$ [по инд. доп. из 5]

7. **Rabc** [&и. из 2]

8. $\alpha\beta=\gamma$ [по опр. **R** из 7]

9. $\alpha\beta=\gamma\ \&\beta \Vdash \boldsymbol{B}$ [&в. из 6,8]

10. $\gamma \Vdash \mathbf{C}$ [⇒и. из 4, 9]

11. $\mathbf{c} \models \mathbf{C}$ [по инд. доп. из 10]

12. $\forall \mathbf{b,c} \in \mathbf{K}$ ((**Rabc и** $\mathbf{b} \models \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{c} \models \mathbf{C})$ [⇒в.из 11, ∀в. 2 раза **b,c** - абс. ог.]

13. $\mathbf{a} \models \boldsymbol{B \to C}$ [по усл. ист. из 12]

14. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B \to C} \Rightarrow \mathbf{a} \models \boldsymbol{B \to C}$ [⇒в. из 13]

2.

+1. $\mathbf{a} \models \boldsymbol{B \to C}$

+2. $\alpha\beta=\gamma\ \&\beta \Vdash \boldsymbol{B}$

3. $\forall \mathbf{b,c} \in \mathbf{K}$ ((**Rabc** и $\mathbf{b} \models \boldsymbol{B}) \Rightarrow \mathbf{c} \models \boldsymbol{C})$ [по усл. ист. из 1]

4. ((**Rabc** и $\mathbf{b} \models \boldsymbol{B}) \Rightarrow \mathbf{c} \models \boldsymbol{C})$ [∀и. 2 раза из 3]

5. $\beta \Vdash \boldsymbol{B}$ [&и. из 2]

6. $\alpha\beta=\gamma$ [&и. из 2]

7. $\mathbf{b} \models \boldsymbol{B}$ [по инд. доп. из 5]

8. **Rabc** [по опр. **R** из 6]

10. **Rabc** и $\mathbf{b} \models \boldsymbol{B}$ [&в. из 7, 8]

11. $\mathbf{c} \models \boldsymbol{C}$ [⇒и. из 10, 4]

12. $\gamma \Vdash \mathbf{C}$ [по инд. доп. из 11]

13. $\forall \beta,\gamma \in \mathbf{K}\ ((\alpha\beta=\gamma$ и $\beta \Vdash \boldsymbol{B}) \Rightarrow \gamma \Vdash \boldsymbol{C})$ [⇒в. из 12,∀в. 2 раза **β,γ** - абс. ог.]

14. $\alpha \Vdash \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ [по усл. ист. из 13]

15. $\mathbf{a} \models \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \Rightarrow \alpha \Vdash \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ [$\Rightarrow$в. из 14].

Итак, допустив $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{K}$ $(\mathbf{a} \models \boldsymbol{A} \Rightarrow \mathbf{a} \models \boldsymbol{B})$ и $\exists \alpha \in \boldsymbol{K}$ $(\alpha \Vdash \boldsymbol{A}$ & $\alpha \Dashv\!| \boldsymbol{B})$, легко получаем противоречие, используя Утверждение 1.

Таким образом, Лемма 2. доказана.

Возвращаясь к доказательству МТ 1., сначала осуществим доказательство в одну сторону: $\forall\ \boldsymbol{C}^+\ \boldsymbol{C}^+ \Vdash \boldsymbol{A} \Rightarrow \forall \mathrm{R}^+\ \mathrm{R}^+ \models \boldsymbol{A}$.

Предположим, что $\forall\ \boldsymbol{C}^+\ \boldsymbol{C}^+ \Vdash \boldsymbol{A}$, но не верно, что $\forall \mathrm{R}^+\ \mathrm{R}^+ \models \boldsymbol{A}$, то есть $\exists \mathrm{R}^+\ \mathrm{R}^+ \Dashv \boldsymbol{A}$. По Лемме 1. $\forall \mathrm{R}^+ \exists\ \boldsymbol{C}^+$ $(\boldsymbol{C}^+ \Vdash \boldsymbol{A} \Rightarrow \mathrm{R}^+ \models \boldsymbol{A})$. Исключив кванторы общности и существования ($\boldsymbol{C}^+$- абс. огр.), получаем $\boldsymbol{C}^+ \Vdash \boldsymbol{A} \Rightarrow \mathrm{R}^+ \models \boldsymbol{A}$, что по modus ponens с использованием $\boldsymbol{C}^+ \Vdash \boldsymbol{A}$ дает $\mathrm{R}^+ \models \boldsymbol{A}$. В свою очередь, исключение квантора существования дает $\mathrm{R}^+ \Dashv \boldsymbol{A}$, что ведет к противоречию.

Доказательство метатеоремы в другую сторону осуществляется аналогично с использованием Леммы 2.

Таким образом, МТ 1. доказана. Следовательно, адекватность реляционной семантики **TE** влечет адекватность комбинаторной семантики этой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайцев Д.В.* Теория релевантного следования I: Аксиоматика. // Логические исследования. Выпуск 5. М.,1998. С.119-128.
2. *Зайцев Д.В.* Теория релевантного следования II: Семантика. //Логические исследования. Выпуск 6. М.,1999. С.109-115.
3. *Dunn, J.M. and Meyer, R.K.* Combinators and Structurally Free Logic // The Journal of the IGPL. 1993. Vol. 6.4.
4. *Зайцев Д.В.* Модальности и импликация. // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М., 1998. С.85-91.
5. *Anderson, A.R.* and *Belnap, N.D., Jr*. Entailment. The logic of relevance and necessity. Vol.1. Princeton, 1975.
6. *Сегерберг К.* Модальные логики с линейными отношениями альтернативности. // Семантика модальных и интенсиональных логик. М., 1981. СС. 180-205.
7. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М., 1987.
8. *Anderson, A.R., Belnap, N.D., Jr*., and *Dunn, J.M.* Entailment. The logic of relevance and necessity. Vol.2. Princeton, 1992.