Д.П.Скворцов

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ДЛЯ СЕМАНТИКИ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОГО ФРАГМЕНТА ОДНОЙ СИСТЕМЫ АККЕРМАНА[1]

Abstract. *W. Ackermann [1,2] constructed a logical system with unrestricted comprehension principle. Here the propositional fragment of this logical system is considered. This logic is a weakening of the classical logic based on an informal interpretation of the implication as derivability in an unspecified deductive system. A Kripke-style semantics for this propositional logic is proposed and completeness theorem is proved.*

В.Аккерман [1, 2] построил непротиворечивую логическую систему с неограниченным принципом свертывания (то есть со схемой аксиом $y \in \hat{x}\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)$, где $\varphi(x)$ – произвольная формула, а $\hat{x}\varphi(x)$ – соответствующий ей терм-“абстракт”). Она базируется на определенном ослаблении классической логики, устраняющем известные теоретико-множественные парадоксы. При этом основная специфика аксиом из [1] проявляется уже на уровне пропозиционального фрагмента системы – поэтому именно его рассмотрением (в форме, равносильной исчислению $\mathbf{A}''$ из [3]) мы здесь и ограничимся. Аккерман в [1] поясняет выбор своих аксиом некоторыми интуитивными соображениями, основанными на понимании импликации $(\varphi\to\psi)$ как выводимости ψ из φ в некоторой до конца не уточняемой формальной системе. При этом решающим является принципиальное различение формулы φ (понимаемой как “истинность” φ) и $\Delta\varphi = (\mathrm{T}\to\varphi)$, понимаемой как “доказуемость” φ (то есть выводимость из “истины” T). Однако, поскольку мотивация в [1] ограничена уровнем “наводящих соображений”, возможен вопрос, нельзя ли добавить какие-то новые аксиомы, не нарушая приемлемости с той же эвристической точки зрения.

Не претендуя на то, чтобы ответить здесь на этот вопрос (связанный с возможной трактовкой философских идей и соображений, лежащих в основе построенной Аккерманом системы), предложим некоторую семантику для рассматриваемого пропозиционального фрагмента и установим теорему о полноте. Эта семан-

[1] Эта статья была написана почти 20 лет назад, но в силу стечения обстоятельств осталась неопубликованной. Возможно, сейчас публикация ее уместна хотя бы из исторических соображений: как раз исполнилось 50 лет логической системе Аккермана [1,2], которой она посвящена.

тика была приведена в короткой заметке [5], где указана также возможная ее содержательная интерпретация (в стиле Крипке [4]). Тем не менее, чтобы не отсылать читателя к давней и, видимо, труднодоступной публикации, повторим здесь эту мотивировку обсуждаемой семантики. Кроме того, в ходе доказательства полноты будет также построен некоторый секвенциальный вариант (без сечения) рассматриваемой пропозициональной системы.

Отметим, что предлагаемая семантика может быть легко распространена с пропозиционального фрагмента на полную систему Аккермана из [1] с неограниченным принципом свертывания. Необходимые построения приведены в тезисах [6]. К сожалению, осталось неясным, способна ли описанная там конструкция пролить свет на истоки непротиворечивости системы Аккермана: например, само доказательство полноты (в стиле построения канонической модели), намеченное в [6], существенно опирается на непротиворечивость системы, доказанную в [1]. Кстати, в свое время, например, А.Г.Драгалин высказывал предположение, что в системе Аккермана закодирована в замаскированном виде некоторая оставшаяся неясной логическая система без сокращения. Описываемая здесь семантика (и секвенциальная версия пропозиционального фрагмента) оставляет этот аспект в стороне и вряд ли помогает выявить природу этой гипотетической логики, якобы таящейся в недрах непротиворечивой системы из [1].

1. Пропозициональные формулы строятся из переменных p, q, r, ... , константы T ("истина") и связок &, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$. Сокращения: $(\varphi\leftrightarrow\psi) = (\varphi\rightarrow\psi)\&(\psi\rightarrow\varphi)$, $\Delta\varphi = (T\rightarrow\varphi)$, $\Delta^0\varphi = \varphi$, $\Delta^{m+1}\varphi = \Delta(\Delta^m\varphi)$ для $m \geq 0$ и $\perp = \neg T$.

Рассмотрим исчисление **A** со следующими аксиомами и правилами вывода (сравн. **A**$''$ в [3]):

A1: $\Delta\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \,\&\, \psi)$; A2: $\Delta(\varphi\vee\psi) \rightarrow \Delta\varphi \vee \Delta\psi$;

A3: $\varphi \,\&\, \psi \rightarrow \varphi$; $\varphi \,\&\, \psi\rightarrow \psi$; A4: $\varphi \rightarrow \varphi\vee\psi$; $\psi \rightarrow \varphi\vee\psi$;

A5: $\varphi\&(\psi\vee\eta) \rightarrow \psi\vee(\varphi\&\eta)$; A6: $(\varphi\rightarrow\psi) \,\&\, (\psi\rightarrow\eta) \rightarrow (\varphi\rightarrow\eta)$;

A7: $(\varphi\rightarrow\psi) \,\&\, (\varphi\rightarrow\eta)\rightarrow(\varphi\rightarrow\psi\&\eta)$;

A8: $(\varphi\rightarrow\eta) \,\&\, (\psi\rightarrow\eta) \rightarrow (\varphi\vee\psi\rightarrow\eta)$; A9: $\varphi\&\neg\varphi \rightarrow \psi$;

A10: $\neg(\varphi\&\psi) \leftrightarrow \neg\varphi\vee\neg\psi$; $\neg(\varphi\vee\psi) \leftrightarrow \neg\varphi\&\neg\psi$;

A11: $\neg(\varphi\rightarrow\psi) \leftrightarrow (T\rightarrow\varphi) \,\&\, (\psi\rightarrow\neg T)$; A12: $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$;

A0: $\Delta\varphi \rightarrow \varphi$;

modus ponens: $(\varphi , \varphi\rightarrow\psi / \psi)$; Δ-правило: $(\varphi / \Delta\varphi)$.

Пусть **A**$^-$ есть результат отбрасывания аксиомы A0. Будем писать **A**$^{(-)}$ в утверждениях, справедливых для обеих систем: **A** и **A**$^-$.

Формулу назовем *приведенной*, если она содержит $\neg$ только в составе подформул вида $\neg p$ и $\perp = \neg T$ (на "атомах"). По всякой формуле φ легко, пользуясь аксиомами A10-12, построить такую приведенную φ', что $\mathbf{A}^{-} \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi')$ (так наз. *приведенная форма* для φ). Для приведенных формул (точнее, для приведенной η) имеет место принцип замены эквивалентности в форме:

$$\mathbf{A}^{(-)} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \Rightarrow \mathbf{A}^{(-)} \vdash (\eta[\varphi] \leftrightarrow \eta[\psi]),$$

где $\eta[\psi]$ получена из $\eta[\varphi]$ заменой произвольного фиксированного вхождения, не находящегося под $\neg$ (сравн. [3])[2].

Назовем Δ^{-}-*шкалой* частично упорядоченное множество $(F, \leq)$ с унарной операцией Δ на F, где:

(a) $u \leq v \Rightarrow \Delta(u) \leq \Delta(v)$; (b) $\forall u\, \exists v\, (\Delta(v) \leq u)$;

это есть Δ-*шкала*, если (c) $\forall u\, (\Delta\Delta(u) \leq \Delta(u))$.

Модель Φ на Δ^{-}-шкале есть функция, сопоставляющая каждой переменной p пару непересекающихся множеств $\Phi_{\pm}(p) \subseteq F$, замкнутых вверх по $\leq$ (то есть $\forall u{\in}\Phi_{\pm}(p)\ \forall v \geq u\ [v{\in}\Phi_{\pm}(p)]$). При этом каждой формуле η и каждому u из F сопоставим истинностное значение $u \models \eta$ ("вынуждение" в модели Φ) так:

$u \models p \Leftrightarrow (u{\in}\Phi_{+}(p))$; $u \models \neg p \Leftrightarrow (u{\in}\Phi_{-}(p))$; $u \models \neg\neg\varphi \Leftrightarrow u \models \varphi$;

$u \models (\varphi \& \psi) \Leftrightarrow (u \models \varphi) \& (u \models \psi)$; $u \models (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (u \models \varphi) \vee (u \models \psi)$;

$u \models \neg(\varphi \& \psi) \Leftrightarrow (u \models \neg\varphi) \vee (u \models \neg\psi)$; $u \models \neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (u \models \neg\varphi) \& (u \models \neg\psi)$;

$u \models (\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \forall v \geq u\, (\Delta(v) \models \varphi \Rightarrow \Delta(v) \models \psi)$;

$u \models \neg(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\Delta(u) \models \varphi) \& \forall v \geq u\, (\Delta(v) \not\models \psi)$; $u \models T$; $u \not\models \perp$.

Формула η *истинна* в модели Φ ($\Phi \models \eta$), если $\forall u{\in}F\ (u \models \eta)$, и $\mathbf{A}^{(-)}$–*истинна*, если истинна во всех моделях на $\Delta^{(-)}$-шкалах.

Лемма 1 *(корректность).*
$\mathbf{A}^{(-)} \vdash \eta \quad \Rightarrow \quad \eta$ является $\mathbf{A}^{(-)}$–истинной.

Доказательство проводится несложной индукцией по выводу, с использованием следующих свойств вынуждения:

(1) $u \models \Delta\varphi \Leftrightarrow \Delta(u) \models \varphi$; (2) $u \leq v,\ u \models \eta \Rightarrow v \models \eta$;

(3) $u \models \neg\eta \Rightarrow u \not\models \eta$ (индукция по η).

Дальнейшее содержание работы состоит в доказательстве обратного утверждения, то есть *теоремы о полноте* для исчислений $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-}$. Однако прежде, чем перейти к этому доказательству, приведем некоторую содержательную трактовку введенных определений, описанную в [5].

Подобно [4], точки u шкалы F понимаются как возможные миры (или, если угодно, моменты ветвящегося времени), а модель Φ задает распределение истинности формул в возможных мирах

[2] Для неприведенной η этот принцип, вообще говоря, неверен: известно (см. [1]), что $A \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ не влечет $A \vdash (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$.

(“состояние дел” в мире u). Отношение $(u \le v)$ означает “достижимость” v из u (отвечающую тому, что все факты, верные в мире u, остаются верны при переходе в мир v). Наконец, мир $\Delta(u)$ понимаем как “совокупность сведений, известных (установленных, доказанных) в мире u”. При этом никакой связи $\Delta(u)$ с реальным состоянием дел в мире u не предполагаем — за исключением того, что в случае Δ-шкал (шкал для логики **A**) для миров вида $u=\Delta(v)$ (“миров наших знаний”) постулируется $\Delta(u) \le u$ (то есть все, известное в таких “правильных” мирах, в действительности имеет место). Условие (a) в определении Δ^{-}-шкалы означает “сохранение знаний со временем” (то есть при переходе вверх по отношению достижимости), а условие (b) — что реальный смысл имеют только миры вида $\Delta(v)$ (“миры знаний”) и их возможные расширения. Теперь определение истинности для & и $\vee$ подобно [4] (то есть по существу классично), а истинность $(\varphi \to \psi)$ в мире u понимается как утверждение, что в любом расширении $v \ge u$ “доказуемость” φ влечет “доказуемость” ψ (в соответствии с тем, что $v \models \Delta\varphi \Leftrightarrow \Delta(v) \models \varphi$). Таким образом, импликация понимается скорее не как “выводимость” ψ из φ, а как допустимость правила вывода (φ / ψ). Самостоятельное определение истинности $\neg p$, не сводимое к истинности p, отвечает тому, что $\neg\varphi$ в [1] понимается как “ложность” φ, в отличие от “недоказуемости” или “противоречивости” φ (в соответствии с чем формулы вроде $\neg p \leftrightarrow (p \to \bot)$ и подобные явные определения $\neg p$ через p в **A** оказываются неверны). Тем самым отрицание в системе Аккермана напоминает скорее сильное отрицание в конструктивной логике (в смысле Нельсона—Воробьева [7]).

2. *Таблица* $\tau = (\rho;\sigma)$ есть пара конечных множеств приведенных формул. Таблица *прот иворечива*, если

$(\rho \cap \sigma \ne \varnothing) \ \vee\ \exists p\,(p \in \rho, \neg p \in \rho) \ \vee\ (\bot \in \rho) \ \vee\ (T \in \sigma)$.

Таблица $\mathbf{A}^{-}$–*полна*, если:

(a) $(\Delta^{m}(\varphi \& \psi) \in \rho) \Rightarrow ((\Delta^{m}\varphi) \in \rho) \ \&\ ((\Delta^{m}\psi) \in \rho)$;
$(\Delta^{m}(\varphi \& \psi) \in \sigma) \Rightarrow ((\Delta^{m}\varphi) \in \sigma) \vee ((\Delta^{m}\psi) \in \sigma)$;
(b) $(\Delta^{m}(\varphi \vee \psi) \in \rho) \Rightarrow ((\Delta^{m}\varphi) \in \rho) \vee ((\Delta^{m}\psi) \in \rho)$;
$(\Delta^{m}(\varphi \vee \psi) \in \sigma) \Rightarrow ((\Delta^{m}\varphi) \in \sigma) \ \&\ ((\Delta^{m}\psi) \in \sigma)$;
(c) $(\Delta^{m}(\varphi \to \psi) \in \rho) \Rightarrow ((\Delta^{m+1}\varphi) \in \sigma) \vee ((\Delta^{m+1}\psi) \in \rho)$

(здесь и далее: m — произвольное натуральное число, $m \ge 0$),
и **A**–*полна*, если кроме того: d) $((\Delta\varphi) \in \rho) \Rightarrow (\varphi \in \rho)$.

Таблица $\tau'=(\rho';\sigma')$ есть *расширение* для $\tau=(\rho;\sigma)$ (обозначаем: $\tau \subseteq \tau'$), если $(\rho \subseteq \rho')$ & $(\sigma \subseteq \sigma')$. Для всякой таблицы τ существует конечное число минимальных $\mathbf{A}^{(-)}$-полных расширений, называемых $\mathbf{A}^{(-)}$-*пополнениями* τ. Введем также предупорядочение таблиц: $(\rho;\sigma) \le (\rho';\sigma')$, если $(\rho \subseteq \rho')$. Δ-*образ* для таблицы $\tau=(\rho;\sigma)$ есть

$\Delta(\tau)=(\{\varphi \mid (\Delta\varphi)\in\rho\};\{\psi \mid (\Delta\psi)\in\sigma\})$. Ясно, что операция Δ сохраняет $\mathbf{A}^{(-)}$-полноту, а для $\mathbf{A}$-полной τ имеем: $\Delta(\tau)\leq\tau$.

Пусть J — конечное поддерево универсального потока, то есть множество кортежей натуральных чисел, где $x\leq y\in J \Rightarrow x\in J$ (здесь $(x\leq y) \Leftrightarrow (\exists z)(x*z=y)$, а $*$ — операция сочленения кортежей); положим $\underline{J} = \{x\in J \mid \exists y\neq x(x\leq y\in J)\}$ (множество неконцевых элементов J). *Альтернанс* (альтернативное множество таблиц, сравн. [4]) X на J есть функция, сопоставляющая каждому x из J таблицу $X^x=(\rho^x;\sigma^x)$, причем $(x\leq y \Rightarrow X^x \leq X^y)$. Альтернанс X *противоречив*, если содержит противоречивую таблицу. Альтернанс X $\mathbf{A}^{(-)}$-*предполон*, если все его таблицы $\mathbf{A}^{(-)}$-полны, и $\mathbf{A}^{(-)}$-*полон*, если:

(1) все X^x для $x\in\underline{J}$ $\mathbf{A}^{(-)}$-полны;

(2) X^x для $x\notin\underline{J}$ удовлетворяют условиям (a), (b), (c) для m=0;

(3) если $(\varphi\to\psi) \in \sigma^x$ для $x\in J$, где $\varphi\neq T$,
то $(\rho^x\cup\{\Delta\varphi\};\{\Delta\psi\}) \subseteq X^y$ для некоторого $y \geq x$.

По всякому $\mathbf{A}^{(-)}$-предполному альтернансу X_0 на J_0 легко построить такой $\mathbf{A}^{(-)}$-полный X на J (вообще говоря, не один), что $\underline{J}=J_0$ и $X^x= X_0{}^x$ для $x\in J_0$ (так наз. $\mathbf{A}^{(-)}$-*продолжение* для X_0): достаточно заметить, что для $\mathbf{A}^{(-)}$-полной $(\rho;\sigma)$ расширение $(\rho\cup\{\Delta\varphi\};\{\Delta\psi\})$ по условию (c) с m=0 добавляет только формулы вида $\Delta\eta$, то есть не нарушает условия (3).

$\mathbf{A}^{(-)}$-*цепь* альтернансов есть последовательность $(X_n : n\geq 0)$, где X_n есть $\mathbf{A}^{(-)}$-полный альтернанс на J_n, причем $\underline{J}_0 = \{\Lambda\}$ (где Λ — пустой кортеж) и $\forall n\geq 0$ [$(J_n = \underline{J}_{n+1})\&\forall x\in J_n(\Delta(X_n{}^x) \subseteq X_{n+1}{}^x)$], а в $\mathbf{A}$-случае кроме того:

$$X_{n+1}{}^x \leq X_n{}^x \quad \text{при} \quad x \in \underline{J}_n . \qquad (\omega)$$

Скажем, что цепь *противоречива*, если она содержит противоречивый альтернанс X_n.

3. Лемма 2. Если $(X_n : n\geq 0)$ — непротиворечивая $\mathbf{A}^{(-)}$-цепь альтернансов, то таблица $X_0{}^\Lambda = (\rho;\sigma)$ имеет контрмодель на некоторой $\Delta^{(-)}$-шкале F (то есть такую модель Φ на F, что

$$\exists u\in F\ [\ \forall\varphi\in\rho\ (\Delta(u) \models \varphi)\ \&\ \forall\psi\in\sigma\ (\Delta(u) \not\models \psi)\ ]\ ) .$$

Доказательство наметим сперва для $\mathbf{A}^{-}$-*случая*. Положим

$F = \{a,b\} \cup \{(n,x) \mid n\geq 0,\ x\in J_n\}$, где

$(u<v) \Leftrightarrow (u=a\ \&\ v\neq a) \vee \exists n\geq 0\ (u=(n,x),\ v=(n,y),\ x\leq y,\ x\neq y)$,

$\Delta(a)=a$, $\Delta(b)=(0,\Lambda)$, $\Delta(n,x)=(n+1,x)$ для $x\in J_n=\underline{J}_{n+1}$.

Легко проверить, что это есть Δ^{-}-шкала.

Положим $\Phi_+(p) = \{(n,x) \mid p\in\rho_n{}^x\}$, $\Phi_-(p) = \{(n,x) \mid (\neg p)\in\rho_n{}^x\}$.

Докажем (индукцией по η), что в полученной модели выполнено:

$$\eta\in\rho_n{}^x \Rightarrow (n,x) \models \eta; \quad \eta\in\sigma_n{}^x \Rightarrow (n,x) \not\models \eta. \qquad (*)$$

Случаи η = p, $\neg$p, T, $\perp$ обеспечены по построению (ввиду непротиворечивости X_n), а случаи $\eta = (\varphi\&\psi), (\varphi\vee\psi)$ — ввиду (a),

(b) с m=0. Пусть $\eta = (\varphi\to\psi) \in \rho_n^x$ и $x\leq y\in J_n$, т.е. $X_n^x\leq X_n^y$, и значит, $\eta\in\rho_n^y$. Тогда, ввиду $\mathbf{A}^-$-полноты X_n, по условию (c) (с m=0) имеем: $((\Delta\psi)\in\rho_n^y) \vee ((\Delta\varphi)\in\sigma_n^y)$, т.е. $(\psi\in\rho_{n+1}^y) \vee (\varphi\in\sigma_{n+1}^y)$, и по предположению индукции, выполнено: $\Delta(n,y)=(n+1,y) \models \varphi \Rightarrow \Delta(n,y) \models\psi$, ч.т.д. Пусть $\eta = (\varphi\to\psi) \in\sigma_n^x$, где $\varphi\neq T$. Ввиду условия (3) $\mathbf{A}^-$-полноты X_n имеем $((\Delta\varphi)\in\rho_n^y)$ & $((\Delta\psi)\in\sigma_n^y)$ для некоторого $y\geq x$, т.е. $\Delta(n,y)=(n+1,y) \models \varphi$ и $\Delta(n,y) \not\models \psi$, а значит, $(n,x)\not\models\eta$. Наконец, если $\varphi=T$, т.е. $\eta = \Delta\psi \in \sigma_n^x$, то $\psi\in\sigma_{n+1}^x$, т.е. $\Delta(n,x) = (n+1,x) \not\models \psi$, и $(n,x) \not\models \eta$, ч.т.д.

В **A**-*случае* в качестве $(u\leq v)$ следует взять наименьшее отношение частичного порядка на F, удовлетворяющее условиям:

i) a — наименьший элемент F; b — максимальный элемент F, не сравнимый ни с одним элементом вида (n,x);

ii) если $x \leq y$, то $(n,x) \leq (n,y)$;

iii) если $x \in \underline{J}_n$, то $(n+1,x) \leq (n,x)$.

При этом F превращается в Δ-шкалу, поскольку имеем: $\Delta\Delta(a) = \Delta(a) = a$, $\Delta\Delta(b) = (1,\Lambda) \leq (0,\Lambda) = \Delta(b)$ (ввиду iii, так как $\Lambda\in\underline{J}_0$) и $\Delta\Delta(n,x) = (n+2,x) \leq (n+1,x) = \Delta(n,x)$ (так как $J_n = \underline{J}_{n+1}$).

Теперь условие (ω) обеспечивает, что $X_n^x \leq X_m^y$ при $(n,x) \leq (m,y)$, ввиду чего доказательство (∗) сохраняется дословно, и в качестве искомого u в определении контрмодели полагаем $u = b \in F$.

4. *Секвенцией* $(\Gamma \Rightarrow \Theta)$ (где Γ — антецедент, Θ — сукцедент секвенции) назовем упорядоченную пару конечных множеств формул[3]. Запись Γ,φ обозначает множество $\Gamma\cup\{\varphi\}$ (то есть в частности: Γ,φ равно Γ, если $\varphi\in\Gamma$).

Рассмотрим исчисление секвенций $\mathbf{G}^-$ с аксиомами вида $(\Gamma,p \Rightarrow \Theta,p)$, $(\Gamma,\neg p \Rightarrow \Theta,\neg p)$, $(\Gamma,\Delta^m p,\Delta^m\neg p \Rightarrow \Theta)$, $(\Gamma \Rightarrow \Theta,T)$, $(\Gamma,\Delta^m\bot \Rightarrow \Theta)$ и следующими правилами вывода (везде $m \geq 0$):

$(\&_1)$: $\dfrac{(\Gamma,\Delta^m\varphi,\Delta^m\psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma,\Delta^m(\varphi\&\psi) \Rightarrow \Theta)}$; $(\&_2)$: $\dfrac{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\varphi);\ (\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\psi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m(\varphi\&\psi))}$;

$(\neg\&_1)$: $\dfrac{(\Gamma,\Delta^m\neg\varphi \Rightarrow \Theta);(\Gamma,\Delta^m\neg\psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma,\Delta^m\neg(\varphi\&\psi) \Rightarrow \Theta)}$; $(\neg\&_2)$: $\dfrac{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\neg\varphi,\Delta^m\neg\psi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\neg(\varphi\&\psi))}$;

$(\vee_1)$: $\dfrac{(\Gamma,\Delta^m\varphi \Rightarrow \Theta);\ (\Gamma,\Delta^m\psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma,\Delta^m(\varphi\vee\psi) \Rightarrow \Theta)}$; $(\vee_2)$: $\dfrac{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\varphi,\Delta^m\psi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m(\varphi\vee\psi))}$;

[3] Переход от конечных множеств к упорядоченным наборам (как это обычно принято для секвенций) легко обеспечить добавлением структурных правил типа перестановки и сокращения, однако нам это не потребуется и вдаваться в подобные детали не будем.

$$(\neg\vee_1):\ \frac{(\Gamma,\Delta^m\neg\varphi,\Delta^m\neg\psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma,\Delta^m\neg(\varphi\vee\psi) \Rightarrow \Theta)}\ ; \qquad (\neg\vee_2):\ \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\neg\varphi);(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\neg\psi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\neg(\varphi\vee\psi))}\ ;$$

$$(\to_1):\ \frac{(\Gamma,\Delta^m(\varphi\to\psi) \Rightarrow \Theta,\Delta^{m+1}\varphi);\ (\Gamma,\Delta^{m+1}\psi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma,\ \Delta^m(\varphi\to\psi) \Rightarrow \Theta)}\ ;$$ [4]

$$(\to_2):\ \frac{(\{\varphi_i : i\in E\},\varphi \Rightarrow \{\psi_j : j\notin E\},\psi) : \text{по всем } E \subseteq \{1,\ldots,m\}}{(\Gamma,\ (\psi_1\to\varphi_1),\ldots,(\psi_m\to\varphi_m) \Rightarrow \Theta,\ (\varphi\to\psi)\ )}\ ;$$

$$(\neg\to_1):\ \frac{(\Gamma,\Delta^{m+1}\varphi,\Delta^m(\psi\to\bot) \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma,\Delta^m\neg(\varphi\to\psi) \Rightarrow \Theta)}\ ; \qquad (\neg\neg_1):\ \frac{(\Gamma,\Delta^m\varphi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma,\Delta^m\neg\neg\varphi \Rightarrow \Theta)}\ ;$$

$$(\neg\to_2):\ \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^{m+1}\varphi);(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m(\psi\to\bot))}{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\neg(\varphi\to\psi))}\ ; \qquad (\neg\neg_2):\ \frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\varphi)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta,\Delta^m\neg\neg\varphi)};$$

а также $\mathbf{G} = \mathbf{G}^- + (T)$: $\dfrac{(\ \Gamma,\ \Delta\varphi,\ \varphi \Rightarrow \Theta\ )}{(\ \Gamma,\ \Delta\varphi \Rightarrow \Theta\ )}$.

Ясно, что если $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Theta)$, то $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Gamma\cup\Gamma' \Rightarrow \Theta\cup\Theta')$ (ослабление). Легко показать, что $\mathbf{G}^- \vdash (\Gamma,\eta \Rightarrow \Theta,\eta)$ для всякой формулы η (индукцией по η: шаг для $\eta=(\varphi\to\psi)$ обеспечен правилом $(\to_2)$: $\dfrac{(\varphi \Rightarrow \varphi,\psi);\ \ (\psi,\varphi \Rightarrow \psi)}{(\Gamma,(\varphi\to\psi) \Rightarrow \Theta,(\varphi\to\psi))}$).

Далее, если $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \Theta)$, то $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Delta(\Gamma) \Rightarrow \Delta(\Theta))$, где $\Delta(\Gamma)=\{\Delta\varphi \mid \varphi\in\Gamma\}$, $\Delta(\Theta)=\{\Delta\psi \mid \psi\in\Theta\}$.

Действительно, $(\Delta\varphi_1\ ,\ldots,\ \Delta\varphi_m \Rightarrow \Delta\psi)$ вытекает из $(\varphi_1\ ,\ldots,\ \varphi_m \Rightarrow \psi)$ по правилу $(\to_2)$ (все посылки правила с $E \neq \{1\ ,\ldots,\ m\}$ являются аксиомами вида $(\Gamma' \Rightarrow \Theta',T)$). Теперь общий случай доказывается индукцией по выводу: все правила вывода, кроме $(\to_2)$, выдерживают "навешивание Δ", а $(\to_2)$ имеет по существу единственную формулу в сукцеденте, то есть обеспечивается предыдущим рассуждением.

Наконец, заметив, что любая таблица (в смысле п.2) является по существу частным случаем секвенции (а именно, секвенцией, состоящей из приведенных формул), докажем следующую лемму:

Лемма 3. Если все $\mathbf{A}^{(-)}$-пополнения таблицы $\tau=(\rho;\sigma)$ доказуемы в исчислении $\mathbf{G}^{(-)}$, то и сама τ доказуема в $\mathbf{G}^{(-)}$.

Для **доказательства** достаточно убедиться, что таблицу можно пополнить согласно условиям (a), (b), (c), (d) из п.2 с сохранением недоказуемости в $\mathbf{G}^{(-)}$. Эти условия в точности соответствуют правилам вывода $(\&_1)$, $(\&_2)$, $(\vee_1)$, $(\vee_2)$, $(\to_1)$ и (T) системы $\mathbf{G}^{(-)}$, так что если одно или оба возможных пополнения дока-

[4] В правиле $(\to_1)$ достаточно предполагать, что $\varphi \neq T$, так как иначе $\Delta^m(\varphi\to\psi) = \Delta^{m+1}\psi$.

зуемы в $\mathbf{G}^{(-)}$, то по соответствующему правилу доказуема и исходная секвенция.

5. Лемма 4. Если таблица τ_0 недоказуема в $\mathbf{G}^{(-)}$, то существует непротиворечивая $\mathbf{A}^{(-)}$-цепь альтернансов $(X_n : n\geq 0)$, для которой $\tau_0 \subseteq X_0^{\Lambda}$.

Доказательство. Будем строить искомую цепь $(X_n : n\geq 0)$ индукцией по n, причем так, чтобы все таблицы X_n^x при $x\in \underline{J}_n$ были недоказуемы в $\mathbf{G}^{(-)}$, а при $x\in(J_n \setminus \underline{J}_n)$ были недоказуемы таблицы $\Delta(X_n^x)$.

Основание индукции: n=0. В качестве X_0^x для $x=\Lambda$ возьмем (по лемме 3) недоказуемое $\mathbf{A}^{(-)}$-пополнение $\tau=(\rho;\sigma)$ для τ_0, и займемся обеспечением условия (3) из п.2. Пусть $(\varphi\rightarrow\psi)\in\sigma$, где $\varphi\neq T$, и пусть $(\psi_1\rightarrow\varphi_1), \ldots, (\psi_m\rightarrow\varphi_m)$ есть список всех импликаций, входящих в ρ. Поскольку $\mathbf{G}^{(-)} \mid\!\!-\!/\!- \tau$, ввиду правила $(\rightarrow_2)$ имеем такое $E=\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq E_m=\{1 ,\ldots, m\}$, что

$$\mathbf{G}^{(-)} \mid\!\!-\!/\!- (\{\varphi_i : i\in E\},\varphi \Rightarrow \{\psi_j : j\notin E\},\psi) . \qquad (**)$$

Включим в $(J_0 \setminus \underline{J}_0)$ кортеж $y\geq x$ и положим

$$X_0^y = (\rho\cup\{\Delta\varphi_i : i\in E\}\cup\{\Delta\varphi\}; \{\Delta\psi_j : j\notin E\}\cup\{\Delta\psi\}).$$

Из $\mathbf{A}^{(-)}$-полноты X_0^x вытекает, что X_0^y удовлетворяет условиям (a), (b), (c) из п.2 с m=0. Теперь убедимся, что
$\Delta(X_0^y)=(\{\varphi_i : i\in E\}\cup\{\varphi\}; \{\psi_j : j\notin E\}\cup\{\psi\})$ (и значит, недоказуема). Действительно, если $(\Delta\eta)\in\rho$, то $\Delta\eta=(\psi_i\rightarrow\varphi_i)$ для некоторого $i\in E_m$, и если бы $i\in(E_m \setminus E)$, то $\psi_i=T$ входила бы в сукцедент недоказуемой секвенции (**), что невозможно.

Индукционный шаг к (n+1). При $x\in\underline{J}_n$ положим таблицу
$X_{n+1}^x = \Delta(X_n^x)$ (ее недоказуемость вытекает из недоказуемости X_n^x, см. в п.4). А при $x\in(J_n \setminus \underline{J}_n)$ в качестве X_{n+1}^x возьмем (по лемме 3) недоказуемое $\mathbf{A}^{(-)}$-пополнение таблицы $\Delta(X_n^x)$ (которая недоказуема по предположению индукции). При этом мы получаем $\mathbf{A}^{(-)}$-предполный альтернанс $\underline{X}_{n+1}$ на J_n (условие $X_{n+1}^x \leq X_{n+1}^y$ при $x \leq y$ оказывается выполнено, поскольку для $y \geq x \in \underline{J}_n$ имеем:
$X_{n+1}^y\supseteq\Delta(X_n^y)\geq\Delta(X_n^x)=X_{n+1}^x$). В **A**-случае обеспечено также условие (ω) из п.2, поскольку $X_{n+1}^x=\Delta(X_n^x)\leq X_n^x$ для $x\in\underline{J}_n$. Теперь продолжение $\underline{X}_{n+1}$ до $A^{(-)}$-полного альтернанса X_{n+1} на J_{n+1} (с $\underline{J}_{n+1}=J_n$) строится подобно уже рассмотренному при n=0.

Наконец, убедимся, что все таблицы X_n^x полученной цепи непротиворечивы. При $x\in\underline{J}_n$ это выполнено, поскольку противоречивые таблицы доказуемы в $\mathbf{G}^{-}$. Пусть теперь $x\in(J_n \setminus \underline{J}_n)$, то есть, по построению,

$$X_n^x =(\rho\cup\{\Delta\varphi_i : i\in E\}\cup\{\Delta\varphi\}; \{\Delta\psi_j : j\notin E\}\cup\{\Delta\psi\}),$$

где $(\rho;\sigma)$ и $\Delta(X_n^x)$ обе непротиворечивы (так как недоказуемы), откуда следует непротиворечивость X_n^x. Лемма доказана.

Замечание. Поскольку максимум логических длин формул, входящих в таблицу $\Delta(\tau)$, меньше, чем в τ, а $\mathbf{A}^{(-)}$-пополнение не увеличивает этого максимума, то в описанном построении длины формул, входящих в X_n, строго убывают с ростом n. Отсюда следует, что все таблицы $X_n{}^x$, начиная с некоторого n_0, оказываются пустыми. Если теперь к полученной цепи (X_n : $n\geq 0$) применить конструкцию из доказательства леммы 2, то шкала F может быть выбрана конечной: достаточно отбросить все точки вида (n,x) при $n>n_0$ и положить $\Delta(n_0,x) = (n_0,x)$ (поскольку проверка условия (∗) при $n=n_0$ уже вырождается в тривиальность).

6. Лемма 5. Если $\mathbf{G}^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \theta)$, то $\mathbf{A}^{(-)} \vdash (\Gamma \Rightarrow \theta)^*$, где *формульный образ* секвенции есть

$$(\varphi_1,\ldots,\varphi_n \Rightarrow \psi_1,\ldots,\psi_m)^* = (\varphi_1\&\ldots\&\varphi_n \rightarrow \psi_1\vee\ldots\vee\psi_m)$$

(как обычно, пустая конъюнкция — T, а пустая дизъюнкция – $\perp$).

Доказательство: индукция по выводу в $\mathbf{G}^{(-)}$. Рассмотрение всех аксиом и правил, кроме $(\rightarrow_1)$ и $(\rightarrow_2)$, достаточно тривиально (в $\mathbf{A}^-$ выводимы формулы $\varphi\rightarrow\varphi$, $\varphi\&\varphi\leftrightarrow\varphi$, $\varphi\vee\varphi\leftrightarrow\varphi$, $\varphi\rightarrow T$, $\perp\rightarrow\varphi$, $\Delta^m(\varphi\&\psi) \leftrightarrow (\Delta^m\varphi)\&(\Delta^m\psi)$, $\Delta^m(\varphi\vee\psi) \leftrightarrow (\Delta^m\varphi)\vee(\Delta^m\psi)$, $\Delta^m\perp \leftrightarrow \perp$, правила $\dfrac{\psi}{\varphi\rightarrow\psi}$, $\dfrac{\varphi\rightarrow\psi}{\Delta^m\varphi\rightarrow\Delta^m\psi}$ и т.п.).

Для $(\rightarrow_1)$ достаточно убедиться в выводимости правила

$$\frac{\eta \;\&\; \Delta^m(\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \zeta \vee \Delta^m(\Delta\varphi);\quad \eta \;\&\; \Delta^m(\Delta\psi) \rightarrow \zeta}{\eta \;\&\; \Delta^m(\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \zeta}.$$

Из левой посылки по дистрибутивности вытекает

$$\eta\&\Delta^m(\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \zeta \vee [\eta \;\&\; \Delta^m(T\rightarrow\varphi) \;\&\; \Delta^m(\varphi\rightarrow\psi)],$$

где $\Delta^m(T\rightarrow\varphi)$ & $\Delta^m(\varphi\rightarrow\psi)$ влечет $\Delta^m(T\rightarrow\psi)$, а правая посылка обеспечивает [$\eta\&\Delta^m(\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow \zeta\vee\zeta$], что и требовалось.

Наконец, рассмотрим правило $(\rightarrow_2)$ при $\Gamma = \Theta = \varnothing$ (общий случай немедленно следует из этого). Примем посылки

$$\zeta_E = [\, \varphi \;\&\; \mathop{\&}_{i\in E} \varphi_i \;\rightarrow\; \psi \vee \bigvee_{j\notin E} \psi_j \,] \text{ для всех } E \subseteq E_m = \{1 ,..., m\}$$

и обозначим

$$\eta = \mathop{\&}_{E\subseteq E_m} \eta_E, \quad \text{где} \quad \eta_E = [\, \varphi \;\&\; \mathop{\&}_{i\in E} \varphi_i \;\rightarrow\; \psi \vee \bigvee_{j\notin E} \varphi_j \,].$$

Так как ζ_E влечет [$\mathop{\&}_{i}(\psi_i\rightarrow\varphi_i)\rightarrow\eta_E$], ввиду выводимости правила

$$\frac{\omega\rightarrow(\varepsilon\rightarrow\delta\vee\psi_i)}{\omega\&(\psi_i\rightarrow\varphi_i)\rightarrow(\varepsilon\rightarrow\delta\vee\varphi_i)}\ ,$$

то достаточно доказать в $\mathbf{A}^-$ формулу [$\eta \rightarrow (\varphi\rightarrow\psi)$]. Для этого положим $\xi_k = [\, \psi \vee \bigvee_{|E| = k} (\, \varphi \;\&\; \mathop{\&}_{i\in E} \varphi_i \,)]$, $k = 0,1,\ldots,m$.

Легко убедиться в выводимости $[\eta \to (\xi_k \to \xi_{k+1})]$ при всех k<m. Поэтому из доказуемой $[\eta \to (\varphi\to\xi_0)] = [\eta \to (\varphi\to\psi\vee(\varphi\&\mathrm{T}))]$ выводим формулу

$$[\ \eta \to (\varphi \to \xi_m)\ ]\ =\ [\ \eta \to (\varphi \to \psi\vee(\varphi\&\ \underset{i}{\&}\ \varphi_i))\ ].$$

Теперь, заметив, что $\eta_{Em} = (\varphi\ \&\ \underset{i}{\&}\ \varphi_i\ \to\ \psi)$, получим

$$[\eta\ \to\ (\varphi \to \psi\vee(\varphi\&\ \underset{i}{\&}\ \varphi_i\ ))\ \&\ (\psi\vee(\varphi\&\ \underset{i}{\&}\ \varphi_i\ ) \to \psi)],$$

после чего транзитивность импликации (аксиома А6) завершает доказательство.

Следствие. Если $\mathbf{A}^{(-)} |\!\!-\!/\!- \eta$, то $\mathbf{G}^{(-)} |\!\!-\!/\!- (\ \Rightarrow \eta)$.

Действительно, формульный образ $(\ \Rightarrow \eta)^* = (\mathrm{T}\to\eta)$ влечет η по modus ponens, поскольку $\mathbf{A}^{(-)} |\!\!- \mathrm{T}$.

7. Теорема 1 *(о полноте).*
$\mathbf{A}^{(-)} |\!\!- \eta \quad \Leftrightarrow \quad \eta$ является $\mathbf{A}^{(-)}$–истинной.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}^{(-)} |\!\!-\!/\!- \eta$, где формулу η (ввиду п.1) достаточно считать приведенной. По следствию из леммы 5, таблица (секвенция) $(\varnothing;\{\eta\})$ недоказуема в $\mathbf{G}^{(-)}$, то есть (ввиду лемм 4 и 2) имеет контрмодель Φ на $\Delta^{(-)}$-шкале F, и значит, формула η не является $\mathrm{A}^{(-)}$-истинной. Обратная импликация обеспечена леммой 1.

Замечание. Ввиду замечания к лемме 4, шкала F может быть выбрана конечной, то есть всякая формула, недоказуемая в $\mathbf{A}^{(-)}$, отвергается на конечной $\Delta^{(-)}$-шкале. Это обеспечивает разрешимость[5] исчислений $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-}$ — а точнее, даже примитивно рекурсивную разрешимость (поскольку фигурирующее в замечании число n_0 здесь не превосходит логической длины формулы η, а ветвления в деревьях J_n оцениваются сверху числом подформул в η).

Теорема 2 *(о равносильности).*
$\mathbf{G}^{(-)} |\!\!- (\Gamma \Rightarrow \Theta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{(-)} |\!\!- (\Gamma \Rightarrow \Theta)^*$.

Доказательство в одну сторону содержится в лемме 5, в обратную сторону для таблиц (секвенций из приведенных формул) вытекает из лемм 4 и 2, поскольку в контрмодели Φ для $(\Gamma;\Theta)$ отвергается формула $(\Gamma \Rightarrow \Theta)^*$. Общий случай обеспечивается следующей леммой:

Лемма 6. 1) $\mathbf{G}^{(-)} |\!\!- (\Gamma,\eta' \Rightarrow \Theta)\ \Rightarrow\ \mathbf{G}^{(-)} |\!\!- (\Gamma,\eta \Rightarrow \Theta)$,
2) $\mathbf{G}^{(-)} |\!\!- (\Gamma \Rightarrow \Theta,\eta')\ \Rightarrow\ \mathbf{G}^{(-)} |\!\!- (\Gamma \Rightarrow \Theta,\eta)$,

[5] Надежда на разрешимость пропозиционального исчисления $\mathbf{A}''$ (совпадающего с нашим $\mathbf{A}$) была выражена (без доказательства) в [3].

где η' — приведенная форма для η (см. п.1).

Доказательство *(индукция по сложности η)*. "Атомарный" случай $\eta = \Delta^m\varphi$, где $\varphi = T, \bot, p, \neg p$, тривиален (при этом $\eta'=\eta$). При $\eta = \Delta^m(\varphi\to\psi)$, $\eta' = \Delta^m(\varphi'\to\psi')$ (где φ и φ' отличны от T) применяем индукцию по выводу: во всех случаях замена η' на η (или φ' на φ и ψ' на ψ) возможна в посылках за счет сокращения вывода или сложности заменяемой формулы. Случаи $\eta = \Delta^m(\varphi\&\psi)$ и $\eta = \Delta^m(\varphi\vee\psi)$ (то есть $\eta' = \Delta^m(\varphi'\&\psi')$, $\Delta^m(\varphi'\vee\psi')$) разбираются аналогично; необходимо только учесть, что при m>0 формула η' может быть введена не только по соответствующему правилу $(\&_i)$ или $(\vee_i)$, но и по правилу $(\to_2)$. При $\eta = \Delta^m\neg(\varphi\&\psi)$, $\Delta^m\neg(\varphi\vee\psi)$, $\Delta^m\neg(\varphi\to\psi)$, когда $\eta' = \Delta^m((\neg\varphi)'\vee(\neg\psi)')$, $\Delta^m((\neg\varphi)'\&(\neg\psi)')$, $\Delta^m(\Delta\varphi'\&(\psi'\to\bot)$), применяем, опять-таки, индукцию по выводу. Если при этом формула η' введена правилом $(\vee_i)$ или $(\&_i)$, то η вводится правилом $(\neg\&_i)$, $(\neg\vee_i)$, $(\neg\to_i)$ соответственно. Наконец, при $\eta = \Delta^m\neg\neg\varphi$, $\eta' = \Delta^m\varphi'$, работает предположение индукции (для $\Delta^m\varphi$) и правило $(\neg\neg_i)$.

Замечание. Вместо доказательства леммы 6 можно естественным образом обобщить табличную конструкцию из п.2 так, чтобы распространить леммы 2 и 4 на случай произвольных секвенций, содержащих неприведенные формулы. Такая модификация не требует сколько-нибудь существенного изменения рассуждений, и обеспечивает иное, более прямое доказательство теоремы 2.

Из теоремы 2 вытекает:

Следствие 1. $\mathbf{A}^{(-)} \vdash \eta \iff \mathbf{G}^{(-)} \vdash (\ \Rightarrow \eta)$

(сравн. со следствием леммы 5).

Следствие 2. В системе $\mathbf{G}^{(-)}$ допустимо правило сечения:

$$\frac{(\Gamma \Rightarrow \Theta, \varphi);\ (\Gamma, \varphi \Rightarrow \Theta)}{(\Gamma \Rightarrow \Theta)}.$$

Доказательство при переходе к формульным образам тривиально; прямое доказательство допустимости сечения, не опирающееся на табличную конструкцию из п.2, автору неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ackermann W.* Wiederspruchsfreier Aufbau der Logik, I. Typenfreies System ohne tertium non datur // Journ. Symb. Logic. 1950. V. 15. № 1. P. 33-57.
2. *Ackermann W.* Wiederspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik (erweitertes System) // Math.Zeitschr. 1952. Bd. 55. H.3. S. 364-384.

3. *Harrop R.* An investigation of the propositional calculus used in particular system of logic // Proc. Cambridge Philos. Society. 1954. V. 50. № 4. P. 495-512.
4. *Kripke S.A.* Semantical analysis of intuitionistic logic, I // Formal Systems and Recursive Functions. Proc. 8th logic colloq., Oxford, July 1963. Amsterdam, 1965. P. 92-130.
5. *Скворцов Д.П.* О семантике пропозиционального фрагмента системы Аккермана // Автоматы, алгорифмы, языки. Калинин, 1982. С.130-132.
6. *Skvortsov D.P*. A semantics for a consistent type-free system of Ackermann // In: Logic, methodology and philosophy of science (abstracts of papers of soviet scientists submitted to the Soviet National Organization Comittee for the VII International Congress of logic, methodology and philosophy of science. Austria, Salzburg, 11-16 July 1983. Moscow, 1983. P. 38-41.
7. *Воробьев Н.Н.* Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием // ДАН СССР. 1952. Т. 85. № 3. С. 465-468.