Е.А.Сидоренко

ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ: ДВА ПОДХОДА

Abstract. *It is defines such the notion of the normalised standard inference from hypothesis that the deduction theorem in general form being relevant for every arbitrary calculus, including the empty one. This is reached without any change the notions of inference. The deduction theorem itself consist conditions of its adaptation.*

1. Логический вывод и теорема дедукции

В общем случае теорема дедукции – это метатеоретическое утверждение о формальной логической теории *T*, в соответствии с которым существование в *T логического вывода* формулы *B* из называемых гипотезами формул A_1, A_2,..., A_n (символически: A_1, A_2, ..., A_n④B) означает, что в *T* существует (возможно, при некоторых ограничениях) также вывод A_1, A_2,..., A_{n-1}④$A_n \to B$, где «→» фигурирующая в языке *T* импликация. Обычно теорема дедукции формулируется как утверждение о правомерности перехода от верного в теории утверждения вида *Г*, *A*④*B* к верному в этой же теории утверждению *Г* ④*A*→*B*.

Эта теорема без всяких ограничений имеет силу для исчислений классической логики и вообще для любых пропозициональных исчислений, в которых доказуемы два логических принципа: *закон утверждения консеквента* $A \to .B \to A$ и так называемый *закон самодистрибутивности импликации*

$$(A \to .B \to C) \to .\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to .\mathrm{A} \to \mathrm{C}.$$

Причем в таких исчислениях теорема дедукции может применяться к утверждению $A_1,A_2,\ldots,\mathrm{A}_{n-1}$④$A_n \to B$ снова и снова, вплоть до получения утверждения

④$A_1 \to .\, A_2 \to \ldots . \to .\mathrm{A}_{n-1} \to . \to .\, A_n \to B.$

В естественных рассуждениях теореме дедукции соответствует известный и часто применяемый способ обоснования истинности условных высказываний вида “Если *A*, то *B*”. Такое высказывание считается истинным, когда удается установить выводимость предложения *B* из предложения *A* и некоторой совокупности предложений *Г*, истинность которых предполагается установленной. По существу здесь неявно используется переход от верного в некоторой не обязательно фиксированной теории *Г*, *A*④*B*, где *Г* состоит из утверждений, считающихся истинными, к Γ ④$A \to B$ и далее к $A \to B$. Ясно поэтому, что логическая теория, описывающая тот или иной вид импликации (следования, условной связи), должна в том или ином смысле удовлетворять теореме дедукции.

Для неклассических, например, для релевантных исчислений, в которых закон утверждения консеквента не принимается, нахождение подходящей формулировки теоремы дедукции является уже определенной проблемой.

Известно, что многие утверждения о выводимостях могут быть сформулированы (и доказаны) без ссылок на фиксированную логику. Для этого достаточно опираться лишь на само определение вывода. Вместе с тем такое определение может быть различным. От этого, естественно, будут различными и классы приемлемых утверждений о выводимости вида Γ④B, а также классы правил, позволяющих переход от одних утверждений такого типа к другим. К последним относится и теорема дедукции, позволяющая переход от Γ, A④B к Γ ④$A \to B$.

Если, скажем, определение вывода запрещает фиктивное использование гипотез, делая неправомерным переход от Γ ④B к Γ, A④B, то в число приемлемых утверждений о выводимости, получаемых с помощью теоремы дедукции, не попадут (при еще некоторых очевидных ограничениях) такие характеризуемые обычно как парадоксальные утверждения, как:

④$A \to .B \to$ A и ④$A \to . \neg A \to B$.

Определение вывода и принимаемая формулировка теоремы дедукции (а формулировки последней также могут быть различными при одинаковом определении вывода) задают различные классы утверждений о выводимости. В этой ситуации теорема дедукции, сохраняя название, выступает в качестве не обычной метатеоремы исчисления, фиксирующей, что при существовании вывода Γ, A④B в исчислении может быть построен вывод Γ ④$A \to B$, но в качестве правила построения вывода, разрешающего переходить от первого из указанных выводов ко второму. Поэтому правильнее было бы в этих случаях говорить не о теореме, а о принципе дедукции. С другой стороны, употребляемое название сразу делает ясным, о чем идет речь, а контекст показывает, имеем ли мы дело с теоремой или же с правилом.

2. Два подхода к адаптации теоремы дедукции к конкретным исчислениям

Пусть при некотором определении вывода из гипотез для абстрактной логической теории T оказывается, что в этой теории имеет силу $\Gamma, A \vdash B$, но не является верным $\Gamma \vdash A \rightarrow B$. Иными словами, теорема дедукции впрямую без некоторых дополнительных условий, ограничений и оговорок силы не имеет. Имеются два принципиальных пути, на которых можно достичь условия, при котором $\Gamma, A \vdash B$ гарантирует верность $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Грубо говоря, один наиболее часто используемых путей состоит в том, чтобы так изменить понятие вывода в T, чтобы $\Gamma, A \vdash B$ оказывалось в T верным только при гарантированной верности в T утверждения $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Другой путь связан с изменением условий применимости теоремы дедукции. В этом втором случае для верности теоремы дедукции нужна не только справедливость в T утверждения $\Gamma, A \vdash B$, но и выполнение при выводе B из Γ и A некоторых дополнительных условий, например, зависимости B от A.

Этот подход находит свое идеологическое и содержательное обоснование в том, что существует некоторое независимое от логической теории и используемое в практике повседневных рассуждений понимание вывода из гипотез, которое разрешает использовать гипотезы, их конъюнкции и правило MP для получения выводов, опираясь или даже не опираясь на какие-либо дополнительные логические средства. Это понимание вывода эксплицируется приводимым ниже определением вывода, которое мы называем стандартным.

Другое обоснование связано с тем, что изменения в понятии вывода, связанные с потребностью сформулировать теорему дедукции для той или иной неклассической системы, а такие изменения всегда направлены в сторону ограничений на стандартный вывод, не должны сужать класса тех следствий из гипотез, которые могут быть получены в рамках той же системы в соответствии со стандартным пониманием вывода.

Аргументировать такую позицию довольно просто. Уже в рамках пустой теории стандартное определение вывода дает возможность получать широкий класс следствий из гипотез. Ясно, что было бы странно, вооружившись некоторой логической теорией, получать после этого следствий меньше, чем это можно делать в ее отсутствии. Кроме того, теорема дедукции по самому своему смыслу позволяет получать только те утверждения о выводимости, которые могут быть получены и без нее. Непонятно зачем нужно было бы использовать такую теорему, если для ее формулировки пришлось бы сократить класс приемлемых до этого утверждений о выводимости.

D1. *Стандартным логическим выводом* высказывания (формулы) B из гипотез $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ $(n \geq 0)$ в теории (исчислении) T

называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, ..., B_m$, ($m \geq 1$) такая, что последний член последовательности B_m совпадает с B, и для всякого B_i ($1\leq i \leq m$) выполняется одно из следующих условий: (а) B_i есть одна из посылок из Γ; или (б) B_i есть теорема теории (исчисления) T; или (в) B_i получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу *MP (modus ponens)*; или (г) B_i представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: *RA*).

Сделанная в определении ссылка не на аксиомы, а на теоремы теории позволяет ограничиться только двумя правилами вывода – *MP* и правилом адъюнкции, не используя, в частности, правила подстановки и вообще никаких правил вывода от посылок Δ к C, для которых в теории не имеет силы $\Delta^{\&}\rightarrow C$. Это позволяет нам не заботиться о том, какого рода могут быть сделаны расширения пропозициональных исчислений, для которых определяется вывод и формулируется теорема дедукции.

3. Нормализованный вывод

Под нормализованным выводом, строгое определение которого дается ниже, будем понимать вывод B из Γ, обеспечивающий тот же класс следствий из Γ, что и стандартный вывод, но запрещающий фиктивное использование гипотез и удовлетворяющий некоторым ограничениям на применение правила *MP*, которое определяется как нормализованное.

D2. Будем говорить, что *использование правила MP* в последовательности вывода $B_1, ..., B_m$ формулы B из гипотез Γ в теории T *является нормализованным*, если и только если для каждого члена последовательности B_i ($i \leq m$), полученного из двух предшествующих членов последовательности B_k и B_l по правилу *MP*, выполнены следующие условия:

(а) если B_k – большая посылка *MP*, т.е. имеет вид $B_l \rightarrow B_i$, то она предшествует в последовательности вывода меньшей посылке B_l;

(b) между членами последовательности вывода B_l и B_i (т.е. между меньшей посылкой и заключением *MP*) не находится никакой другой член последовательности B_k ($l \geq k \geq i$), если только B_k не получается по *MP* с той же малой посылкой B_l;

(c) меньшая посылка B_l не зависит ни от какой из гипотез, которая предшествует большей посылке $B_l \rightarrow B_i$.

Вся суть ограничений заключается, конечно, в условии (а), требующем упорядоченности посылок *MP*. Нарушение требования

(a) без нарушения (c) возможно только в случае, когда предшествующая большей меньшая посылка является теоремой. Условие (b) вводится, чтобы блокировать возможность обойти некоторым образом смысл требования (a), выполнив его чисто формально.

Как это может быть сделано, мы можем увидеть из следующих примеров:

№ 1	№ 2
1. $A \to A$ (*теор.*)	1. $A \to C$ (*гипот.*)
2. A (*гипот.*)	2. A (*гипот.*)
3. $A \to B$ (*гипот.*)	3. $C \to C \vee B$ (*теор.*)
4. A (1, 2, *MP*)	4. C (1, 2, *MP*)
5. B (3, 4, *MP*)	5. $C \vee B$ (3, 4, *MP*)

Использование *MP* в обоих приведенных выводах, хотя оно и удовлетворяет условию (a), не является нормализованным. И в том, и в другом случаях шаг (4) после шага (3) приводит к нарушению (b). Оба этих вывода нарушают, очевидно, и (c). На (5) шагу *MP* применено к посылкам, только меньшая из которых зависит от гипотез, предшествующих большей посылке. Условие (b) может быть нарушено и без нарушения (c). Таким нарушением будет, в частности, запись сначала одной пары посылок *MP*, потом другой независимой от них, а затем запись результатов применения *MP* к той и другой. Не является нарушением (b) включение между меньшей посылкой и заключением результата MP при той же меньшей посылке. Большие посылки могут быть различными, но возможна и одна и та же большая посылка, так что повторение одного следствия применения *MP* возможно. Другое дело, что оба повторяющихся члена должны быть в дальнейшем использованы в выводе. Таким образом, не нарушающим требование (b) будут, например, следующие выводы:

№ 3	№ 4
1. $A \to A$ (*теор.*)	1. $CC \to B$ (*гипот.*)
2. $A \to B$ (*гипот.*)	2. $A \to C$ (*гипот.*)
3. A (*гипот.*)	3. A (*гипот.*)
4. A (1, 2, *MP*)	4. C (1, 2, *MP*)
5. B (3, 4, *MP*)	5. C (1, 2, *MP*)
6. AB (4, 5, *RA*)	6. CC (3, 4, *RA*)
	7. B (1, 6, *MP*)

Примеры выводов, которые удовлетворяют условию (b), но не (c).

№ 5	№ 6
1. $C \to . A \to B$ (*гипот.*)	1. $A \to B \to A$ (*гипот.*)
2. $C \to A$ (*гипот.*)	2. $A \to B$ (*гипот.*)
3. C (*гипот.*)	3. A (1, 2, *MP*)
4. $A \to B$ (1, 3, *MP*)	4. B (2, 3, *MP*)
5. A (2, 3, *MP*)	
6. B (4, 5, *MP*)	

Вывод № 5 нарушает требование (c), так как шаг (6) делается, когда малая посылка A (5) зависит от гипотез, предшествующих большей посылке $A \to B$ (4).

Вывод №6 также не удовлетворяет условию (c), так как малая посылка *MP* (шаг (3)) зависит от шага (1), предшествующего большей посылке.

Нам потребуется еще одно предварительное определение.

D3. Будем говорить, что *член B_i последовательности вывода B_1, ..., B_m зависит от члена последовательности B_k* исключительно в случаях: (1) B_i совпадает с B_k, т.е. каждый член последовательности зависит от себя самого, или (2) B_k является одним из членов последовательности, из которых B_i получено по одному из правил вывода, или (3) B_i зависит от B_j, и B_j зависит от B_k (отношение зависимости *транзитивно*).

Установить, от каких членов последовательности B_1, ..., B_m зависит тот или иной ее член B_i, очевидно можно в результате следующей простой процедуры. Сначала отмечаются те шаги вывода, на основании которых B_i получено непосредственно. Если таковые имеются (а они могут отсутствовать, когда B_i включено в последовательность как теорема или посылка и зависит только от себя самого), то отмечаются последовательно, пока процедура не закончится, шаги, на основании которых получены уже отмеченные члены последовательности. B_i зависит только от тех членов последовательности, которые окажутся отмеченными.

Введем центральное для всех дальнейших рассуждений понятие *нормализованного вывода.*

D4. Нормализованным логическим выводом высказывания (формулы) B из посылок (гипотез) $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ ($n \geq 0$) в теории (исчислении) T называется конечная последовательность высказываний (формул) $B_1, ..., B_m$, ($m \geq 1$), которая является *стандартным* выводом Γ ④B в силу D1 и удовлетворяет следующим двум условиям:

(1) Правило *MP* (*modus ponens*) используется только в *нормализованном* виде (определение D2).

(2) Формула B_m *зависит* от каждого члена последовательности $B_1, ..., B_m$ (определение D3).

Определение D4 несмотря на его отличия от D1 не изменяет класса следствий, получаемых из тех же гипотез. Условие (2) не может ограничить числа следствий, которые можно получать в соответствии с D1, так как запрещает лишь явное включение в последовательность тех формул, без которых при получении следствий можно обойтись. Не ограничивает класса возможных следствий и условие (1). Действительно, пусть мы имеем вывод в смысле D1. И пусть последовательность вывода имеет вид $B_1, ..., B_m$. Допустим, что в выводе имеет место ненормализованное использование *MP*. Посылки, к которым было применено правило, обозначим как $B_l \to B_i$ и B_l. Соответственно, заключением будет B_i.

Начнем с требования нормализованности *MP*, которое обозначено как (b). Обратимся, если таковые имеются, к первому в выводе нарушению (b). При таком нарушении между меньшей посылкой B_l и заключением B_i стоят одна или несколько формул последовательности $B_{k1}, ..., B_{km}$, каждая из которых получена на иных основаниях, чем применение *MP*, меньшей посылкой которого является B_l. Нормализованность применения *MP* относительно (b) достигается за счет перестановки всех перечисленных формул $B_{k1}, ..., B_{km}$ в том же порядке сразу вслед за B_i. После этого осуществляются необходимые изменения в анализе (в нумерации шагов вывода, в записи оснований для каждого шага). После этих преобразований последовательность останется выводом в смысле D1.

После устранения в выводе всех нарушений условия (b) переходим к требованию (a). Если (a) нарушено без нарушения (c), то меньшая посылка B_l, представляет собой в этом случае теорему. Чтобы устранить ненормализованность, надо поставить эту же теорему после большей посылки $B_l \to B_i$ перед заключением B_i. Шаг B_l, если он теперь не нужен в выводе, устранить. Осуществить необходимые изменения в анализе.

Теперь рассматриваем нарушения, связанные с требованием (c). Если такие нарушения есть, обратимся к первому из них. Пусть B_l зависит от некоторой гипотезы (или гипотез), которые предшествуют $B_l \to B_i$.

Выпишем все те члены последовательности, от которых зависит B_l, в порядке их вхождения, кончая самой малой посылкой B_l. Получившийся в результате такой процедуры список формул включим в старую последовательность на место малой посылки, если она была ниже большей, и включим сразу после большей в противном случае[1]. В преобразованной последовательности удалим те повторяющиеся члены, устранение которых не влечет нарушения нормализации, и осуществим необходимые изменения в анализе. Поступим аналогичным образом со всеми другими нарушающими (с) ненормализованными применениями *MP*. В результате получим нормализованный вывод с теми же гипотезами и заключением, что и исходный вывод.

Указав процедуру нормализации выводов, мы фактически доказали следующую универсальную для любого исчисления метатеорему:

МТ1. В любой теории T классы следствий из данных гипотез, получаемые в силу D1, а также в силу D4, в точности совпадают.

Это удовлетворяющее МТ1 требование формулировалось как условие определения нормализованного логического вывода. Различие между D1 и D4 состоит в том, что не всякая конечная последовательность $B_1, ..., B_m$, которая является выводом B из Γ в смысле D1, является нормализованным выводом B из Γ в смысле D4. При этом всякий нормализованный вывод является выводом в соответствии с D1, и всякий вывод B из Γ в смысле D1 может быть нормализован.

D5. Пусть последовательность $B_1, ..., B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T. И пусть $A_1, ..., A_n$ есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве гипотез из числа Γ. И, наконец, пусть Γ_o – список тех посылок из Γ, которые не использовались в выводе вообще. Мы имеем, таким образом, два списка посылок Γ_o и $A_1,..., A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и где Γ_o может быть пустым. Выражение $\Gamma_a,\downarrow A_1,...,A_n$④$B$ будем называть *нормализованной записью* утверждения Γ ④B для нормализованного вывода B из Γ, имеющего вид $B_1, ..., B_m$. Запись $\downarrow A_1,..., A_n$④B указывает на то, что существует нормализованный вывод такой, что все обозначенные гипотезы входят в последовательность этого нормализованного вывода. Наконец, обычная запись (без стрелки) $A_1,..., A_n$ ④B говорит только о том, что из указанных посылок можно вывести B, но она не утверждает, что запись вывода нормализована.

[1] Сама малая посылка B_l в этом случае остается пока на месте. Можно ли будет ее вычеркнуть, зависит от того, не повлечет ли такое вычеркивание несоответствий с определением нормализованного вывода и вывода вообще.

Заметим, что число различных нормализованных выводов *B* из гипотез *Γ* в теории *T* может быть достаточно большим. Вместе с тем каждому нормализованному выводу соответствует всегда только одна (с точностью до порядка посылок в $Γ_o$) нормализованная запись этого вывода.

Принятое определение нормализованного вывода и ниже сформулированная на его основе теорема дедукции изначально релятивизированы относительно исчислений. В том смысле, что при одинаковых по форме формулировках они имеют различный смысл в зависимости от того, каким является исчисление, фигурирующее в определениях как некая абстрактная теория *T*.

D6. Будем называть далее *DT*–теориями такие замкнутые относительно правила *MP* и правила подстановки логические системы, где имеют силу четыре следующих принципа:

(1) $A \to A$ (*закон рефлексивности*)

(2) $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$ (*закон слабой транзитивности*)

(3) $(A \to B) \to B$, где A – теорема T (*принцип утверждения следствия теоремы*).

(4) $AB \to C \to .A \to .B \to C$ (*закон экспортации*).

Имеет силу следующая теорема:

MT2. (*Теорема дедукции для DT–теорий*). Если последовательность $B_1,..., B_m$ есть нормализованный вывод формулы *B* из гипотез *Γ* в некоторой *DT*–теории *T*, и $\{Γ_o\},↓A_1,..., A_n$ ④B есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения *Γ* ④*B*, то в *T* имеет силу всякое утверждение:

$$\{Γ_o\},↓A_1,..., A_{i-1} ④ A_i \to ... \to .A_n \to B \ (1 \le i \le n).$$

Я опускаю здесь доказательства теорем. Аналогичного рода теоремы доказаны в [1], и их доказательства легко могут быть адаптированы для теорем, здесь приводимых.

4. Формулировки теоремы дедукции для исчислений, не являющихся *DT*-теориями

Четыре определяющих *DT-теории* принципа выбраны, естественно, не случайно. Трем первым в любой теории, включая пустую, соответствуют верные по *D4* утверждения вида: $↓A_1,..., A_n$④B такие, что применение к ним теоремы (принципа) дедукции позволило бы эти самые принципы получить. Четвертый принцип можно доказать в любой теории, где действуют законы удаления конъюнкции $AB \to A$ и $AB \to B$.

Если перед нами стоит теперь задача отыскать подходящую формулировку теоремы дедукции для теории, в которой нет одного из принципов (1)–(4), у нас всегда есть в распоряжении две возможности.

Можно поступить так, как мы сделаем это ниже, и просто запретить применение теоремы дедукции к гипотезе, после появления которой в выводе использовалось правило адъюнкции.

Но можно запретить использовать в выводе правило адъюнкции к формулам, зависимым от гипотез. Тогда в формулировке теоремы дедукции введение соответствующего ограничения лишается смысла, ибо выводов, под него подпадающих, просто не окажется. Таким образом, первый, т.е. принятый здесь подход, легко трансформировать для каждой логической системы во второй.

В рамках конкретных примеров сказанное можно проиллюстрировать следующим образом. При первом подходе в любой релевантной системе, где не имеет силы *закон экспортации,* мы при верности A,B④AB не можем в силу оговоренного ограничения получить ↓A, B④AB, но только A, B↓④AB. Иначе говоря, можем вывести из гипотез их конъюнкцию, но не можем воспользоваться теоремой дедукции, так как указанную конъюнкцию нельзя получить без использования правила адъюнкции, что блокирует обе гипотезы для дедукции.

При втором подходе мы вынуждены будем признать неверным уже сам вывод A, B④AB. Если же мы не принимаем вообще никакой фиксированной логики, имея, так сказать, пустую теорию или теорию, в которой есть только правило MP, то в ней при этом втором подходе, будучи последовательным, нельзя было бы считать верным ни $A \to B, A$④B, ни даже A④A. Что выглядело бы довольно-таки странным. Таким образом, уверенность в преимуществе первого подхода, исключающего изменение класса следствий, не кажется безосновательной.

Неприменимость теоремы (принципа) дедукции к утверждению Γ, A④B не должна быть аргументом против принятия этого утверждения как верного, так как такая неприменимость может быть следствием определенной трактовки импликации. Вполне возможно, что Γ,A④B не позволяет считать верным Γ④$A \to B$ для необходимой релевантной импликации, но позволяет считать таковым как Γ④$A \supset B$, так даже и Γ④$A \Rightarrow B$ для обычной условной связки. Ясно, что все три эти импликации могут фигурировать в языке одной теории, так что Γ, A④B во всех случаях пришлось бы считать верным несмотря на то, что теорема дедукции имеет силу только для одной из этих импликаций.

Вместе с тем подход, при котором меняется класс верных утверждений о выводимостях, по-видимому, может оказаться плодотворным, когда на базе теоремы дедукции и вводимого определения вывода задаются смысл и взаимоотношения логических связок, кванторов, модальностей и т.п. некоторого нового языка. Возможно, это укажет на некоторые основания и перспективы для построения формализующей этот новый язык теории [3].

Мы показали как можно переформулировать теорему дедукции для систем, в которых не имеет силы один из четырех характеристических для *DT-теорий* принципов (1)–(4), а именно закон экспортации. Заметим вместе с тем, что запрет применять принцип дедукции к гипотезе, после появления которой в последовательности нормализованного вывода использовалось правило адъюнкции, не делает теорему дедукции неверной для исчислений, где закон экспортации доказуем. Дело в том, что именно он (этот закон), будучи включен в последовательность вывода, и позволяет в этом случае обойтись без использования правила адъюнкции.

Продемонстрируем теперь, как можно сформулировать теорему дедукции для исчислений, в которых выделенные нами принципы присутствуют или же отсутствуют в любых сочетаниях. Наша теорема дедукции будет, таким образом, верной для любого произвольно избранного исчисления от пустого до тривиального.

Пусть последовательность $B_1,..., B_m$ есть нормализованный вывод в смысле *D4* формулы *B* из гипотез *Γ* в некоторой теории *T*. Будем говорить, что формула последовательности, находящаяся на шаге B_i и являющаяся гипотезой, *блокирована для дедукции*, если и только если имеет место по крайней мере одно из следующих *блокирующих условий*:

(bl1) B_i является первой по счету гипотезой, входящей в последовательность, и не использована в выводе в качестве меньшей посылки;

(bl2) после шага B_i в выводе к зависящим от гипотез формулам было применено правило адъюнкции *RA*;

(bl3) после шага B_i имеет место заключение по *MP* при том, что в качестве малой посылки выступает теорема теории, а в качестве большей – зависящая от гипотез формула;

(bl4) после шага B_i имеет место заключение по *MP*, в качестве малой посылки которого выступает зависящая от гипотез формула *A*, а большей посылкой служит член последовательности, предшествующий всем тем гипотезам, от которых зависит *A*.

Пусть последовательность $B_1,..., B_m$ есть нормализованный вывод формулы *B* из гипотез *Γ* в некоторой теории *T*. Выделим в этой последовательности шаг B_k, на котором находится гипотеза с наименьшим индексом, которая не блокирована для дедукции. Пусть теперь $A_1,\ldots, A_n$ есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве гипотез, начиная с шага B_k включительно.

Пусть далее Γ_b – список всех тех (блокированных) гипотез из Γ, которые были использованы в выводе до шага B_k. И, наконец, пусть Γ_o – список тех посылок из Γ, которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка гипотез Γ_b, Γ_o и $A_1,\ldots, A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

Выражение $\{\Gamma_o\}, \Gamma_b, \uparrow A_1,\ldots, A_n$ ④ B будем называть нормализованной *записью* утверждения Γ ④ B для нормализованного вывода B из Γ, имеющего вид $B_1, \ldots, B_m$. Список Γ_o будем опускать. Запись $\downarrow A_1,\ldots, A_n$ ④ B в отличие от записи $\Gamma_b, \uparrow A_1,\ldots, A_n$ ④ B говорит о пустоте Γ_b и, значит, о том, что ни одна из посылок не блокирована для вывода. В свою очередь, запись $\Gamma_b, \uparrow$ ④ B говорит, что все использованные в выводе гипотезы (при данном построении вывода) блокированы для дедукции. Наконец, обычные записи $\Gamma_b, A_1,\ldots, A_n$ ④ B и $A_1,\ldots, A_n$ ④ B говорят о том, что из указанных гипотез можно вывести B, но не утверждается, что запись вывода нормализована.

Заметим еще раз, что число различных нормализованных выводов B из гипотез Γ в теории T может быть достаточно большим. Иными словами, одно и то же заключение из данных гипотез может быть получено различными путями. Вместе с тем каждому нормализованному выводу соответствует всегда только одна (с точностью до порядка посылок в Γ_b и Γ_o) нормализованная запись.

Теорема дедукции выглядит следующим образом:

МТ3. (*Универсальная теорема дедукции*[2]). *Если* последовательность $B_1,\ldots, B_m$ есть нормализованный вывод

[2] Стоит во избежание недоразумений повторить, что речь идет об исчислениях, замкнутых относительно *MP*. Универсальность обеспечивается в определенной мере тем, что в D1 и в D2 фигурируют ссылки на теоремы T, а не на аксиомы, так как в последнем случае, ограничиваясь в выводе указанными правилами, мы утратили бы возможность говорить об исчислениях, в которых исходными правилами вывода являются какие-нибудь отличные от стандартных. Мы можем, например, представить себе исчисление с правилом вывода, разрешающим переход от $A \to B$ к $C \to A \to .C \to B$ при отсутствии в исчислении самого принципа транзитивности $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$. Нам нет необходимости включать ссылки на такого рода правила в определение вывода, так как мы всегда можем использовать сразу нужную теорему.

формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T, и $\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_n$ ④ B ($n \geq 1$) есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения Γ ④ B, то в T имеет силу утверждение:

$\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_{i-1}$ ④ $A_i \to \ldots . \to . A_n \to B$ ($1 \leq i \leq n$).

Рассмотрим некоторые характерные особенности *МТ3*. В частности, какова роль принятых нами блокирующих ограничений.

Первое блокирующее ограничение, по существу, имеет смысл только для тех теорий, в которых отсутствует закон рефлексивности. В этом случае вывод, состоящий из одного шага

1. B (*гипот.*)

не дает возможности воспользоваться теоремой дедукции. Если же в T верно ④ $B \to B$, то такую возможность открывает вывод:

1. $B \to B$ (*теорема*) 2. B (*гипот.*) 3. B (1, 2, MP).

Ясно поэтому, что в случае пустоты теории утверждение вида

$\uparrow A_1$ ④ $A_2 \to \ldots . \to . A_n \to B$

является заведомо неверным. В пустой теории могут быть верными исключительно выражения вида:

$A_1 \to \ldots . \to . A_n \to B$, $\uparrow A_1, \ldots, A_n$ ④ B

и те, которые получаются из них по теореме дедукции вплоть до утверждения

$A_1 \to \ldots . \to . A_n \to B$ ④ $A_1 \to \ldots . \to . A_n \to B$.

Так что можно было бы сказать, что в пустой теории первая в выводе посылка всегда блокирована для вывода. Отказ от блокирующего условия (bl1) делает теорему дедукции верной только для тех теорий, которые содержат принцип рефлексивности. Наличие последнего, естественно, не исключает, что первая в последовательности вывода гипотеза может быть блокирована по иным основаниям.

Блокирующее ограничение (bl2), связанное с правилом адъюнкции *RA*, уже было нами рассмотрено. Оно запрещало применять теорему дедукции к гипотезам нормализованного вывода, если после их появления в последовательности вывода использовалось *RA*. Надо сказать, что именно такое запрещение, связанное, как это ясно, с ориентацией на релевантную логику, где не имеет силы закон экспортации, позволяющий переходить от $AB \to C$ к $A \to . B \to C$, привело к идее блокирующих ограничений вообще.

Обратимся к блокирующему ограничению (bl3). Оно исключает применение принципа дедукции к гипотезе вида $A_T \to C$, где A теорема теории, в которой осуществляется вывод, если C появляется в выводе на основании этой гипотезы в качестве большей посылки *MP*. Таким образом, в теории, в которой для теоремы A_T не имеет силы принцип $(A_T \to C) \to C$, не будет верным утверждение:

$$\uparrow(A_T \to C)④C.$$

В теории, в которой $(A_T \to C) \to C$ есть теорема, ограничение (3) силы не имеет, так как его можно обойти, получая C за счет использования этой теоремы и посылки $(A_T \to C)$. Таким образом, при отказе от ограничения (bl3) теорема дедукции верна для всех тех теорий, где верна указанная теорема.

Блокирующее ограничение (bl4) имеет смысл для теорий, в которых нет слабого принципа транзитивности:

$$A \to B \to . C \to A \to . C \to B.$$

Обратимся к выводу:

1. $A \to B$ (*гипот.*)
2. $C \to A$ (*гипот.*)
3. C (*гипот.*)
4. A (2, 3, *MP*)
5. B (1, 4, *MP*)

Нормализованной записью этого вывода будет:

$$A \to B,\ C \to A,\ C\uparrow④B.$$

Мы не можем поставить стрелку “↑” ни перед одной из гипотез, так как уже последняя из них C в силу (bl4) блокирована для дедукции, поскольку в выводе после нее стоит формула A, являющаяся малой посылкой *MP*, а большей его посылкой является формула $A \to B$, которая предшествует гипотезам $C \to A$ и C, от которых только и зависит малая посылка. То же самое происходит и в том случае, когда на месте шага (1) стоит некоторая теорема теории. Пусть, например, B имеет вид $A \vee B$, и $A \to A \vee B$ есть теорема. Тогда нормализованной записью вывода будет:

$C \to A, C④A \vee B$, и утверждение $\uparrow C \to A,\ C④A \vee B$ по-прежнему будет неверным.

Ограничение (bl4), таким образом блокирует возможность преобразовать утверждение вида $\Gamma, \downarrow A④B$ в утверждение $\Gamma, \downarrow C \to A, C④B$, если в теории нет указанного закона транзитивности. В более общем смысле (bl4) делает невозможным переход от $\Gamma, A④B$ и $\Delta④A$ к $\Gamma, \Delta④B$. Иначе говоря, это ограничение не позволяет включать в последовательность вывода вместо гипотезы некоторый самостоятельный ее вывод.

Совокупность ограничений, блокирующих применение принципа дедукции, приводит к тому, что МТ3, в отличие от МТ2, сформулированной для *DT*-теорий, становится универсальной теоремой дедукции, так как позволяет в результате ее применения получать только те утверждения вида ④B, которым соответствуют теоремы той теории, в которой осуществляется вывод. В пустой теории список таких утверждений будет пуст. Напомним, что в пустой теории всегда будет верным всякое утверждение вида (и только такого вида):

$$A_1 \to. A_2 \to. \ldots \to. A_n \to B, \uparrow A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ ④} B \; (n \geq 0).$$

МТ4. (*Теорема адекватности*). Утверждение Γ ④$A \to B$ верно во всякой теории T, если и только если существует нормализованная последовательность G вывода B из посылок Γ и A, которой соответствует нормализованное утверждение $\Gamma, \uparrow A$④B.

5. Постановка проблемы

Заслуживает внимания вопрос о классах разбиений универсума пропозициональных исчислений и, следовательно, о некоторого рода их классификации в зависимости от принимаемой формулировки теоремы дедукции. Из вышеизложенного видно, что при нормализованном выводе и названных условиях, блокирующих теорему дедукции, число таких классов будет заведомо конечным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидоренко Е.А.* Универсальная теорема дедукции // Логические исследования. Вып. 7. М.: Наука, 2000.
2. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // М.: Наука, 1972.
3. B*uchsbaum A.*, *Pequeno T.* A general treatment for the deduction theorem in open calculi // Logique et Analyse, 157, 1997.
4. *Сидоренко Е.А*. Релевантная логика (предпосылки, исчисления, семантика) // М.: ИФ РАН, 2000.