М.Н.Рыбаков

ПЕРЕЧИСЛИМОСТЬ МОДАЛЬНЫХ ПРЕДИКАТНЫХ ЛОГИК И УСЛОВИЯ ОБРЫВА ВОЗРАСТАЮЩИХ ЦЕПЕЙ*

Abstract. *The question about recursive enumerability of modal predicate logics defined by non first-order definable classes of Kripke frames is considered. It is proved that logics of classes of frames without infinite ascending chains are not recursively enumerable.*

Известно, что большинство стандартных пропозициональных логик разрешимы [3], т.е. для каждой такой логики существует эффективная процедура, которая по всякой формуле дает ответ на вопрос о том, верно ли, что эта формула принадлежит данной логике. Неразрешимых пропозициональных логик, возникших по некоторым естественным причинам, известно не так уж и много; к таковым относятся, например, релевантные логики [5]. В предикатном случае ситуация резко меняется – даже классическая логика предикатов неразрешима, хотя и является перечислимой, т.е. существует эффективное перечисление всех ее теорем. Как следствие, неразрешимы и все модальные предикатные логики, содержащие классическую логику предикатов в качестве своего безмодального фрагмента. Более того, из результатов С. Крипке [1] следует, что в большинстве случаев для неразрешимости модальной предикатной логики достаточно, чтобы ее язык содержал всего лишь две одноместные предикатные буквы, в то время как классическая логика одноместных предикатов разрешима. Логика одноместных предикатов тесно связана с силлогистикой Аристотеля, и упомянутое наблюдение С. Крипке отчасти оправдывает трудности, возникающие при введении в силлогистику модальностей.

Заметим, что все логики, которые могут быть заданы в виде исчислений (т.е. в виде дедуктивной системы с рекурсивно перечислимым, например, конечным, набором аксиом и правил вывода), являются перечислимыми, т.е. для каждой такой логики существует эффективная процедура, выписывающая последовательно все ее теоремы. Действительно, имея конечную (или даже рекурсивно перечислимую) аксиоматику, мы можем последова-

* Работа выполнена при поддержке Фонда Минобразования РФ, грант № Е00–1.0–175.

тельно перебирать все выводы, в результате чего рано или поздно доберемся до всякой формулы, которая выводима в данном исчислении.

Вполне естественным представляется определять логики не синтаксически – в виде исчислений, а семантически, т.е. как множества формул, верных с точки зрения некоторой семантики. Так, например, классическую логику предикатов **QCl** можно определить как множество тождественно истинных формул, минимальную нормальную модальную предикатную логику **QK** – как множество формул, верных во всех шкалах Крипке, интуиционистскую пропозициональную логику **Int** – как множество формул, верных во всех интуиционистских моделях Крипке, и т.д. Нас будут интересовать логики (в первую очередь, модальные предикатные), которые определяются именно семантически.

В [2] показано, что если модальная предикатная логика задается как множество формул, значимых в классе шкал Крипке, отношение достижимости в которых описывается первопорядковой формулой, то она погружается в классическую логику предикатов. Это, в частности, влечет, что такая логика является перечислимой.

Сохранится ли перечислимость, если рассматривать модальные предикатные логики, определенные классами шкал Крипке, отношение достижимости в которых не описывается ни одной формулой первого порядка? В пропозициональном случае к логикам, классы шкал которых не описываются первопорядковыми формулами, относятся, например, логика Геделя–Леба **GL**, логика Гжегорчика **Grz**, логика Маккинси **KM** и другие. Все эти логики конечно аксиоматизируемы, финитно аппроксимируемы и разрешимы [3]. Закономерен вопрос о том, какова алгоритмическая сложность модальных предикатных логик классов шкал **GL**, **Grz**, **KM** и других подобных логик.

Вопрос о перечислимости логик классов шкал, не определимых первопорядково, мотивирован отчасти еще и тем, что в математике довольно часто приходится говорить о вполне естественных свойствах, которые невозможно описать средствами языка первого порядка.

Так, например, одним из свойств, которым обладают стандартные модальные пропозициональные логики, является финитная аппроксимируемость: логика L называется финитно аппроксимируемой, если она полна относительно некоторого класса конечных шкал Крипке. Заметим, что свойство конечности не описывается никакой формулой первого порядка. Тем не менее, финитная аппроксимируемость играет важную роль в модальных и других неклассических логиках. Так, например, известно [3], что если пропозициональная логика L финитно аппроксимируема и конечно аксиоматизируема, то она разрешима.

При переходе от пропозиционального языка к предикатному свойство конечности моделей даже в классическом случае приводит к «отрицательным» результатам, связанным с возможностью эффективного описания логик таких моделей. Сначала заметим, что требование конечности моделей предикатного языка возникает вполне естественно: поскольку в жизни мы сталкиваемся лишь с конечным числом предметов, то разумно рассматривать логики моделей с конечными предметными областями. Оказывается, что классическая предикатная логика конечных областей $\mathbf{QCl}_{fin}$ в силу известной теоремы Трахтенброта не только не разрешима, но даже не является перечислимой (правда, теорема Трахтенброта не распространяется на логику одноместных предикатов). Соответственно, неперечислимы и модальные логики конечных областей.

Помимо конечности есть и другие естественные условия, которые нельзя записать с помощью первопорядковых формул. К ним относится, например, часто используемая в различных областях математики операция транзитивного (иногда рефлексивно-транзитивного) замыкания бинарных отношений. Так, в теории графов эта операция используется при описании путей из одних вершин графа в другие, в *computer science* она связана с зацикливанием программ и т.д. В [6] показано, что модальная предикатная логика шкал Крипке, язык которой содержит две модальности – соответствующую отношению достижимости между мирами и соответствующую рефлексивно-транзитивному замыканию этого отношения – является неперечислимой. Опять вполне естественное, но не определимое первопорядково условие, накладываемое на семантику, приводит к неперечислимости множества верных с точки зрения этой семантики формул.

Мы рассмотрим еще одно условие – условие обрыва возрастающих цепей. В шкалах Крипке оно возникает, когда речь идет о реляционной семантике логик доказуемости, например, таких, как пропозициональные логики **GL** или **Grz**. Напомним определения этих логик. Пусть **Cl** – классическая логика высказываний. Для множеств модальных пропозициональных формул Σ_1 и Σ_2 через $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ обозначим наименьшее множество, содержащее $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ и замкнутое относительно правила *modus ponens*, правила подстановки и правила Геделя. Вместо $\Sigma \oplus \{\varphi\}$ будем писать $\Sigma \oplus \varphi$. Тогда

$$\mathbf{GL} \;=\; \mathbf{Cl} \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p;$$
$$\mathbf{Grz} \;=\; \mathbf{Cl} \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p,$$

где p и q — пропозициональные переменные. Каждую из этих логик можно определить как множество формул, значимых в некотором классе шкал Крипке, для которых помимо прочих (первопорядково определимых) условий выполнено и условие обрыва возрастающих цепей (см. [3]). Мы рассмотрим предикатные варианты этих логик, т.е. когда модальный язык обогащен предикатными буквами и кванторами по предметным переменным.

Перейдем к точным определениям. Обозначим через ро модальный предикатный язык, содержащий счетное число индивидных переменных, счетное число n-местных предикатных букв для всякого натурального n, логические связки $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\bot$, $\Box$, кванторы всеобщности по индивидным переменным, скобки и запятую. Формулы в этом языке строятся обычным образом. В дальнейшем при записи ро-формул мы будем использовать и другие связки и кванторы, определяя их как обычные сокращения основных, а именно: $\neg\varphi = \varphi \to \bot$, $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, $\exists x\, \varphi = \neg\forall x\, \neg\varphi$, $(\varphi = \neg\Box\neg\varphi$, $\Box^{+}\varphi = \varphi \wedge \Box\varphi$.

Шкалой Крипке будем называть пару $F = \langle W, R\rangle$, где W – непустое множество, а R – бинарное отношение на W. Элементы множества W будем называть мирами, а отношение R – отношением достижимости. Модель Крипке представляет собой четверку $M = \langle W, R, D, I\rangle$, где $\langle W, R\rangle$ – шкала, D – функция, сопоставляющая каждому миру $w \in W$ непустое множество $D(w)$, называемое предметной областью этого мира, причем если $w_1 R w_2$, то $D(w_1) \subseteq D(w_2)$, I – интерпретация предикатных букв в мирах множества W, т.е. функция, сопоставляющая каждой n-местной предикатной букве P и каждому миру w некоторое n-местное отношение $I(P,w)$ на множестве $D(w)$.

Пусть α – интерпретация предметных переменных в модели M, т.е. функция, сопоставляющая каждой предметной переменной x языка ро некоторый элемент $\alpha(x) \in \bigcup\{D(w) : w \in W\}$. Определим отношение значимости ро-формул в мирах модели M при интерпретации α, при этом если формула φ значима в мире w модели M при интерпретации α, то будем писать (M,w) ё $\varphi[\alpha]$:

(M,w) Ó $\bot[\alpha]$	всегда;	
(M,w) ё $P(x_1, \ldots, x_n)[\alpha]$	k	если $\alpha(x_1) \in D(w), \ldots, \alpha(x_n) \in D(w)$, то $\langle \alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)\rangle \in I(P,w)$;

$(M,w) \models \varphi \wedge \psi\,[\alpha] \iff (M,w) \models \varphi[\alpha]$ и $(M,w) \models \psi[\alpha]$;

$(M,w) \models \varphi \vee \psi\,[\alpha] \iff (M,w) \models \varphi[\alpha]$ или $(M,w) \models \psi[\alpha]$;

$(M,w) \models \varphi \to \psi\,[\alpha] \iff (M,w) \not\models \varphi[\alpha]$ или $(M,w) \models \psi[\alpha]$;

$(M,w) \models \forall x\, \varphi[\alpha] \iff (M,w) \models \varphi[\beta]$ для всякой интерпретации β, совпадающей с α на всех переменных, кроме, быть может, x;

$(M,w) \models \Box\varphi[\alpha] \iff (M,w') \models \varphi[\alpha]$ для всякого мира w' такого, что wRw'.

Если $x_1, \dots , x_n$ – список всех свободных переменных формулы φ, $\alpha(x_1) = a_1, \dots , \alpha(x_n) = a_n$ и $a_1, \dots , a_n \in D(w)$, то вместо обозначения $(M,w) \models \varphi[\alpha]$ будем использовать обозначение $(M,w) \models \varphi[a_1, \dots , a_n]$. Формулу φ считаем значимой в мире w модели M, если она значима в этом мире при всякой интерпретации α такой, что $\alpha(x) \in D(w)$ для всякой свободной переменной x формулы φ. Говорим, что формула φ значима в модели M, если она значима в каждом мире этой модели; говорим, что φ значима в шкале F, если φ значима во всякой модели, определенной на этой шкале.

Пусть C – класс шкал Крипке, отношение достижимости в которых иррефлексивно, транзитивно и удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, т.е. никакая шкала $F = \langle W, R\rangle$ класса C не содержит бесконечных цепей вида $w_1\, R\, w_2\, R\, w_3\, R \dots$. Обозначим через $\mathbf{QGL}^{sem}$ логику класса C, т.е. множество ро-формул, значимых во всех шкалах из C. В пропозициональном случае логикой класса C является логика Геделя–Леба **GL**. Сразу отметим, что в приведенных ниже рассуждениях вместо класса C можно рассматривать некоторые естественные его подклассы; так, например, можно ограничивать ширину шкал и рассматривать подклассы C, состоящие из шкал ширины 1, ширины 2, ширины 3 и т.д. В этом смысле наименьшим естественным подклассом класса C является класс шкал ширины 1, состоящий из всех линейных шкал класса C. В пропозициональном случае этот класс определяет логику **GLLin**, которая дедуктивно может быть задана добавлением к аксиоматике **GL** аксиомы линейности:

$$\mathbf{GLLin} \;=\; \mathbf{GL} \oplus \Box(\Box^{+}p \to q) \vee \Box(\Box^{+}q \to p).$$

Модальную предикатную логику линейных шкал класса C обозначим через $\mathbf{QGLLin}^{sem}$.

Рассмотрим класс C^{*}, состоящий из шкал Крипке, отношение достижимости в которых рефлексивно, транзитивно, антисимметрично и удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей:

шкалы не должны содержать бесконечно возрастающих цепей, состоящих из различных точек. Модальную предикатную логику класса C^* обозначим через $\mathbf{QGrz}^{sem}$. В пропозициональном случае класс C^* определяет логику Гжегорчика **Grz**. Через $\mathbf{QS4.3Grz}^{sem}$ обозначим модальную предикатную логику класса всех линейных шкал из C^*. В пропозициональном случае класс линейных шкал C^* определяет логику

$$\mathbf{S4.3Grz} \quad = \quad \mathbf{Grz} \oplus \Box(\Box p \to \Box q) \vee \Box(\Box q \to \Box p).$$

Наша цель состоит в том, чтобы доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Логики* $\mathbf{QGL}^{sem}$, $\mathbf{QGLLin}^{sem}$, $\mathbf{QGrz}^{sem}$, $\mathbf{QS4.3Gzr}^{sem}$ *неперечислимы.*

Для доказательства неперечислимости этих логик достаточно погрузить в каждую из них некоторое неперечислимое множество. В качестве такого множества возьмем классическую логику конечных областей $\mathbf{QCl}_{fin}$. Будем считать, что формулы этой логики строятся в языке о, который отличается от определенного выше языка ро лишь тем, что не содержит символа $\Box$, т.е. о – это обычный язык логики предикатов.

Мы построим погружение логики $\mathbf{QCl}_{fin}$ в логику $\mathbf{QGL}^{sem}$, т.е. опишем эффективно вычислимую функцию f, сопоставляющую каждой о-формуле φ некоторую ро-формулу $f(\varphi)$ и удовлетворяющую следующему условию:

$$\varphi \in \mathbf{QCl}_{fin} \quad \Leftrightarrow \quad f(\varphi) \in \mathbf{QGL}^{sem}.$$

Эта же функция будет заодно погружением $\mathbf{QCl}_{fin}$ и в логику $\mathbf{QGLLin}^{sem}$. Небольшая модификация функции f позволяет обосновать справедливость теоремы 1 и для других двух логик, но эту часть доказательства мы опускаем, поскольку оно не содержит принципиально новой идеи, но требует некоторых дополнительных технических выкладок.

Для дальнейших рассуждений зафиксируем некоторую произвольную замкнутую о-формулу φ.

Первое, что нам нужно сделать, – это научиться описывать условие конечности предметных областей. Как отмечалось выше, условие конечности не является первопорядково определимым. Но в логике $\mathbf{QGL}^{sem}$ имеется в некотором виде и непервопорядковое условие – условие обрыва возрастающих цепей, которому удовлетворяют все шкалы этой логики. Воспользуемся этим условием, чтобы описать подходящим образом конечность предметных областей.

Пусть E – некоторая бинарная предикатная буква языка ро, не входящая в φ. Обозначим

$$Eq \quad = \quad \Box^+[\forall x\, E(x,x) \wedge \forall x \forall y\, (E(x,y) \to E(y,x)) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y \forall z\, (E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z))]$$

и ниже вместо $E(x,y)$ будем писать $x \approx y$. Выполнимость в некотором мире w формулы Eq означает, что предметные области мира w и достижимых из w миров разбиваются на классы эквивалентности по отношению $\approx$. Запишем некоторые условия, выполнение которых будет означать, что эти классы упорядочены так же, как упорядочены натуральные числа с помощью отношения «меньше». Пусть Q – унарная, а G и S – бинарные предикатные буквы, не входящие в формулу φ. Смысл, который мы хотим вложить в буквы G и S, следующий:

$$G(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad «x \text{ меньше } y»;$$
$$S(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad «y \text{ следует за } x».$$

Буква Q понадобится нам для того, чтобы «помечать» миры индивидами; считаем, что мир w модели $M = \langle W, R, D, I\rangle$ «помечен» индивидом $a \in W$, если (M,w) ё $Q[a]$. То, какую роль будут играть эти «метки», станет ясно чуть ниже.

Опишем условие бесконечности предметной области:

$$\forall x \exists y\, G(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z\, (G(x,y) \wedge G(y,z) \to G(x,z)) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y\, (G(x,y) \to \neg G(y,x)). \qquad (1)$$

Запишем условие линейной упорядоченности классов эквивалентности по G:

$$\Box^+\forall x \forall y\, [\neg(x \approx y) \leftrightarrow (G(x,y) \vee G(y,x))]. \qquad (2)$$

Выполнение следующего условия будет гарантировать, что отношение G между всякими двумя индивидами сохраняется в последующих мирах:

$$\Box^+\forall x \forall y\, [(G(x,y) \to \Box G(x,y)) \wedge (\neg G(x,y) \to \Box\neg G(x,y))]. \qquad (3)$$

Опишем S:

$$\Box^+\forall x \forall y\, [S(x,y) \leftrightarrow (G(x,y) \wedge \forall z\, \neg(G(x,z) \wedge G(z,y))]. \qquad (4)$$

Следующая формула означает существование «нуля», который будет определять наименьший по G класс эквивалентности:

$$\exists x\, \Box^+\forall y\, \neg S(y,x). \qquad (5)$$

Очередное условие, которое нам понадобится, состоит в том, что для всякого элемента существует непосредственно следующий за ним по G и для всякого элемента, отличного от наименьшего по G, существует его непосредственный предшественник по G:

$$\Box^{+}\forall x\exists y\, S(x,y) \wedge \Box^{+}\forall x\, (\exists y\, G(y,x) \to \exists y\, S(y,x)). \tag{6}$$

Выполнение формул (1)–(6) означает, что классы эквивалентности по отношению $\approx$ оказываются линейно упорядоченными с помощью G, причем это упорядочение очень похоже на упорядочение натуральных чисел по отношению «меньше» с той лишь разницей, что получившееся упорядочение пока может содержать бесконечно убывающие цепочки. Этот недостаток можно исправить с помощью Q и того факта, что шкалы класса C не содержат бесконечно возрастающих цепей.

Запишем условие, состоящее в том, каждый мир, достижимый из данного, оказался «помечен» некоторым индивидом:

$$\Box\exists x\, Q(x). \tag{7}$$

Пусть, кроме того, «метка» для каждого мира единственна с точностью до эквивалентности; соответствующее условие выглядит так:

$$\Box\forall x\forall y\, [(Q(x) \wedge Q(y) \to x \approx y) \wedge (x \approx y \wedge Q(x) \to Q(y))]. \tag{8}$$

Следующее условие будет гарантировать, что «метки» не повторяются два раза в одной цепочке миров:

$$\Box\forall x\, (Q(x) \to \Box\neg Q(x)). \tag{9}$$

Теперь согласуем порядок следования «меток» с порядком G. Для этого запишем такое условие:

$$\Box\forall x\forall y\, [Q(x) \to ((Q(y) \leftrightarrow G(y,x))]. \tag{10}$$

Наконец, потребуем, чтобы каждый индивид данного мира являлся «меткой» для некоторого мира, достижимого из данного. Этого можно достичь с помощью следующей формулы:

$$\forall x\, (Q(x). \tag{11}$$

Обозначим через A конъюнкцию формул (1)–(11). Нетрудно видеть, что конъюнктивные члены (7)–(11) этой формулы обеспечивают отсутствие бесконечно убывающих по G цепей в линейном упорядочении классов эквивалентности по $\approx$, полученном благодаря конъюнктивным членам (1)–(6). Действительно, пусть $\langle W, R\rangle \in C$. Тогда наличие бесконечно убывающей по G цепочки индивидов $\ldots\, G\, a_3\, G\, a_2\, G\, a_1$ в предметной области мира w модели $M = \langle W, R, D, I\rangle$, в котором выполняется A, означало бы достижимость из w бесконечно возрастающей цепочки миров $w\,R\,w_1\,R\,w_2\,R\,w_3\,R\,\ldots$, где w_k ё$Q[a_k]$. А последнего не может быть в силу определения класса C.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если формула $Eq \wedge A$ выполнима в мире w модели $M = \langle W, R, D, I\rangle$, определенной на шкале класса C, то множество $D(w)$ разбивается с помощью $\approx$ на линейно упорядоченное с помощью G семейство классов эквивалентности, изоморфное множеству натуральных чисел с отношением «меньше».*

Нам важно то, что множество получающихся за счет выполнения формулы A классов эквивалентности обладает следующим свойством: число классов эквивалентности, предшествующее по G некоторому фиксированному классу, конечно. Вот, по сути, и конечные области.

Пусть x – индивидная переменная, не встречающаяся в φ. Заменим в φ каждую подформулу вида $\forall y\ \psi$ на подформулу вида $\forall y\ (G(y,x) \vee y \approx x \to \psi)$ и получившуюся формулу обозначим через $\varphi^*(x)$. Рассмотрим формулу $\forall x\ \varphi^*(x)$. Легко понять, что если предметная область некоторого мира разбита на *одноэлементные* классы эквивалентности так, как того требует выполнение формулы A, то справедливость в этом мире условия, записанного в виде формулы $\forall x\ \varphi^*(x)$ означает, что формула φ верна во всякой конечной классической модели.

Осталось добавить условие, выполнение которого позволяло бы считать указанные классы одноэлементными. Пусть элементы каждого из таких классов будут неразличимы для формулы $\forall x\ \varphi^*(x)$. Для этого достаточно описать тот факт, что каждая предикатная буква, входящая в φ, удовлетворяет аксиомам равенства, где вместо равенства используется символ $\approx$. Обозначим через $Ax(\varphi)$ универсальное замыкание конъюнкции всех таких аксиом и положим

$$f(\varphi)\ =\ Eq \wedge A \wedge Ax(\varphi) \to \forall x\ \varphi^*(x).$$

Предложение 2. *Для всякой О-формулы φ справедлива следующая эквивалентность:*

$$\varphi \in \mathbf{QCl}_{fin} \quad \Leftrightarrow \quad f(\varphi) \in \mathbf{QGL}^{sem}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \notin \mathbf{QCl}_{fin}$. Тогда φ опровергается в некоторой классической модели с конечной предметной областью. Можем считать, что предметная область этой модели состоит из натуральных чисел от 0 до n. Рассмотрим шкалу $F = \langle W,R\rangle$, где $W =$ Á $\cup \{\omega\}$, а R – отношение «больше» на Á, доопределенное на W следующим образом: $\omega R n$ для всякого $n \in$ Á. Заметим, что в F

нет бесконечно возрастающих цепей, поэтому $F \in C$. Определим на F модель $M = \langle W, R, D, I\rangle$ следующим образом. Для всякого $w \in W$ положим $D(w) =$ Á, а интерпретацию I зададим так, чтобы для всяких $m, n \in$ Á и $w \in W$ были выполнены следующие условия:

$$
\begin{array}{lcl}
(M,w)\,\text{ё}\, m \approx n & \Leftrightarrow & m = n; \\
(M,w)\,\text{ё}\, R[m,n] & \Leftrightarrow & m < n; \\
(M,w)\,\text{ё}\, S[m,n] & \Leftrightarrow & n = m + 1; \\
(M,w)\,\text{ё}\, Q[n] & \Leftrightarrow & w = n,
\end{array}
$$

кроме того, предикатные буквы, входящие в φ, в мире ω на элементах $0, \dots, n$ проинтерпретируем точно так же, как они были проинтерпретированы в модели, опровергающей формулу φ. В остальном модель M произвольна. Не составляет труда проверить, что (M,ω) ё $Eq \wedge A \wedge Ax(\varphi)$ и (M,ω) Ó $\varphi^*[n]$. Следовательно, (M,ω) Ó $f(\varphi)$, т.е. $f(\varphi) \notin \mathbf{QGL}^{sem}$.

Пусть теперь формула $Eq \wedge A \wedge Ax(\varphi) \to \forall x\ \varphi^*(x)$ опровергается в мире w некоторой модели $M = \langle W, R, D, I\rangle$, определенной на шкале класса C. Покажем, что в этом случае формула φ опровергается в некоторой классической модели с конечной предметной областью.

Так как в w справедливы формулы Eq и A, то в силу сформулированного выше предложения множество $D(w)$ разбивается с помощью $\approx$ на линейно упорядоченное с помощью G семейство классов эквивалентности, изоморфное множеству натуральных чисел с отношением «меньше». Выберем из каждого класса по одному элементу, получим последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ такую, что для всякого натурального числа k выполняется отношение (M,w) ё $S[a_k, a_{k+1}]$. Пусть P — m-местная предикатная буква, входящая в φ. Поскольку (M,w) ё $Ax(\varphi)$, то

$$(M,w)\,\text{ё}\,\mathrm{P}[a_{i_1}, \dots, a_{i_m}] \leftrightarrow \mathrm{P}[b_{i_1}, \dots, b_{i_m}],$$

где (M,w) ё $a_n \approx b_n$ для всякого $n \in$ Á.

Поскольку в мире w модели M опровергается формула $\forall x\ \varphi^*(x)$, то (M,w) Ó $\varphi^*[c]$ для некоторого $c \in D(w)$. Ясно, что (M,w) ё $c \approx a_n$ для некоторого $n \in$ Á и что в этом случае (M,w) Ó $\varphi^*[a_n]$. Пусть $U = \{a_0, \dots, a_n\}$ и пусть I_U — ограничение интерпретации I на область U. Пара $\langle U, I_U\rangle$ в этом случае является классической моделью безмодального фрагмента языка ро. Индукцией по построению подформулы $\psi(y_1, \dots, y_k)$ формулы φ несложно доказать, что для любых $b_0, \dots, b_n$ таких, что для всякого $i \in \{0, \dots, n\}$ справедливо отношение (M,w) ё $a_i \approx b_i$, имеет место эквивалентность

$$(M,w) \text{ ё } \psi^*[a_n, b_{i_1}, \dots, b_{i_k}] \quad \Leftrightarrow \quad \langle U, I_U \rangle \text{ ё } \psi[a_{i_1}, \dots, a_{i_k}],$$

где $\psi^*(x)$ получается из ψ с помощью того же преобразования, с помощью которого $\varphi^*(x)$ получается из φ. В частности, получаем, что $\langle U, I_U \rangle$ Ó φ, а в силу конечности множества U заключаем, что $\varphi \notin \mathbf{QCl}_{fin}$. □

Из предложения 2 теоремы Трахтенброта о неперечислимости логики $\mathbf{QCl}_{fin}$ вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Логика* $\mathbf{QGL}^{sem}$ *неперечислима.*

Если проанализировать доказательство предложения 2, то можно сделать вывод о том, что аналогичное утверждение будет справедливо, если вместо логики всего класса C рассматривать логику некоторого его подкласса C', содержащего хотя бы одну шкалу с бесконечно убывающей цепочкой миров, достижимой из некоторого мира, или шкалу со сколь угодно длинными конечными цепями миров, достижимыми из некоторого мира. То же касается и логик аналогично устроенных подклассов класса C^*.

Зафиксируем произвольный класс C' такого вида. Обозначим через $L(C')$ логику класса C', т.е. множество ро-формул, значимых во всех шкалах этого класса.

Замечание 1. *Логика* $L(C')$ *неперечислима.*

Теперь обратимся к утверждению теоремы 1. Принимая во внимание тот факт, что логика **QCl** является перечислимой, заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Логики* $\mathbf{QGL}^{sem}$, $\mathbf{QGLLin}^{sem}$, $\mathbf{QGrz}^{sem}$, $\mathbf{QS4.3Gzr}^{sem}$ *не сводят ся рекурсивно к* **QCl**.

Отметим, что справедливо также и следующее обобщение следствия 2.

Замечание 2. *Логика* $L(C')$ *не сводит ся рекурсивно к* **QCl**.

Рассмотрим модальные предикатные логики, которые являются предикатными вариантами логик **GL**, **GLLin**, **Grz**, **S4.3Grz**, но определяются не семантически, а аксиоматически. Введем следующее обозначение: для множеств ро-формул Σ_1 и Σ_2 через $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ обозначим наименьшее множество формул, содержащее $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ и замкнутое относительно правила *modus ponens*, правила подстановки, правила обобщения и правила Геделя. Будем считать, что язык логик **GL**, **GLLin**, **Grz**, **S4.3Grz** является пропозициональным фрагментом языка ро. Пусть

$$\mathbf{QGL} = \mathbf{QCl} \oplus \mathbf{GL}; \qquad \mathbf{QGLLin} = \mathbf{QCl} \oplus \mathbf{GLLin};$$
$$\mathbf{QGrz} = \mathbf{QCl} \oplus \mathbf{Grz}; \qquad \mathbf{QS4.3Grz} = \mathbf{QCl} \oplus \mathbf{S4.3Grz}.$$

Заметим, что если все теоремы логики **QGL** значимы в некоторой шкале Крипке F, то отношение достижимости в этой шкале иррефлексивно, транзитивно и удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, т.е. $F \in C$. С другой стороны, ясно, что если $F \in C$, то в F значимы все формулы логики **QGL**. Таким образом, класс шкал логики **QGL** совпадает с C. Рассуждая аналогичным образом, нетрудно понять, что класс шкал логики **QGLLin** совпадает со множеством всех линейных шкал класса C, класс шкал логики **QGrz** — с классом C^*, а класс шкал логики **QS4.3Grz** — со множеством всех линейных шкал класса C^*. Поскольку логики **QGL**, **QGLLin**, **QGrz**, **QS4.3Grz** перечислимы, то в силу сделанного наблюдения, касающегося классов шкал этих логик, а также в силу теоремы 1, получаем, что эти логики не полны по Крипке.

Следствие 3. *Логики* **QGL**, **QGLLin**, **QGrz**, **QS4.3Grz** *не полны по Крипке.*

Вообще говоря, справедливо и следующее, более общее, утверждение, касающееся неполноты по Крипке целых классов модальных предикатных логик.

Замечание 3. *Пусть рекурсивно аксиоматизируемая логика L такова, что* $\mathbf{QGL} \subseteq L \subseteq \mathbf{QGLLin}$ *или* $\mathbf{QGrz} \subseteq L \subseteq \mathbf{QS4.3Grz}$. *Тогда L не полна по Крипке.*

Неполнота по Крипке предикатного варианта логики Геделя–Леба ранее была доказана в [4], где подробно обсуждаются это и некоторые другие свойства логики **QGL**.

Отметим, что в некоторых случаях рассматривают шкалы Крипке с постоянными областями, т.е. при определении семантики Крипке ограничиваются такими моделями на шкалах, в которых индивидные области всех миров модели совпадают. В этом случае теорема 1 все равно останется справедливой – логики соответствующих классов шкал опять оказываются неперечислимыми. Условие постоянства предметных областей описывается формулой $\mathbf{BF} = \forall x\, \Box P(x) \to \Box \forall x\, P(x)$: при фиксированной функции D эта формула справедлива в каждой модели Крипке $M = \langle W, R, D, I\rangle$, определенной на шкале $F = \langle W, R\rangle$, ровно в том случае, когда для всяких миров w_1 и w_2 таких, что $w_1 R w_2$, выполняется условие $D(w_1) = D(w_2)$. Принимая во внимание сказанное, можно, в частности, обосновать следующее утверждение: логики $\mathbf{QGL} \oplus \mathbf{BF}$, $\mathbf{QGLLin} \oplus \mathbf{BF}$, $\mathbf{QGrz} \oplus \mathbf{BF}$, $\mathbf{QS4.3Grz} \oplus \mathbf{BF}$ не полны по Крипке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крипке С.* Неразрешимость одноместного модального исчисления предикатов // Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974. С. 247–253.
2. *Рыбаков М.Н., Чагров А.В.* Стандартные переводы неклассических формул и относительная разрешимость логик // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 2000. Вып. XIV. С. 81–98.
3. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
4. *Montagna F.* The Predicate Modal Logic of Provability // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1984. Vol. 25. N 2. P. 179–189.
5. *Urquhart A.* The Undecidability of Entailment and Relevant Implication // The Journal of Symbolic Logic. 1984. Vol. 49. N 4. P. 1059–1073.
6. *Wolter F., Zakharyaschev M.* Decidable Fragments of First-Order Modal Logics // The Journal of Symbolic Logic. To appear.