Л. И. Мчедлишвили

ИСЧИСЛЕНИЯ ОТБРАСЫВАЕМЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НЕТРАДИЦИОННЫХ СИСТЕМ ПОЗИТИВНОЙ СИЛЛОГИСТИКИ

Abstract. *In [4] and [1] the set of formulae rejected in the Lukasievwicz`s caluculus of positive syllogistic was axiomatized. In this article we construct analogous adequate calculi of rejected formulae for the systems of positive syllogistic of Slupecki [3], Shepherdson [7; the system B] and Smirnov [5].*

Я.Лукасевичем в 30-е годы [1, 27], [4, 275], Е.Слупецким в 1946 г. [6,310] и В.А. Смирновым в 1981 г. [5] были построены разные формальные реконструкции ассерторической позитивной силлогистики Аристотеля (соответственно обозначим их через L, Sl и Sm). Параллельно изучался позитивно-силлогистический фрагмент исчисления классов, в котором суждения SaP и SeP вслед за Ф. Брентано без каких-либо ограничений понимаются как $S\subseteq P$ и $S\cap P=\varnothing$. Этот фрагмент был аксиоматизирован Дж.Шефердсоном в 1955 г. в виде системы B [7], [6, 310]. Исчисления Sl, Sm, L и B можно сформулировать 1) в едином языке, в котором формулы образуются из атомов вида SaP, SeP, SiP, SoP с помощью обычных пропозициональных связок, 2) на базе классического исчисления высказываний (PC), принимая в качестве аксиом *все частные случаи классических тавтологий*, 3) с общими исходными правилами вывода – правилом *подстановки* (переменного термина на место переменного термина), правилом *отделения антецедента (modus ponens)* и 4) со специальными силлогистическими *аксиомами*, которые выбираются из следующего списка формул:

1. $SeP \supset PeS$,	6. $\neg(SaP\wedge SeP)$,
2. $\neg SaP \equiv SoP$,	7. $SiP \supset SaS$,
3. $\neg SeP \equiv SiP$,	8. SaS,
4. $MaP\wedge SaM \supset SaP$,	9. $SiP \supset SiS$,
5. $MeP\wedge SaM \supset SeP$,	10. $SoP \supset SiS$;

при этом аксиомами Sl являются формулы 1–6, аксиомами Sm – формулы 1–6,7, аксиомами L – формулы 1–6,8 и аксиомами B – формулы 1–5,8,9,10. В каждом из этих исчислений понятия доказательства и вывода из гипотез определяются стандартно.

Изучая текст "Первой аналитики", Лукасевич обнаружил, что Аристотель для того, чтобы показать необщезначимость силлогистических форм и отвергнуть их, иногда вместо обычных опровергающих примеров, использует определенный логический прием отбрасывания, заключающийся в выводе необщезначимости одной формы из необщезначимости других форм, применяя при этом также формы, верность которых была им ранее доказана. Лукасевич обобщил аристотелевскую идею дедуктивного отбрасывания и предложил аксиоматизировать множество необщезначимых форм силлогистики (точнее, формул, не доказуемых в L). С этой целью Лукасевич совместно со Слупецким построил аксиоматическую систему отбрасываемых формул с единственной аксиомой отбрасывания

* 11. $PaM \wedge SaM \supset SiP$,

где "*" является знаком отбрасывания, аналогичным фрегевскому знаку утверждения, и следующими правилами отбрасывания: правило *обратной подстановки* (если отбрасывается результат подстановки в формулу F, то отбрасывается и сама формула F), правило *отделения консеквента, modus tollens* (если доказуема $F \supset G$, а G отбрасывается, то отбрасывается также F) и *правило Слупецкого* (если A и B – отрицательные атомы, а D – дизъюнкция атомов, то если отбрасываются $A \supset D$ и $B \supset D$, то отбрасывается также $A \wedge B \supset D$).

При применении правила *modus tollens* одна из посылок должна быть доказуемой в L формулой, т.е. отбрасывание (доказательство отбрасываемости) может содержать как ранее отброшенные, так и ранее доказанные формулы (для того, чтобы различать их, перед отбрасываемыми формулами будем писать индекс "*"). Поэтому на исчисление отбрасываемых формул Лукасевича–Слупецкого можно смотреть как на некое расширение исчисления L путем введения понятий "негативного" доказательства, т.е. отбрасывания, и отбрасываемой формулы, наряду с обычными понятиями "позитивного" доказательства и доказуемой формулы (за таким расширением сохраним то же обозначение "L", но в случаях, когда необходимо отличить первоначальное исчисление L от его расширения, для последнего будем использовать обозначение "*L"). Более точно понятие отбрасывания можно определить следующим образом.

Конечная последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$, где F_n и некоторые (возможно все) другие члены этой последовательности имеют индекс *, называется отбрасыванием, если и только если каждый член этой последовательности F_i удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

(1) F_i не имеет индекса * и F_i доказуема в L;

(2) F_i имеет индекс * и

(2.1) F_i является аксиомой отбрасывания,

(2.2) для некоторого $k < i$ F_k имеет индекс * и является результатом некоторой подстановки в F_i ,

(2.3) для некоторых k и $l < i$ $F_k = F_i \supset F_l$, F_k не имеет индекса и F_l имеет индекс *,

(2.4) F_i имеет вид $A \wedge B \supset D$, где A и B являются отрицательными атомами, а D – дизъюнкцией произвольных атомов, и для некоторых k и $l < i$ $F_k = A \supset D$, $F_l = B \supset D$ и как F_k , так и F_l имеют индекс *.

Отбрасывание является отбрасыванием его последней формулы.

Лукасевич многократно подчеркивает, что в L принимаются (доказываются) только общезначимые формулы, т.е. формулы, истинные для всех значений, встречающихся в них переменных, а в *L отбрасываются только необщезначимые формулы (*утверждения о корректности* исчислений L и *L), откуда следует утверждение *о несовместимости* метапредикатов доказуемости[1] и отбрасываемости:

$$\{F: \#_L F\} \cap \{ F: *_L F\} = \varnothing$$

Однако при доказательстве утверждений о корректности [1,§34] он пользуется лейбницевым понятием арифметической интерпретации силлогистического языка (и соответствующим понятием общезначимости), согласно которому значениями переменных терминов являются пары взаимно простых числе, а не общие термины или круги Эйлера (произвольные классы предметов), на которые он ссылается в связи с обсуждением других проблем.

В [1, §33] также доказано *утверждение о дополнительности* метатеоретических предикатов доказуемости и отбрасываемости: любая силлогистическая формула или доказуема или отбрасываема в L, т.е.

$$\{F: \#_L F\} \cup \{ F: *_L F\} = U,$$

где U – множество всех силлогистических формул. В доказательстве используется силлогистическая версия теоремы о конъюнктивной нормальной форме, согласно которой каждая силлогистическая формула эффективным способом может быть преобразована в равносильную конъюнкцию некоторых дизъюнкций атомарных формул, и далее для любой такой дизъюнкции определяется также эффективная процедура нахождения ее доказательства или отбрасывания в L. Из утверждения о дополнительности сле-

---

[1] Для предиката доказуемости используем символ "#".

дуют *полнота* исчислений L и *L: если F – формула, общезначимая в арифметической семантике Лейбница, то $\#_L$ F, в противном случае, * $_L$ F. Из эффективности доказательства утверждения о дополнительности совместно с утверждением о корректности следует *разрешимость проблемы общезначимости* в лейбницевом смысле.

Более естественную логическую семантику Лукасевич интуитивно подразумевал, однако ее явно использовал только фрагментарно при обсуждении частных проблем [1, с.155-157]. Слупецкий в более ранней работе (в ней доказаны все перечисленные результаты в качестве ответов на поставленные Лукасевичем проблемы) опирается именно на такую семантику – на интерпретацию силлогистического языка, в которой значениями переменных являются непустые классы предметов [4, с.293-295].

В настоящей работе предлагаются сопряженные с Sl, Sm и B формальные аксиоматические системы отбрасываемых формул *Sl, *Sm и *B и для них доказываются аналоги всех сформулированных выше метатеорем об L и * L, при этом, возвращаясь к подходу Слупецкого, в качестве семантической основы берутся понятия интерпретации с классами предметов в качестве значений переменных.

***

Упорядоченная пара (**D**, f) называется Sm-, L-, B-*интерпретацией*, а упорядоченная тройка (**D, R**, f) – Sl-*интерпретацией* языка позитивной силлогистики, если **D** – произвольное непустое множество, **R** – бинарное отношение на **D** (**R** $\subseteq$ **D** x **D**), а f – означивающая функция, отображающая множество переменных терминов силлогистического языка 1) в множество всех подмножеств множества **D** (в случае Sm-, L-, B-интерпретаций) и 2) в множество всех непустых подмножеств множества **D** (в случае L-интерпретации). В любой интерпретации I каждой силлогистической формуле приписывается одно из двух истинностных значений (И, Л), определяемое индуктивно по построению формулы. *Базисными пунктами* определения являются:

	в L- и B-интерпретациях	в Sm-интерпретациях
I (SaP) = И е. т. е.	$f(S) \subseteq f(P)$,	$f(S) \neq \varnothing$ и $f(S) \subseteq f(P)$,
I (SeP) = И е. т. е.	$f(S) \cap f(P) = \varnothing$,	$f(S) \cap f(P) = \varnothing$,
I (SiP) = И е. т. е.	$f(S) \cap f(P) \neq \varnothing$,	$f(S) \cap f(P) \neq \varnothing$,
I (SoP) = И е. т. е.	$f(S) - f(P) \neq \varnothing$,	$f(S) = \varnothing$ или $f(S) - f(P) \neq \varnothing$;

в Sl-интерпретациях

$f(S) \neq \varnothing$ и $f(S) \subseteq f(P)$ и $\forall_x(x \in f(S) \Rightarrow \exists y(y \in f(P)$ и $xRy))$,
$f(S) \cap f(P) = \varnothing$ или $\forall_x \forall_y(x \in f(S)$ и $y \in f(P) \Rightarrow {\sim}xRy$ и ${\sim}yRx)$,
$f(S) \cap f(P) \neq \varnothing$ и $\exists_x \exists_y(x \in f(S)$ и $y \in f(P)$ $(xRy$ или $yRx))$,
$f(S) \neq \varnothing$ или $f(S) - f(P) \neq \varnothing$ или $\exists_x(x \in f(S)$ и $\forall_y(y \in f(P) \Rightarrow xRy)$.

(индуктивные пункты формулируются в соответствии с таблицами истинности для пропозициональных связок). Понятия (Sl-, Sm-, L- и B-) общезначимости и выполнимосити определяются обычным образом[2].

(I) *Утверждение о корректности: любая доказуемая в* Sl, Sm, L, B *формула соответственно является:* Sl-, Sm-, L-, B- *общезначимой* (легко доказывается индукцией по длине доказательства формул).

В дальнейшем конъюнкцию K (соответственно, дизъюнкцию D) силлогистических атомов (*простую конъюнкцию, простую дизъюнкцию*) будем рассматривать как множество всех ее различных атомарных членов и применять соответствующие теоретико-множественные понятия.

Атом A называется BCS-выводимым из простой конъюнкции K (символически, $K\#\cdot A$), если существует конечная последовательность атомов $A_1, \ldots, A_n$ такая, что $A = A_n$ и каждый член этой последовательности A_i удовлетворяет следующему условию: 1) $A_i \in K$, или существуют h и j<i такие, что $A_h \wedge A_j \supset A_i$ получается подстановкой 2) из аксиомы 4 (Barbara), или 3) из аксиомы 3 (Celarent), или 4) существует j<i такое, что $A_j \supset A_i$ получается подстановкой из аксиомы 1 (conversio simplex e - суждения).

Простая конъюнкция K называется BCS-замкнутой (коротко, замкнутой), если $\{A: K \# \cdot A\} \subseteq K$ и, следовательно, если $K = \{A: K\# \cdot A\}$. Из этого определения непосредственно следует, что K является BCS-замкнутой, если и только если для любых переменных S, M и P выполняются условия: 1) если MaP, SaM $\in$ K, то SaP $\in$ K; 2) если MeP, SaM $\in$ K, то SeP $\in$ K; 3) если SeP $\in$ K, то PeS $\in$ K.

(II) *В каждом из исчислений* Sl, Sm, L, B *для любой простой конъюнкции* K *существует единственная доказуемо-эквивалент-*

---

[2] Сложность базисных правил истинности в семантике Sl – существенная особенность этого исчисления. В отличие от других рассматриваемых нами силлогистических систем, для Sl невозможно найти адекватную интерпретацию силлогистических атомов в исчислении одноместных предикатов первого порядка ($Pr^{(1)}$), иными словами, не существует функции, погружающей Sl в $Pr^{(1)}$. Дело в том, что неэквивалентных в Sl формул с $n \geq 1$ переменными терминами больше, чем неэквивалентных в $Pr^{(1)}$ формул с n переменными для одноместных предикатов и без свободных индивидных переменных [2,с.11-18], [3,с.29-34].

ная ей замкнутая простая конъюнкция, которую будем называть BCS-замыканием K и обозначать через K^c.

"Быть BCS-выводимым из", "быть замкнутым", "быть замыканием" являются эффективно проверяемыми понятиями.

Несовместимыми атомами называются:
в Sl: 1) SaP и SeP, 2) SaP и SoP, 3) SeP и SiP;
в Sm: 1), 2), 3), 4) SeS и SaP, 5) SeS и SiP, 6) SeS и PiS,
7) SoS и SaP, 8) SoS и PaS, 9) SoS и SiP, 10) SoS и PiS;
в L: 1), 2), 3), 11) SeS, 12) SoS;
в B: 2), 3), 5), 6), 12), 13) SeS и SoP
(где S и P – произвольные переменные).

Простая конъюнкция K называется Sl-, Sm-, L-, B-*противоречивой*, если K^c содержит несовместимые, соответственно, в Sl, в Sm, в L, в B атомы.

(III) *Основная лемма. Простая конъюнкция* K (Sl-, Sm-, L-, B-) *выполнима, если и только если* K *не является (соответственно,* Sl-, Sm-, L-, B-*) противоречивой.*

Прямая часть леммы доказывается легко: в каждом из наших исчислений доказуемо отрицание конъюнкции несовместимых в нем атомов, откуда следует доказуемость также и $\neg K$, а в силу утверждения о корректности, невыполнимость K, где K – противоречивая простая конъюнкция.

Обратное следование доказывается построением модели для K^c с непротиворечивым K. Соответствующая интерпретация определяется следующим образом.

Пусть $\mathbf{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ – список всех переменных, занимающих в K^c экзистенциальную позицию[3], $\mathbf{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ – список всех i-атомов, а $\mathbf{G} = \{B_1, \ldots, B_l\}$ – список всех o-атомов, входящих в K^c. Положим: $\mathbf{D}^0 = \{0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m\}$, если определяется Sl-, Sm- или L-интерпретация, и $\mathbf{D}^0 = \{0, n+1, \ldots, n+m, n+m+l\}$, если определяется B-интерпретация.

Каждой переменной P сопоставим некоторое множество

$$m(P) \subseteq \mathbf{D}^0:$$

1) если $P \in \mathbf{P}$, i – ее номер в $\mathbf{P}$, $A_{j1}, \ldots, A_{jk}$, – все атомы из списка $\mathbf{F}$, содержащие переменную P, а $B_{l1}, \ldots, B_{lh}$, – все атомы из списка $\mathbf{G}$, содержащие P в качестве субъекта, то $m(P) = \{i, n+j_1, \ldots,$

[3] Пусть K - замкнутая простая конъюнкция; L-экзистенциальную позицию занимают в K все переменные, встречающиеся в K; Sl- и Sm-экзистенциальную позицию занимают в K только переменные, содержащиеся в утвердительных атомах из K; и наконец, B-экзистенциальную позицию занимает в K переменная P, если для некоторого S в K входит 1) SiP или PiS, или 2) SoP, или 3) MaP с такой M, что K содержит MiS, SiM или MoS.

$n+j_k\}$, если определяется Sl-, Sm- или L-интерпретация, и $m(P) = \{n+j_1, ..., n+j_k, n+m+l_1, ..., n+m+l_h\}$, если определяется B-интерпретация;

2) если $P \notin \mathbf{P}$, то $m(P) = \varnothing$, если определяется Sl-, Sm- или B-интерпретация, и $m(P) = \{0\}$, если определяется L-интерпретация.

Положим, что для любой переменной P $f^\circ(P)= m(P) \cup m(S_1) \cup \ldots \cup m(S_p)$, где $S_1aP, \ldots, S_paP$ – все атомы, вхоящие в K^c с P в качестве предиката.

Определим $\mathbf{R}^\circ$: 1) если $SaP \in K^c$, а i – номер переменной P в **P**, то для любого $k \in f^\circ(s)$ $k\mathbf{R}^\circ i$; 2) если $SiP \in K$, а k и i являются номерами S и P в списке **P**, то $k\mathbf{R}^\circ i$.

$(\mathbf{D}^\circ, f^\circ)$, $(\mathbf{D}^\circ, \mathbf{R}^\circ, f^\circ)$ являются искомыми интерпретациями.

Используя дизъюнктивную нормальную форму силлогистических формул, в которой элиминированы все отрицания на основе законов контрадикторности (аксиомы 2 и 3), из основной леммы легко можно вывести *теоремы полноты* для каждого из исчислений Sl, Sm, L, B; однако мы будем следовать плану Лукасевича.

***

Исчисления отбрасываемых формул *Sl, *Sm и *B надстраиваются в разъясненном выше смысле на соответствующие исчисления Sl, Sm и B. Исходными правилами вывода в исчислениях *Sl, *Sm и *B являются те же, что в *L – обратная подстановка, отделение консеквента и правило Слупецкого, однако на последнее в *B налагается *дополнительное ограничение*: отрицательные атомы A и B и простая дизъюнкция D таковы, что если A или B имеет вид SoP, то другой из них не есть ни 1) SeS, ни 2) MeS или SeM с такой переменной M, что $SaM \in (D')^c$, ни 3) MeN с такими M и N, что $SaM \in (D')^c$ и $SaN \in (D')^c$, где D′ силлогистическое отрицание D[4].

Аксиомы отбрасывания:

*Sm: *11. $PaM \wedge SaM \supset SiP$,

*12. $SaS \supset PiP$;

*Sl: *13. $(SaS \wedge MaM \wedge PaP) \supset (PaM \wedge SaM \supset SiP)$,

[4] Пусть F – силлогистическая формула, не содержащая отличных от $\wedge$ и $\vee$ пропозициональных связок. Формулу, которая получается из F заменой в ней всех символов "$\wedge$" и "$\vee$" символами "$\vee$" и "$\wedge$", соответственно, и каждого атома контрадикторным атомом, будем называть силлогистическим отрицанием F и обозначать через F′. Очевидно, что F′ доказуемо-эквивалентна формуле $\neg F$. Силлогистическое отрицание простой дизъюнкции (конъюнкции) является простой конъюнкцией (дизъюнкцией).

*14. PaS ⊃ (SaS ⊃ PiP),

*15. (SaP ∧ PaP) ⊃ (MaS ∧ MaM ⊃ SaS);

*B: *16. (PiP ∧ SiS) ⊃ (PaM ∧ SaM ⊃ SiP),

*17. SiS ⊃ PiP

(понятия отбрасывания и отбрасываемой формулы определяются точно так, как в *L).

В дальнейшем существенно используются следующие свойства BCS-выводимости (при этом A и B – отрицательные атомы, C – атом, а K – произвольная простая конъюнкция):

(IV.1) K#·SeS, если и только если 1) SeS ∈ K, или 2) MeS ∈ K или SeM ∈ K с такой переменной M, что K#·SaM, или 3) MeN ∈ K с такими M и N, что K#·SaM и K#·SaN;

(IV.2) A∧B∧K #·C, если и только если A∧K#·C или B∧ K #·C (при утвердительном C правую часть равносильности можно усилить до K #·C);

(IV.3) A∧B∧K является противоречивой, если и только если противоречивой является A∧K или B∧K (в случае B-противоречивости A, B и K должны удовлетворять также следующему дополнительному условию: если A или B имеет вид SoP, то другой из них не есть ни 1) SeS, ни 2) MeS или SeM с такой M, что SaM∈ K^c, ни 3) MeN с такими M и N, что SaM∈ K^c и SaN∈ K^c).

(V) *Утверждение о корректности: любая отбрасываемая в* Sl, *в* Sm, *в* L, *в* B *формула соответственно является* Sl-, Sm-, L-, B-*опровержимой* (доказывается индукцией по длине отбрасывания формул).

Докажем только корректность правила Слупецкого. Пусть A и B – отрицательные атомы, D – дизъюнкция атомов, которые в случае исчисления *B удовлетворяют дополнительному условию, и предположим, что опровержимыми являются:

(1) A⊃D и (2) B⊃D;

тогда выполнимы их отрицания (3) A∧D′ и (4) B∧D′, но тогда в силу основной леммы (3) и (4) не являются противоречивыми, а в силу (IV.3) не является противоречивой также (5) A∧B∧D; используя опять основную лемму, заключаем, что (5) выполнима и, следовательно, опровержимо ее отрицание.

(6) A∧B⊃D.

Из утверждений о корректности (I) и (V) следует несовместимость метапредикатов доказуемости и отбрасываемости для каждого из исчислений Sl, Sm, L, B:

$$\{F: \#F\} \cap \{F: \#F\}=\varnothing.$$

В каждом из исчислений *Sl, *Sm, *L и *B можно *обобщить правило Слупецкого* следующим образом: если A_1, …, A_n – отрицательные атомы, а D – произвольная дизъюнкция атомов, то

если $*A_1 \supset D, \ldots, *A_n \supset D$, *то* $*A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset D$,
при этом, в случае исчисления *В, формулы $A_1, \ldots, A_n$, D удовлетворяют дополнительному обобщенному условию: для каждого атома $A_i (1 \leq i \leq n)$, если A_i имеет вид SoP, то никакой другой атом из $A_1, \ldots, A_n$ не есть ни 1) SeS, ни 2) MeS или SeM с такой переменной M, что $SaM \in (D')^c$, ни 3) MeN с такими M и N, что $SaM \in (D')^c$ и $SaN \in (D')^c$. Корректность обобщения доказывается индукцией по n ($n \geq 2$); в случае исчисления *В следует применить свойство (IV.2) с усиленной правой частью.

***

(VI) *Любая дизъюнкция атомов* D *в каждом из рассматриваемых исчислений* Sl, Sm, L, B *или доказывается, или отбрасывается.*

Доказательство разобьем на части.

(VI.1) D *состоит только из утвердительных атомов*. Тогда D 1) отбрасывается в Sl; 2) отбрасывается в Sm; 3) доказуема в L, если D содержит атомы вида SaS или SiS, и отбрасываема в L в противном случае; 4) доказуема в B, если D содержит атомы вида SaS, или атомы вида SiS и SaP (с одной и той же переменной S), и отбрасывается в B в противном случае.

Доказательство. Двучленные дизъюнкции, удовлетворяющие указанным условиям, в каждом случае отбрасываются, соответственно, с помощью следующих отбрасываемых формул:

в Sl и Sm : SiS,   в L : SiP

в B : SiS, SaP, $SiS \vee PaS$, $SiP \vee PaS$, $SaP \vee PaS$.

Если n-членная дизъюнкция $A_1 \vee \ldots \vee A_{n-1} \vee A_n$ удовлетворяет указанным условиям, то каждая из следующих ее двучленных поддизъюнкций

$A_1 \vee A_n, \ldots, A_{n-1} \vee A_n$, т.е. $A_1 \supset A_n, \ldots, A_{n-1} \supset A_n$,

также удовлетворяет указанным условиям и они отбрасываются; но тогда в каждом случае $A_1 \vee \ldots \vee A_{n-1} \vee A_n$ отбрасывается с помощью соответствующего обобщенного правила Слупецкого (в случае *В следует учесть, что A_n ($=(A_n)^c$) является отрицательным атомом).

(VI.2) D *состоит только из отрицательных атомов*. Тогда дизъюнкция D отбрасывается в каждом из наших исчислений *Sl, *Sm *L, *B. В самом деле, пусть D° получается из D подстановкой S вместо всех других пременных, входящих в D. Можно показать, что

$D° \supset SeS \vee SoS$ и $* SeS \vee SoS$

в каждом из наших исчислений. Но из этих формул с помощью modus tollens и обратной подстановки получаем отбрасывание для D.

(VI.3) D *состоит только из отрицательных атомов и единственного утвердительного атома* C. Каждая такая дизъюнкция доказуемо-эквивалентна некоторой импликации $A \supset C$, где A – BCS-замкнутая конъюнкция утвердительных атомов (если D_1, …, D_h – все отрицательные атомы, входящие в D, то $A = (D'_1 \wedge \ldots \wedge D'_h)^c$). Для доказательства приспособим метод Лукасевича, применяемый им в аналогичной ситуации [1, с.180-183]. Рассмотрим случаи:

(1) $C \in A$; тогда # $A \supset C$ в каждом из исчислении Sl, Sm, L и B.

(2) $C \notin A$:

(2.1) C имеет вид SaS; тогда $A \supset C$ 1) доказуема в L; 2) доказуема в B; 3) доказуема в Sm, если переменная S встречается в A, и отбрасываема в Sm, в противном случае; 4) отбрасываема в Sl. Докажем (2.1) только в части отбрасывания. Sm: пусть $B \supset C$ получается из $A \supset C$ подстановкой переменной P, отличной от S, вместо всех переменных, входящих в A, тогда начиная с формул # $PiP \supset B$ и * $PiP \supset SaS$ с помощью modus tollens и обратной подстановки отбрасываем $A \supset C$:

(a) # $PiP \supset B$

(b) # $(B \supset SaS) \supset (PiP \supset SaS)$((a), PC)

(c) $*$ $PiP \supset SaS$

(d) $*$ $B \supset SaS$ ((b), (c), modus tolleus)

(e) $*$ $A \supset SaS$ ((d), обратная подстановка).

Sl: пусть $B \supset C$ получается из $A \supset C$ подстановками переменной P, отличной от S, вместо всех таких переменных M, что $SaM \in A$ и, далее, переменной M, отличной от S и P, вместо всех остальных переменных. Легко показать, что

$SaP \wedge PaP \wedge MaS \wedge MaM \supset B$,

$*$ $SaP \wedge PaP \wedge MaS \wedge MaM \supset SaS$.

Опираясь на них можно отбросить $A \supset C$ точно так, как в предыдущем случае.

(2.2) C имеет вид SiS; тогда: $A \supset C$ 1) доказуема в L; 2) доказуема в Sm, если S встречается в A, и отбрасываема в Sm в противном случае; 3) доказуема в Sl, если A содержит атом вида MaS с некоторым M, и отбрасываема в Sl в противном случае; 4) доказуема в B, если A содержит атомы вида SiP, или PiS, или MiP и MaS, или PiM и MaS с некоторой переменной M, и отбрасываема в B в противном случае.

Доказательство (2.2) в части отбрасывания. Sm: * $A \supset C$ получается из соответствующего подслучая (2.1) в силу доказуемой равносильности $SiS \equiv SaS$. Далее, пусть $B \supset C$ получается подстановкой из $A \supset C$ переменной $P(\neq S)$ вместо всех переменных, отличных от S (в случае Sl) и переменной S вместо всех таких M, что $MaS \in A$, и переменной P ($\neq S$) вместо всех переменных, отличных от S. Можно показать, что

$$\text{в Sl} : \# \, SaP \wedge PaP \supset B, \qquad \text{в B} : \# \, SaP \wedge PiP \supset B,$$
$$* \, SaP \wedge PaP \supset SiS \qquad * \, SaP \wedge PiP \supset SiS.$$

С помощью этих формул можно отбросить $A \supset C$ в Sl и B так, как в предыдущих случаях.

(2.3) C имеет вид SaP с различными S и P. Тогда $A \supset C$ отбрасывается в каждом из рассматриваемых исчислений. В самом деле, пусть $B \supset C$ – результат следующих подстановок в $A \supset C$: сперва все такие переменные M, что $SaM \in A$, заменяются на S, а потом все отличные от S и P переменные – на P. Можно показать, что

$$\text{в Sl}: \# \, PaS \wedge PaP \wedge SaS \supset B$$
$$* \, PaS \wedge PaP \wedge SaS \supset SaP;$$
$$\text{в Sm и L}: \ \# \, PaS \supset B \quad \text{в B}: \quad \# \, PaS \wedge PiP \supset B,$$
$$* \, PaS \supset SaP; \qquad * \, PaS \wedge PiP \supset SaP;$$

В каждом подслучае с помощью этих формул отбрасываем $A \supset C$ так же, как в предыдущих случаях.

(2.4) C имеет вид SiP. Тогда $A \supset C$ а) доказуема в Sl, Sm и L, если A содержит атомы вида 1) SaP, или 2) PaS, или 3) PiS, или 4) MaP и MaS, или 5) MaP и SiM (или MiS), или 6) MiP (или PiM) и MaS, или 7) MaP, NaS и MiN (или NiM) для некоторых M и N, и отбрасывается в Sl, Sm и L в противном случае; в) доказуема в B, если A содержит атомы вида 3), или 5), иил 6), или 7) из указанного списка, и отбрасывается в противном случае.

Опять приведем только ту часть доказательства, которая касается отбрасывания. Пусть $B \supset C$ получается из $A \supset C$ подстановками: S вместо таких переменных M, что $MaS \in A$, P вместо таких M, что $MaP \in A$ и M вместо всех других переменных, отличных от S и P. Можно показать, что

$$\text{в Sl}: \# \, SaS \wedge PaP \wedge MaM \wedge SaM \wedge PaM \supset B,$$
$$* \, SaS \wedge PaP \wedge MaM \wedge SaM \wedge PaM \supset SiP;$$
$$\text{в Sm и L}: \#SaM \wedge PaM \supset B,$$
$$* \, SaM \wedge PaM \supset SiP;$$
$$\text{в B}: \# \, SiS \wedge PiP \wedge PaM \wedge SaM \supset B,$$
$$* \, SiS \wedge PiP \wedge PaM \wedge SaM \supset SiP.$$

Из этих формул в каждом подслучае получаем отбрасывание формулы $A \supset C$ так же, как в предыдущих случаях.

(VI.4) D *состоит из отрицательных атомов и более чем одного утвердительных атомов* $C_1, \ldots, C_k$. Всякая такая дизъюнкция доказуемо-эквивалентна следующей дизъюнкции импликаций:

$$(A \supset C_1) \vee \ldots \vee (A \supset C_k),$$

где A – определяется так же, как в предыдущем случае. Если хотя бы для одного i ($1 \le i \le k$) $A \supset C_i$ доказуема в каком-либо из исчислений Sl, Sm, L и B, то в силу PC в том же исчислении будет доказуемой и D. Если же $A \supset C_i$ недоказуема ни для какого i, тогда в силу (VI.3) $A \supset C_i$ отбрасываема для каждого i и, следовательно, в силу PC в том же исчислении отбрасываемы

$$C'_1 \supset A', \ldots, C'_k \supset A'.$$

В случае исчислений Sl, Sm *и* L с помощью обобщенного правила Слупецкого из этих формул получаем, что отбрасывается также

$$C'_1 \wedge A', \ldots \wedge C'_k \supset A',$$

что доказуемо-эквивалентна D. В случае же исчисления B в этой ситуации имеются две разные возможности. Если для каких-либо i и j ($1 \le i, j \le k$) C_i имеет вид SiS, а C_j – вид SaP с одной и той же S, то $C'_1 \wedge \ldots \wedge C'_k \supset A'$ доказуема и, следовательно, доказуема D. А когда это условие не выполняется, так как A′ состоит из отрицательных атомов, выполняется ограничивающее условие для применения обобщенного правила Слупецкого и по этому правилу заключаем, что в B отбрасывается также $C'_1 \wedge \ldots \wedge C'_k \supset A'$ и, следовательно, отбрасывается D.

(VII) *Утверждение о дополнительности: любая силлогистическая формула в каждом из исчислений* Sl, Sm, L *и* B *или доказывается или отбрасывается* и, таким образом,

$$\{F{:}\ \#\ F\} \cup \{F{:}\ \#\ F\} = U,$$

где U – все множество силлогистических формул.

Доказательство. Пусть $D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$ – доказуемо-эквивалентная формуле F ее н.к.ф., в которой элиминированы все отрицания согласно законам контрадикторности (аксиомы 2 и 3). (VII) достаточно доказать для таких $D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$. Имеются две возможности: 1) доказуемы все D_i ($1 \le i \le n$); тогда, в силу PC, доказуема и вся конъюнкция $D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$, 2) некоторая D_i не является доказуемой; тогда, поскольку $D_{1, \ldots,} D_n$ простые дизъюнкции, в силу (VI) отбрасывается D_i и опять, в силу PC, отбрасывается и вся конъюнкция $D_1 \wedge \ldots \wedge D_n$.

Из утверждений о коректности и дополнительности следует *полнота* каждого члена пары сопряженных исчислений (Sl, *Sl), (Sm, *Sm), (L, *L) и (B, *B) относительно Sl-, Sm-, L- и B-общезначимости, соответственно, а также *разрешимость* для этих понятий общезначимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лукасевич Я.* Аристотилевская силлогистика с точки зрения современой формальной логики. М., 1959.

2. *Мчедлишвили Л.И.* Ассерторическая силлогистика Аристотеля и логика одноместных предикатов // Методы логических исследований. Тбилиси, 1987, с. 11-18.
3. *Мчедлишвили Л.И.* Нормальные формы в силлогистике // Семантический анализ неклассической логики. Тбилиси, 1991. С. 29-34.
4. *Slupecki J*. On Aristotelian Syllogistic // Studia Philosophica, 1949/50 (4). P. 275-300.
5. *Смирнов В. А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии, Киев. 1981.
6. *Prior A.N.* Formal Logic. Oxford, 1962 (Appendix I).
7. *Shepherdson J.C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // JSL, 21 (1956), no 2. P. 137-147.