Л.Л.Максимова

НЕЯВНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ В ПАРАНЕПРОТИВОРЕЧИВЫХ РАСШИРЕНИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ[1]

Abstract. *The family E(J) of extensions of Johansson's minimal logic J can be divided into two disjoint parts: paraconsistent logics and superintuitionistic logics. We apply the results and methods found in our study of super-intuitionistic logics to paraconsistent logics. We obtain the full description of paraconsistent extensions of the logic JE' containing J, which have the interpolation property CIP or the projective Beth property PBP. In addition, we find some necessary condition for a logic in E(J) to have PBP or CIP.*

1. Введение

Теория паранепротиворечивости, возникшая в 70-е годы и находившаяся в русле интересов В.А.Смирнова [1], особенно активно развивается в настоящее время. Теории, основанные на паранепротиворечивых логиках, могут содержать в себе противоречие и при этом не обязательно совпадать с множеством всех формул.

Мы рассматриваем семейство PC(J) паранепротиворечивых расширений минимальной логики J Йохансона и исследуем проблему описания логик из этого семейства, обладающих проективным свойством Бета [2] или интерполяционным свойством.

Семейство E(J) всех логик, содержащих J, включает в себя семейство E(Int) суперинтуиционистских логик, чья теория достаточно хорошо изучена. Паранепротиворечивые логики из E(J) – это в точности логики, не входящие в E(Int).

В [3] был найден полный список суперинтуиционистских логик с проективным свойством Бета PBP: их оказалось 16, включая противоречивую логику; восемь из них обладают интерполяционным свойством CIP. Кроме того, оба свойства оказались разрешимыми на классе суперинтуиционистских логик [4, 5]. Это означает, что существует алгоритм, который для любого конечного множества *Ax* схем аксиом распознает, обладает ли нужным свойством логика Int+*Ax*, полученная добавлением новых схем аксиом к аксиомам интуиционистской логики Int. Аналогичные результаты доказаны в [6] для позитивных логик, содержащих позитивный фрагмент интуиционистской логики. Более точно,

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант 00-03-00108

существуют в точности семь позитивных логик с PBP, из них четыре логики имеют CIP; оба свойства PBP и CIP разрешимы на классе позитивных логик.

На первый взгляд может показаться, что разрешимость свойства легко следует из конечности числа логик, обладающих этим свойством. На самом деле это далеко не так, потому что одна и та же логика допускает бесконечно много аксиоматизаций. Известно, что в общем случае проблема аксиоматизации неразрешима.

Мы применим результаты статей [3,6] для доказательства следующих утверждений:

1. Существуют в точности шесть паранепротиворечивых позитивно аксиоматизируемых расширений логики J с PBP, из них три логики обладают интерполяционным свойством.

2. Логика J+$\perp$ имеет точно шесть паранепротиворечивых расширений с PBP, из них три имеют CIP.

3. Если логика L из E(J) имеет CIP или PBP, то обе логики L+$\perp$ и L+Int обладают тем же свойством.

4. Для любых логик L из E(J+$\perp$) и L' из E(Int), их пересечение имеет PBP (или CIP) тогда и только тогда, когда обе логики имеют PBP (соответственно CIP).

5. Проективное свойство Бета и интерполяционное свойство разрешимы в семействе позитивно аксиоматизируемых расширений логики J и в семействе всех расширений паранепротиворечивой логики J+$(\perp\vee(\perp\Rightarrow A))$.

2. Определения

Пусть P – список переменных. Через $A(P)$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в P. Говорим, что исчисление L обладает *проективным свойством Бета PBP*, если для любой формулы $A(P,Q,x)$ из выводимости в L формулы

$A(P,Q,x)\&A(P,Q',y)\Rightarrow(x\Leftrightarrow y)$

следует выводимость $A(P,Q,x)\Rightarrow(x\Leftrightarrow B(P))$ для подходящей формулы $B(P)$ (здесь P,Q,Q' - попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие переменных x и y); *свойство Бета BP* определяется как частный случай PBP при пустом Q. Формула $B(P)$ называется *явным определением* x *в* L.

Следуя [7], можно вывести PBP из *интерполяционного свойства CIP,* определенного следующим образом (где списки P,Q,R попарно не пересекаются):

CIP. Если $A(P,Q)\Rightarrow B(P,R)$ выводима в L, то существует такая формула $C(P)$, что обе формулы $A(P,Q)\Rightarrow C(P)$ и $C(P)\Rightarrow B(P,R)$ выводимы в L.

По аналогии с [8] можно доказать, что все позитивные логики, рассматриваемые в данной статье, и все расширения логики J обладают свойством Бета BP.

Отметим, что приведенные выше формулировки свойств Бета и интерполяционного свойства предполагают, что язык содержит по крайней мере одну пропозициональную константу. В самом деле, во всех рассматриваемых в статье исчислениях выводимы формулы $x\&y \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ и $(q \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow r)$. Поэтому из справедливости BP или CIP в каком-либо исчислении следует существование формулы B, не имеющей переменных.

Под *логикой* мы понимаем любое множество формул данного фиксированного языка, замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens: $A, A \Rightarrow B/B$. Если L – логика, то через E(L) обозначаем множество логик того же языка, что и L, содержащих данную логику L.

Если L – логика и Ax – множество формул, то через L+Ax обозначаем наименьшую логику, содержащую L$\cup Ax$, то есть замыкание указанного объединения относительно двух правил вывода.

Теорией, основанной на логике L, или *L-теорией* называем множество формул в языке логики L, замкнутое относительно правила modus ponens. Логику или теорию называем *непротиворечивой*, если она не совпадает с множеством всех формул. Логику L называем *паранепротиворечивой,* если существует непротиворечивая L-теория, содержащая одновременно некоторую формулу B и ее отрицание $\neg B$.

3. Позитивные логики

Сначала рассмотрим позитивный фрагмент PJ минимальной логики J.

Формулы позитивной логики строятся из пропозициональных переменных с помощью конъюнкции, дизъюнкции и импликации. Для удобства мы также включаем в число логических символов пропозициональную константу T ("истина"). Формулы рассматриваемого языка называем позитивными. Множество всех позитивных формул обозначаем через PF.

Аксиоматика позитивного исчисления может быть найдена, например, в [9]. Мы добавляем T в качестве дополнительной аксиомы и обозначаем это исчисление, а также задаваемую им логику, через PJ. В [6] была доказана

Теорема 1. *В множестве* E(PJ) *всех расширений логики* PJ *существуют в точности семь позитивных логик с проективным свойством Бета, а именно*

(1) PJ,

(2) PJ+$(p\Rightarrow q)\vee(q\Rightarrow p)$,

(3) PJ+ $p\vee(p\Rightarrow q)$,

(4) PJ+p,

(5) PJ+ $p\vee(p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\vee(r\Rightarrow q))$,

(6) PJ+ $p\vee(p\Rightarrow q\vee(q\Rightarrow r))$,

(7) PJ+ $p\vee(p\Rightarrow q)\vee(q\Rightarrow r)$.

Первые четыре логики обладают, а остальные не обладают интерполяционным свойством.

Кроме того, в [6] установлена разрешимость проективного свойства Бета на классе E(PJ). Разрешимость интерполяционного свойства была отмечена в [4].

В работах [3]–[6] использовались, преимущественно, алгебраические методы. В [2] был найден алгебраический эквивалент проективного свойства Бета – свойство SES сильной сюръективности эпиморфизмов соответствующего многообразия алгебр. Равносильность интерполяции и амальгамируемости была установлена ранее в [4].

Отметим, что логика (4) совпадает с множеством PF всех позитивных формул, то есть является противоречивой. Что касается остальных логик, то они могут быть охарактеризованы с помощью подходящих классов шкал Крипке, то есть частично упорядоченных множеств. При этом означивания формул удовлетворяют тем же условиям, что и в интуиционистских моделях Крипке, а именно:

K1) $(x \models p$ и $x<y) \to y \models p$;

K2) $(x \models A\&B) \leftrightarrow (x \models A$ и $x \models B)$;

K3) $(x \models A\vee B) \leftrightarrow (x \models A$ или $x \models B)$;

K4) $(x \models A\Rightarrow B) \leftrightarrow$ (неверно $x \models A$ или $x \models B)$;

K5) $x \models \mathrm{T}$ для всех x.

Логика PJ характеризуется всеми частично упорядоченными шкалами, логика (2) – классом линейно упорядоченных шкал, логика (3) – одноэлементной шкалой. Логика (5) полна относительно класа шкал, удовлетворяющих условию:

$(x<y$ и $x<z) \to (y\le z$ или $z\le y)$;

логика (6) характеризуется шкалами, не содержащими цепей длины три, а логика (7) – одной двухэлементной цепью.

4. Минимальная логика Йохансона и ее расширения

Минимальная логика Йохансона [10] так же, как и интуиционистская, содержит все аксиомы позитивной логики. Однако минимальная логика отличается от интуиционистской тем, что в последней противоречие имплицирует любую формулу.

Минимальная логика может быть сформулирована в языке, который в дополнение к связкам позитивной логики содержит, взамен отрицания, пропозициональную константу $\perp$ ("абсурд") [11]. В этом случае отрицание в минимальной логике рассматривается как сокращение: $\neg A = A \Rightarrow \perp$. Константа $\perp$ в минимальной логике, в отличие от интуиционистской и классической логик, не обязательно интерпретируется как "ложь".

При такой формулировке минимальное исчисление J имеет те же аксиомы и правила вывода, что и позитивное исчисление PJ, а интуиционистское исчисление Int содержит дополнительную аксиому $\perp\Rightarrow p$, то есть Int = J+($\perp\Rightarrow p$).

Для любой логики L обозначим L$\perp$=L+$\perp$. Множество всех формул указанного языка обозначаем через F.

Пусть L – произвольная логика, содержащая J, и Γ – любая L-теория. Если Γ содержит B и $\neg B$ для некоторой формулы B, то Γ содержит $\perp$, так как формула $B \Rightarrow((B\Rightarrow\perp)\Rightarrow\perp)$ выводима в J. Если Γ содержит $\perp$, то Γ содержит также $\neg\perp$ (= $\perp\Rightarrow\perp$). Поэтому логика L является паранепротиворечивой тогда и только тогда, когда логика L$\perp$ непротиворечива. В частности, логика, содержащая $\perp$, паранепротиворечива в том и только в том случае, когда она непротиворечива.

Предложение 2. *Логика, содержащая* J, *является паранепротиворечивой, если и только если она не содержит* Int.

Доказательство. Если логика L содержит Int, то логика L+$\perp$, содержит также и переменную p, а значит, совпадает с множеством всех формул. Поэтому такая логика не является паранепротиворечивой. Напротив, покажем, что любая логика L, содержащая J и не содержащая Int, паранепротиворечива. В самом деле, рассмотрим логику L$\perp$=L+$\perp$. Эта L-теория содержит одновременно формулы $\perp$ и $\neg\perp$. Если она непротиворечива, то L паранепротиворечива, Если же L+$\perp$ является противоречивой, то содержит переменную p. Тогда по теореме о дедукции, справедливой во всех расширениях логики J, получаем, что L содержит формулу ($\perp\Rightarrow p$).

Заметим, что для любого конечно аксиоматизируемого расширения L логики J свойство паранепротиворечивости легко проверяется, так как оно равносильно тождественной истинности всех аксиом исчисления L в двухэлементной импликативной решетке [9], если константа $\perp$ интерпретируется как 1 ("истина").

Следующие утверждения доказаны в [6].

Предложение 3. *Пусть* L – *позитивная логика из* E(PJ). *Если* L *имеет PBP или CIP, то* J+L *обладает тем же свойством.*

В частности, сама логика J имеет CIP.

Предложение 4. *Если* L *из* E(J) *имеет CIP (или PBP), то следующие логики также имеют CIP (соответственно PBP):*

$L+\perp$, $L+(\perp\Rightarrow p)$, $L+\perp\vee(\perp\Rightarrow p)$.

Отсюда следует, что логики $J+\perp$ и $JE'=J+\perp\vee(\perp\Rightarrow p)$ обладают интерполяционным свойством.

Отметим, что если L из E(J) имеет CIP, то интерполянт формулы $(A\Rightarrow B)$ в $L\perp$ совпадает с интерполянтом формулы $((A\&\perp)\Rightarrow B)$ в L. Пусть L имеет PBP и формула $A(P,Q,x)\&A(P,Q',y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ выводима в $L\perp$. Тогда формула $(A(P,Q,x)\ \&\perp)\&(A(P,Q',y)\ \&\perp) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ выводима в L, и требуемое явное определение для x в $L\perp$ совпадает с явным определением, существующим в L для последней формулы. Интерполянты и явные определения в логиках $L+(\perp\Rightarrow p)$ и $L+\perp\vee(\perp\Rightarrow p)$ также эффективно вычисляются по интерполянтам и явным определениям для подходящих формул из L.

Любой логике L из E(J) соответствует ее *позитивный фрагмент* PL, состоящий из всех позитивных формул, входящих в L. Хорошо известно, что PJ=PInt. Кроме того, нетрудно показать, что для любого множества *Ax* позитивных формул справедливо равенство: $P(J+Ax) = P(J\perp+Ax) = PJ+Ax$. Более того, $P(Int+Ax) = PInt+Ax$ [12].

Может случиться, что суперинтуиционистская логика позитивно аксиоматизируема над Int и обладает интерполяционным свойством, а ее позитивный фрагмент не имеет даже проективного свойства Бета [6]. Для позитивно аксиоматизируемых расширений логики J ситуация иная, как показывает следующая

Теорема 5 [6]. *Если Ax – множество позитивных формул, то следующие условия эквивалентны:*

(1) J+*Ax* *имеет CIP (соответственно PBP),*

(2) $J\perp$+*Ax* *имеет CIP (соответственно PBP),*

(3) *позитивная логика* PJ+*Ax* *имеет CIP (соответственно PBP).*

Противоречивая логика F=J+*p,* конечно, обладает свойствами CIP и PBP. Остальные позитивно аксиоматизируемые расширения логик J и J⊥ являются паранепротиворечивыми. Кроме того, любая логика L, содержащая J⊥, может быть аксиоматизирована добавлением к J⊥ позитивных формул: достаточно заменить ⊥ на T в аксиомах логики L. Поэтому из теорем 1 и 5 непосредственно вытекают нижеследующие теоремы 6(1) и 7(1). Результаты о разрешимости, сформулированные в теоремах 6(2) и 7(2), сразу вытекают из разрешимости свойств CIP и PBP в E(PJ) и теоремы 5 с учетом разрешимости свойства паранепротиворечивости в E(J).

Теорема 6. (1) *Семейство* E(J) *содержит точно шесть паранепротиворечивых позитивно аксиоматизируемых логик с проективным свойством Бета, из них в точности три обладают интерполяционным свойством.*

(2) *Существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax позитивных формул распознает, является ли логика* J+*Ax паранепротиворечивой логикой с PBP или CIP*.

Теорема 7. (1) *Логика* J⊥ *имеет точно шесть паранепротиворечивых расширений с проективным свойством Бета, из них в точности три обладают интерполяционным свойством.*

(2) *Существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax формул распознает, является ли логика* J⊥+*Ax паранепротиворечивой логикой с PBP или CIP*.

Аксиоматизация логик, указанных в теоремах 6(1) и 7(1), сразу находится из пунктов (1)–(3) и (5)–(7) теоремы 1. Семантическую характеризацию этих логик легко получить из приведенного в параграфе 3 семантического описания позитивных логик с PBP, пользуясь следующим правилом. Характеризация позитивно аксиоматизируемой логики в E(J) с помощью шкал Крипке получается из характеризации ее позитивного фрагмента (если такая существует) без добавления каких-либо условий. Что касается логик из E(J⊥), то необходимо добавить условие: $x \models \perp$ для всех x.

5. Расширения логики JE'

В этом параграфе мы рассмотрим более подробно семейство расширений логики JE' = J+⊥∨(⊥⇒*p*). Это семейство изучалось в [13]. В частности, там показано, что все логики из E(JE') и только они представимы как пересечения подходящих логик из E(J⊥) и E(Int). Более точно, каждой логике L из E(JE') ставятся в соответствие два напарника L'=L⊥ и L"=L+Int. Тогда имеет место равенство L=L'∩L".

Для исследования этого семейства мы применим следующее утверждение, доказанное в [6]:

Теорема 8. *Пусть* L *содержит* J$\bot$, *а* L' *содержит* Int. *Тогда пересечение* L$\cap$L' *имеет CIP (соответственно PBP) в том и только в том случае, если обе логики* L *и* L' *имеют CIP (соответственно PBP).*

Отметим, что если L и L' имеют CIP и формула ($A\Rightarrow B$) верна в L$\cap$L', то ее интерполянтом в L$\cap$L' будет формула $(\bot\Rightarrow C)\&(C'\vee\bot)$, где C и C' – интерполянты этой формулы в L и L' соответственно.

Обратно, пусть логика L$\cap$L' имеет CIP. Тогда интерполянт формулы ($A\Rightarrow B$) в L совпадает с интерполянтом формулы ($A\&\bot\Rightarrow B$) в логике L$\cap$L', а интерполянт такой же формулы в L' совпадает с интерполянтом формулы ($A\Rightarrow B\vee\bot$) в L$\cap$L'.

Далее, пусть обе логики L и L' имеют PBP и формула

$A(P,Q,x)\&A(P,Q',y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$

выводима в L$\cap$L'. Тогда эта формула принадлежит как L, так и L'. Получаем выводимость в L$\cap$L' формулы

$A(P,Q,x) \Rightarrow (x \Leftrightarrow (\bot\Rightarrow B(P))\&(B'(P)\vee\bot))$,

где $B(P)$ и $B'(P)$ – явные определения в L и L' соответственно. Обратно, пусть логика L$\cap$L' имеет PBP. Если формула $A(P,Q,x)\&A(P,Q',y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ выводима в L, то явным определением для x в L будет явное определение в L$\cap$L', существующее для формулы $(A(P,Q,x)\ \&\bot)\&(A(P,Q',y)\ \&\bot) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$. Если же формула $A(P,Q,x)\&A(P,Q',y) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$ выводима в L', то явным определением в L' будет явное определение, существующее в L$\cap$L' для формулы

$(A(P,Q,x)\ \&(x \Leftrightarrow x\vee\bot))\&(A(P,Q',y)\ \&(y \Leftrightarrow y\vee\bot)) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$.

Известно, что никакое пересечение двух несравнимых позитивных или суперинтуиционистских логик не имеет ни CIP, ни PBP. Таким образом, теорема 8 подчеркивает еще одно интересное отличие семейства E(J) от E(PJ) и E(Int).

Из теоремы 8 сразу вытекает

Следствие 9. *Логика* L, *содержащая* JE'=J+$\bot\vee(\bot\Rightarrow p)$, *имеет CIP (PBP) в том и только в том случае, если обе логики* L+$\bot$ *и* L+$(\bot\Rightarrow p)$ *имеют CIP (соответственно PBP).*

Напомним, что согласно [3] существуют шестнадцать суперинтуиционистских логик с PBP, из них восемь имеют CIP. Указанные свойства разрешимы на классе суперинтуиционистских логик [4]. Паранепротиворечивые логики из E(JE') получаются как всевозможные пересечения паранепротиворечивых расширений логик из E(J⊥) с суперинтуиционистскими логиками. Поэтому из теоремы 7 следует

Теорема 10. (1) *Существуют в точности 96=6·16 паранепротиворечивых расширений логики* JE'=J+⊥∨(⊥⇒*p*), *обладающих проективным свойством Бета, из них в точности 24=3·8 логик имеют CIP*.

(2) *Существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax формул распознает, является ли логика* JE'+*Ax паранепротиворечивой логикой с PBP или CIP*.

В [13] С.П.Одинцов называет *собственно паранепротиворечивыми* логики из E(J), не входящие ни в E(Int) ни в E(J⊥). Исходя из теорем 10 и 7, нетрудно посчитать в E(JE') число собственно паранепротиворечивых логик, обладающих проективным свойством Бета или интерполяционным свойством, и доказать существование соответствующих разрешающих алгоритмов. Однако описание логик с PBP или CIP во всем семействе E(J) остается нерешенной проблемой. Неизвестно, конечно или бесконечно число логик из E(J), обладающих указанными свойствами, и разрешимы ли эти свойства в семействе E(J). Добавим, что теорема 10 вместе с предложением 4 дают удобные необходимые условия того, чтобы логика L из E(J) обладала свойствами CIP или PBP.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В.А.* Об одной системе паранепротиворечивой логики // Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики (Труды семинара по логике ИФ АН СССР). М., 1984. С. 129-133.
2. *Максимова Л.Л.* Явная и неявная определимость в модальных, суперинтуиционистских и релевантных логиках // Логические исследования. Вып. 5. М., 1998. С. 53-60.
3. *Maksimova L.* Intuitionistic Logic and Implicit Definability // Annals of Pure and Applied Logic. **105.** 2000. P. 83-102.
4. *Максимова Л.Л.* Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия // Доклады АН СССР. **237.** №. 6. 1977. С. 1281-1284.
5. *Максимова Л.Л.* Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинговых алгебр // Алгебра и логика. **40.** 2001.
6. *Максимова Л.Л.* Неявная определимость и позитивные логики // Алгебра и логика (в печати).
7. *Craig W.* Three uses of Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // J. Symbolic Logic. **22.** 1957. P. 269-285.
8. *Kreisel G.* Explicit definability in intuitionistic logic // J. Symbolic Logic. **25**. 1960. P. 389-390.
9. *Расева Х, Сикорский Р.* Математика метаматематики // М.: Наука. 1972.

10. *Johansson I.* Der Minimalkalkul, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compositio Mathematica. **4.** 1937. P. 119-136.
11. *Segerberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // Theoria. **34.** 1968. P. 26-61.
12. *Верхозина М.И.* Промежуточные позитивные логики // Алгоритмические вопросы алгебраических систем. Иркутск, 1978. С. 13-25.
13. *Одинцов С.П.* Изоморфизмы логики классической опровержимости и их обобщения // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 1997. С. 48-61.