В.Х.Хаханян

ПРЕДИКАТЫ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ДЛЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

В [1] А.Г.Драгалин предложил метод получения одних моделей типа реализуемости для интуиционистской арифметики из других. Мы предлагаем аналогичный метод для теории множеств с интуиционистской логикой ZFIDC (точная формулировка может быть найдена в [2]). Как и в [2], мы считаем, что ZFIDC содержит термы, вводимые по аксиоме выделения. Предикат T, определенный на множестве предложений теории ZFIDC, назовем предикатом типа реализуемости (r-предикатом), если 1) ZFIDC выводимо $\varphi \Rightarrow T\varphi$; 2) $T\varphi$, $T(\varphi \to \psi) \Rightarrow T\psi$ для любых предложений φ и ψ. Самый простой пример r-предиката: $T\varphi \Leftrightarrow$ ZFI выводимо φ. Первая операция, дающая новые r-предикаты, такова: если $\{ T_i \}$ – семейство r-предикатов, то новый предикат, $T=\Pi_i T_i$, т.е. $T\varphi \Leftrightarrow \forall i T\varphi_i$. Опишем теперь вторую операцию. Пусть Λ – высказывание и T – r-предикат. Пусть A – предикат, заданный на множестве замкнутых атомарных формул ZFIDC. Допустим, что:

1) $\Lambda \Rightarrow A\varphi \Rightarrow T\varphi$ для всех замкнутых атомарных формул ZFIDC

2) $\Lambda \Rightarrow T\varphi$

3) если φ-атомарная истинная замкнутая формула, то $A\varphi$

4) если φ-атомарная замкнутая ложная формула и $A\varphi$, то Λ

5) предикат A экзистенциален на множестве атомарных формул, т.е.$\forall q[A(q \in t) \Leftrightarrow A(q \in r)] \wedge \ A(r \in p) \Rightarrow A(\ t \in p\ )$

6) для всякой формулы φ(x) с одной свободной переменной и для всякого терма t найдется другой терм q такой, что $\forall r[A(\ r \in q\ ) \Leftrightarrow A(\ r \in t\ ) \wedge T\varphi(r)]$.

Определим теперь новый предикат S(Λ, A, T) на множестве предложений ZFI индукцией по построению формулы φ:

1) $S\varphi \Leftrightarrow A\varphi$ для атомарной замкнутой формулы φ

2) $S(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow S\varphi \wedge S\psi$

3) $S(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow S\varphi \vee S\psi$

4) $S(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (S\varphi \Rightarrow S\psi) \wedge T(\varphi \to \psi)$

5) $S(\forall x\varphi(x)) \Leftrightarrow \ \forall t.\ S\varphi(t) \wedge T(\forall x\varphi(x))$

6) $S(\exists x\varphi(x)) \Leftrightarrow \ \exists t.\ S\varphi(t)$

7) $S(\bot)=\Lambda$

Утверждения:

1. $S\varphi \Rightarrow T\varphi$
2. $S(\perp \to \varphi)$
3. ZFIDC выводимо $\varphi \Rightarrow S\varphi$
4. S есть r-предикат.

В [3] мы применили вторую операцию при построении модели для доказательства допустимости правила Маркова в ZFIDC.

Дадим неформальный комментарий применимости изложенного метода и его метаматематический анализ, сделав это по сравнению с аналогичным исследованием в [1]. В качестве примера там дается доказательство выводимости в НА так называемого принципа Р.

Операция S, изложенная выше, позволяет получить (для арифметики НА, конечно) некоторые известные реализуемости, например, штрих Акцела, штрих-реализуемость Клини (последняя используется для доказательства такого замечательного факта, как выполнимость в интуиционистской арифметике свойства нумерической экзистенциальности). Однако наиболее важным с точки зрения метаматематических исследований является тот факт, что указанная операция позволяет обьединять модели Крипке для арифметики (полученные с помощью операции Сморинского, [4]) в новую модель Крипке. Для арифметики это соображение показывает, что все метаматематические результаты, полученные с помощью операции Сморинского, могут быть получены и с помощью изложенной выше операции S (эта операция для арифметики отличается от изложенной выше отсутствием пунктов 5 и 6 в первом определении). Использование этой операции для арифметики позволяет часто провести рассуждения как с классической, так и с интуиционистской точек зрения, тогда как применение операции Сморинского требует теоретико-множественного рассмотрения и использования закона исключенного третьего. Некоторые авторы предпринимали попытки интуиционистского рассмотрения операции Сморинского, однако в этих работах были существенные пробелы и, кроме того, использовались специфически интуиционистские методы рассуждения (например, принцип непрерывности Брауэра или теорема о веере), которые являются неприемлемыми с классической точки зрения.

Что касается теории множеств с интуиционистской логикой, то одно из приложений можно, как указано выше, найти в [3] (приложение появилось не позднее общего результата, изложенного здесь). Что касается моделей Крипке (конечно, применяемых для теории множеств), то все сказанное выше остается верным и для них, однако конкретных приложений пока не сделано ввиду громоздкости технических конструкций. Однако с точки зрения метаматематических трудностей доказательства построения моделей указанного типа и здесь не требуется никаких рассуждений, не укладывающихся в рамки теории множеств с интуиционистской логикой с принципом двойного дополнения множеств (в метаматематике этот принцип мы не используем нигде, кроме как для доказательства выполнимости его самого и поэтому он может быть опущен, т.к. классические математики его не признают и тем самым, опуская этот принцип, мы рассуждаем уже внутри нейтральной теории).

В заключение кратко осветим вопрос о доказательстве приведенных выше утверждений. Основная трудность – построение универсума, в котором предикат A оказался бы экстенсиональным. Здесь, конечно, необходима ссылка на работу Майхилла [2], в которой был построен универсум термов с целью доказательства ряда свойств теории ZFI, и который автору удалось сильно модифицировать для построения ряда новых моделей для неклассической теории множеств. Остальная часть доказательства хотя и достаточно технична, но не является трудной (основной момент – кванторы по множественным переменным). Доказательство проводится сначала индукцией по построению, а затем по выводу формулы. Ниже мы приводим построение универсума Δ и метод получения нового r-предиката S из данного r-предиката T.

Пусть Λ – метаутверждение , T – r-предикат для теории множеств с термами ZFIDC, причем для атомарных предложений $\Lambda \Rightarrow T\varphi$. Упомянутый выше предикат A будет получаться, как правило, ограничением T на атомарные предложения и поэтому в построении не участвует. Скажем, что два расщепленных терма $C_{\varphi,X}=t$ и $C_{\psi,Y}=q$ ($q^{+}=Y$; $q^{-}=C_{\psi}$; см [2]) на уровне $\alpha\in On$ являются эквивалентными, $q\approx t$, если $\forall r(r\in q^{+}\vee\Lambda\Leftrightarrow r\in t^{+}\vee\Lambda)$, а сам терм t является экстенсиональным на том же уровне, если $q\approx r\wedge r\in t^{+}\Rightarrow q\in t^{+}$, причем $q\in t^{+}\Rightarrow T(q\in t)$, а предикат T так распространяется на расщепленные термы: $T(q\in t)\Leftrightarrow T(q^{-}\in t^{-})$. Так строится уровень $\Delta_{\alpha+1}$ из меньших уровней. Для предельного ординала $\Delta_{\alpha}=\cup\{\Delta_{\beta}\,|\,\beta<\alpha\}$ и, наконец, $\Delta=\cup\{\Delta_{\alpha}\,|\,\alpha\in On\}$, где On-класс ординалов. Предикат $S(\Lambda,T)$ определяется теперь так: $S(t\in q)\Leftrightarrow t\in q^{+}\vee\Lambda$; дальнейшее определение S было дано ранее.

ЛЕММА 1. $S\varphi\Rightarrow T\varphi$ (легкая индукция по построению φ).

ЛЕММА 2. $\Lambda=S\bot\Rightarrow S\varphi$ (выполнимость логической аксиомы $\bot\Rightarrow\varphi$).

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА: ZFIDC выводимо предложение $\varphi\Rightarrow S\varphi$.

СЛЕДСТВИЕ. $S(\Lambda,T)$ есть r-предикат.

Не проводя доказательства во всех деталях, рассмотрим выполнимость аксиомы экстенсиональности и схемы выделения. В первом случае необходимо показать, что для произвольных термов p,q,t верно $p\approx q\wedge(q\in t^{+}\vee\Lambda)\Rightarrow p\in t^{+}\vee\Lambda$. Это доказывается разбором случаев с учетом $\Lambda\Rightarrow S\varphi$ (напомним, что $\Lambda\Rightarrow T\varphi$ для атомарных φ и что $\Lambda\Rightarrow T\bot$). В случае аксиомы выделения берем константу-терм C_{φ} ту, для которой выводимо $\forall y(y\in C_{\varphi}\Leftrightarrow\varphi(y))$, а в качестве второй компоненты берем $X=\{q\in\Delta \mid S\varphi(q)\}$. Теперь $t=C_{\varphi,X}$ и схема выделения проверяется без труда, однако необходимо доказать экстенсиональность множества X, что использует индукцию по построению формулы φ. Однако в отличие от [2] и [3], необходимо наложить дополнительное требование на предикат T: если $t\approx q\wedge T\varphi(q)$, то $T\varphi(t)$. Для ряда конкретных предикатов T это требование удается доказать без дополнительных требований, однако в общем случае это сделать не удалось. Рассматривая доказательство схемы подстановки, отметим, что внешним образом используется также схема подстановки. Остается еще проверить выполнимость схемы ε-индукции, аксиомы бесконечности и аксиомы двойного дополнения множеств (аксиомы DC), но это делается по аналогии с [3]. Здесь необходимо отметить, что внешним образом нигде не использовались никакие специальные принципы, кроме DC, а также полный закон исключенного третьего. Таким образом, сохраняется нейтральность доказательства.

Операция получения нового S позволяет также получить все метаматематические результаты, в которых участвует операция Сморинского. Пусть M_i – семейство моделей Крипке для ZFI. Определим модель $M=(\Sigma_i M_i)$` (операция Сморинского): остов M есть прямая сумма логических остовов M_i , с добавлением нового наибольшего элемента a (моменты из разных M_i – несравнимы). Предметная область a определяется стандартно и теперь M – также модель ZFI.

Теперь поступаем так: $T_i\varphi\Leftrightarrow x_i \models\varphi$ (x_i - модели M_i) и $S = S(\bot, A, \Pi_i T_i)$, где $A\varphi=\varphi$ – истинна в стандартной модели (φ – атомарное предложение). Тогда $S\varphi=a\models\varphi$.

Отметим следующее: все приведенные здесь результаты касаются только односортной теории множеств и здесь в качестве приложения можно получить результат из [2] (хотя модель, предложенная в [2], отличается от нашей). Если $T\varphi\Leftrightarrow$ZFIDC выводимо φ, то результат Д.Майхилла получается так: пусть ZFIDC выводимо $\exists x\varphi(x)$, тогда $S(\exists x\varphi(x))$, а теперь найдется терм t такой, что $S\varphi(t)$ и, следовательно, $T\varphi(t)$, т.е. ZFIDC $\models\varphi(t)$ (мы сейчас не различаем t и t^{-}, так как в соответствующих теориях они выводимы одновременно). Свойство дизъюнктивности для теории ZFIDC доказывается аналогично с использованием того же предиката T. Все остальные результаты, связанные с использованием моделей типа реализуемости и имеющие место для интуиционистской арифметики HA, также могут быть «подняты» на уровень теории множеств, однако технически проще рассматривать теорию множеств с двумя сортами переменных и с интуиционистской арифметикой на первом уровне (см. [3]; в этом случае предикат A, определенный на атомарных арифметических формулах (см. выше), может быть использован так же, как в [1]). Берем в этом случае $A\psi \Leftrightarrow \psi$ истинно в стандартной модели теории множеств $\vee$ Λ и $T \Leftrightarrow A$, но уже для всех формул, где $\Lambda \Leftrightarrow \exists n(\mathrm{ZFIDC} \models \varphi(n, x)$, где x – набор только переменных по множествам. Пусть $S=S(\Lambda,T,T)$. Нам достаточно показать, что $S\bot$ при условии, что $\mathrm{ZFI2DC} \vdash \forall n(\varphi(n,x) \vee \neg\varphi(n,x)) \wedge \neg\forall n \neg\varphi(n,x)$. В силу выводимости второго члена конъюнкции $S\neg\forall n\neg\varphi(n,x)$, т.е. достаточно показать $S\forall n\neg\varphi(n,x)$ или $\forall n S\neg\varphi(n,x)$. Если ZFI2DC выводимо отрицание $\varphi(n,x)$, выполняется $S\neg\varphi(n,x)$ и выполняется требуемое заключение $S\bot \Leftrightarrow \Lambda \Leftrightarrow \exists n$(ZFI2DC выводимо $\varphi(n,x)$). Если же выводимо $\varphi(n,x)$, то $S\bot$ по смыслу. Итак, $S\bot$ верно всегда, т.е. в ZFI2DC выводимо $\varphi(n,x)$ для некоторого натурального числа n при фиксированных параметрах x. Заметим, что $S\varphi$ выполняется для всякой формулы нашего языка, т.е. отношение S – тривиально, однако наше доказательство допустимости сильного правила Маркова с параметрами только по множествам отнюдь не является тривиальным.

Рассмотрим еще некоторые интересные приложения полученной выше ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ и ЛЕММ 1 И 2. Хорошо известно (см. [1]), что принцип P не является выводимым в интуиционистской арифметике, однако (см. пункт б) ниже) совместим с последней при добавленном тезисе Черча (но не принципе Маркова, даже слабом). Аналогичные результаты можно получить и на уровне теории множеств ZFI2DC (и перенести их затем на односортную теорию множеств ZFIDC). Здесь мы докажем допустимость принципа P без параметров по натуральным числам, но с параметрами по множествам в ZFI2DC. УТВЕРЖДЕНИЕ: если в ZFI2DC выводимо $\neg\varphi \rightarrow \exists y\psi(y)$, то в ZFI2DC выводимо для некоторого натурального n $\neg\varphi \rightarrow \psi(n)$. В качестве Λ возьмем метапредложение «ZFI2DC выводит $\neg\neg\varphi$» и пусть $T\psi \Leftrightarrow$ZFI2DC выводимо $\neg\varphi \rightarrow \psi$, а в качестве A-предиката берем T, ограниченный на атомарные формулы (здесь φ – фиксированное предложение языка теории множеств). Полагаем теперь $S=S(\Lambda,A,T)$. Нетрудно видеть, что T – r-предикат (если выводимо

$\neg\varphi\rightarrow\psi$ и если выводимо $\neg\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\eta)$, то, конечно, выводимо $\neg\varphi\rightarrow\eta$). Теперь предположим, что выводима формула $\neg\varphi\rightarrow\exists y\psi(y)$. В силу ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ $S(\neg\varphi\rightarrow\exists y\psi(y))$. Нетрудно также видеть, что выполняется $S(\neg\varphi)$ (так как $S\varphi\Rightarrow S\bot$ и $T(\neg\varphi)\Leftrightarrow$выводимо $\neg\varphi\rightarrow\neg\varphi$; если $S\varphi$, то $T\varphi$ и выводимо $\neg\varphi\rightarrow\varphi$, а это противоречие, следовательно $S\bot$). Следовательно, $S(\exists y\psi(y))$, т.е. $S\psi(n)$ для некоторого натурального n, а тогда $T\psi(n)$, т.е. «ZFI2DC выводимо $\neg\varphi\rightarrow\psi(n)$» для некоторого n, что и требовалось доказать.

В качестве другого интересного приложения рассмотрим следующий результат для ZFI2DC: если формула $\varphi(n,x)$ с параметрами по множествам (но без параметров по натуральным числам) разрешима, т.е. имеет место выводимость формулы $\forall n(\varphi(n,x)\vee\neg\varphi(n,x))$, и если в ZFI2DC выводимо $\neg\neg\exists n\varphi(n,x)\rightarrow\exists n\varphi(n,x)$, то в ZFI2DC выводимо $\exists n\varphi(n,x)$ или выводимо $\forall n\neg\varphi(n,x)$ (далее мы не пишем параметры x, входящие в формулу). Сделаем одно замечание, связанное со спецификой односортной теории ZFIDC: если в ней выводимо $\forall x(\varphi(x)\vee\psi(x))$, то в ней выводимо $\forall x\varphi(x)$ или выводимо $\forall x\psi(x)$; конечно, в арифметике HA такой результат невозможен. Доказательство: в качестве Λ берем такое утверждение «ZFI2DC выводимо $\forall n\neg\varphi(n)$ и полагаем $T\psi\Leftrightarrow$ZFI2DC выводимо $\exists n\varphi(n)\rightarrow\psi$ (как обычно, φ – фиксированная формула с одной свободной переменной по натуральнам числам). Теперь определяем $S=S(\Lambda,T,T)$. Легко видеть, что верно $S(\neg\neg\exists n\varphi(n))$ (это доказывается по аналогии с доказательством $S(\neg\varphi)$ в предыдущем приложении). Теперь, если $S(\neg\exists n\varphi(n))$, то в ZFI2DC выводимо $\forall n\neg\varphi(n)$ (это доказывается так: $S(\neg\exists n\varphi(n)) \Rightarrow T(\neg\exists n\varphi(n)) \Rightarrow$ ZFI2DC выводимо $\exists n\varphi(n)\rightarrow\neg\exists n\varphi(n)$, т.е. не может быть выводимо $\exists n\varphi(n)$ (так как мы, конечно, предполагаем, что наша теория непротиворечива), а тогда ZFI2DC выводимо $\forall n\neg\varphi(n)$). Так как $S(\neg\neg\exists n\varphi(n))$ и так как ZFI2DC выводимо $\neg\neg\exists n\varphi(n)\rightarrow\exists n\varphi(n)$, то мы получаем $S(\exists n\varphi(n))$, и найдется такой n, что $S(\varphi(n))$. Теперь делаем разбор случаев: если ZFI2DC выводимо $\varphi(n)$, то в ZFI2DC выводимо и $\exists n\varphi(n)$, а если в ZFI2DC выводимо $\neg\varphi(n)$, то, в силу ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ, $S(\neg\varphi(n))$ и, следовательно, $S(\varphi(n)) \Rightarrow S\bot$, но так как имеет место $S(\varphi(n))$, то получаем $S\bot$, и, таким образом, в ZFI2DC выводимо $\forall n\neg\varphi(n)$. Наше УТВЕРЖДЕНИЕ полностью доказано.

Сформулируем также без доказательства два утверждения, которые можно «поднять» на уровень теории множеств ZFI2DC:

а) можно построить формулу $\varphi(n)$ с одним параметром по натуральным числам такую, что в ZFI2DC нельзя вывести

$\exists n\varphi(n)\rightarrow\exists n(\varphi(n)\wedge\forall m(m<n\rightarrow\neg\varphi(m)))$ (принцип существования наименьшего числа с данным свойством);

б) можно найти предложение φ и формулу $\psi(y)$ с единственным натуральным параметром такие, что в ZFU2DC не выводится $(\neg\varphi\rightarrow\exists y\psi(y))\rightarrow\exists y(\neg\varphi\rightarrow\psi(y))$ (упоминавшийся выше принцип P).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Драгалин А.Г.* Новые виды реализуемости и правило Маркова // ДАН СССР, 1980.- т.251, № 3.- С.534-537
2. *Myhill J.* Some properties of intuitionistic Zermelo-Fraenkel set theory // Lecture Notes in Mathematics. 1973. V. 337. P.206-231.
3. *Khakhanian V.* The Markov's Rule is admissible in the Set Theory with Intuitionistic Logic // Lecture Notes in Computer Science, 1997. V. 1289. P. 163-167.
4. *Smorynski C.A.* Application of Kripke models // Lecture Notes in Mathematics. 1973. V. 344. P. 324-391.