А.С.Карпенко

ПОДСТРУКТУРНЫЕ ЛОГИКИ: ГИЛЬБЕРТОВСКИЙ ПОДХОД*

Abstract. *There analogies of substructural logics in Gilbert''s form are considered. The main emphasys is made on Łukasiewicz's infinite valued logic* $\boldsymbol{Ł}_\infty$ *and logic* ***RM****. Since some Gilbert''s substructural logics are extensions of classical logic then the problem of explication of the notion of "substructural logics" arises*.

Термин "подструктурные логики" (substructural logics) был предложен К.Дошеном во время проведения в 1990 г. в Тюбингене "Семинара по естественным языковым системам", по итогам которого был опубликован сборник работ [19]. В самом конце прошлого века появилась также монография Г.Ресталла [29], посвященная этой теме.

Подструктурными обычно называют такие логические системы, секвенциальная формулировка которых получается из генценовских исчислений (см. [2]) **LK** (классической логики) и **LJ** (интуиционистской логики) за счет элиминации и ограничения различных структурных правил: утончения, сокращения и перестановки. Логические системы, полученные подобным образом из исчисления **LK**, будем называть *классическими подструктурными логиками*, а полученные из **LJ** – *интуиционистскими подструктурными логиками*. Однако отметим, что при рассмотрении подструктурных логик может также учитываться "структура" антецедента и сукцедента. Кроме ограничений на структурные правила в последнее время также рассматриваются различные ограничения на операционные правила, например, на правила для отрицания.

На самом деле, подструктурные логики открывались и переоткрывались в течение последних 70 лет (и даже раньше, например, трехзначная логика Лукасевича, построенная в 1920 г., которая является логикой без сокращения) и самым известным примером здесь является интуиционистская логика. **LJ** отличается от **LK** тем, что сукцеденты секвенций первой могут состоять не более, чем из одной формулы. С другой стороны, из гильбертовского исчисления классической логики **TV** интуиционистская

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, гранты № 01-03-00403 и № 99-03-19706.

логика **H** получается заменой закона снятия двойного отрицания $\neg\neg p \to p$ законом Дунса Скота $\neg p \to (p \to q)$ [7, с. 94]. Или за счет отбрасывания из аксиоматизации **TV** закона исключенного третьего $p \lor \neg p$ [30, p. 313].

Теперь отметим, что аналогами структурных правил утончения, сокращения и перестановки являются следующие формулы:

K. $(p \to (q \to p)$ (утончение)

W. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$ (сокращение)

C. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ (перестановка)

Отдельными направлениями в области подструктурных логик являются **BCI**- и **BCK**-логики (см. [28]); релевантные логики (логики без утончения) [9], [14], [15]; различные исчисления Ламбека, которые являются логиками без утончения, сокращения и перестановки. В [25] строится полное (full) исчисление Ламбека – по существу интуиционистское исчисление без структурных правил, которое автор рассматривает как наиболее фундаментальное из всех подструктурных логик, которое, к тому же, играет важную роль в теоретических приложениях компьютерной науки. В 1987 г. появилась логическая система под названием "линейная логика" [20], импликативный фрагмент которой представляет собой **BCI**-логику, т.е. логику без утончения и сокращения. Кроме обычных операций линейная логика снабжена различными другими операциями. Она нашла широкое применение в компьютерных науках. За удивительно короткое время образовалось новое направление [31]).

Заметим, что все выше названные направления относятся к сфере интуиционистских подструктурных логик, которые изучены намного тщательнее, чем классические подструктурные логики. Именно первому классу логик посвящена вводная статья Дошена к [19].

Некоторые примеры классических подструктурных логик (бесконечнозначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł}_\infty$ [24] и логика **RM** [14]) описываются матричным способом в [29, ch. 8], но совершенно не обсуждается, как эти логики получаются из **LK**. Как следует из работы В.Н.Гришина [4], элиминация правила сокращения из **LK** не дает $\mathbf{Ł}_\infty$, а на самом деле оказалось, что сами секвенциальные формулировки $\mathbf{Ł}_\infty$ и **RM** чрезвычайно сложны (см., соответственно, работы [13] и [16]). Однако проблема построения логик $\mathbf{Ł}_\infty$ и **RM** как подструктурных сравнительно легко решается, если мы перейдем к гильбертовским исчислениям.

Обратим внимание, что целым направлением в области подструктурных логик являются "логики без сокращения" [27]. Еще Хао Ван в 1962 г. в работе "На пути к механической математике" [12] выдвинул гипотезу о том, что разрешимые фрагменты исчисления предикатов можно формализовать без привлечения правил сокращения. Первая работа в этом наравлении появилась только в 1971 г. и принадлежит В.А.Смирнову (см. [10, гл. 5]). См. также [23]. Одним из наиболее интересных примеров логик без сокращения являются многозначные логики Лукасевича, как *конечные*, так и *бесконечнозначная*. Свойства их столь необычны, что изучение этих логик к концу XX века стало исключительно интенсивным, что объясняется, в первом случае, их связью с теорией простых чисел (см. [6]) и, во втором случае, их глубокой связью с фундаментальными алгебраическими структурами совершенно различной природы (см. [18]).

Теперь покажем, что гильбертовское исчисление $\mathbf{Ł}_\infty$ получается из аксиоматизации классической логики **TV** за счет элиминации аксиомы сокращения **W**: $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$. Оказывается, наши работы в области построения булевых решеток импликативных логик имеют самое непосредственное отношение к классическим подструктурным логикам гильбертовского типа (см. [5] и [22]).

Рассмотрим следующие импликативные формулы:

I. $p \to p$

B. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

C. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

W. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$

$\mathbf{K_1}$. $(p \to q) \to (r \to (p \to q))$

$\mathbf{X_2}$.$(p \to ((q \to q) \to p)) \to (((p \to q) \to q) \to (q \to p) \to p))$.

N. $f \to p$.

Правила вывода: modus ponens и подстановка.

Заметим, что $\mathbf{K_1}$ есть ограничение **K** за счет подстановки в последнюю $p \to q$ вместо p и r вместо q.

ТЕОРЕМА 1. $\mathbf{IBCWK_1X_2N}$ есть *независимая* аксиоматизация классической пропозициональной логики **TV** [5].

ТЕОРЕМА 2. **TV** без закона сокращения **W** есть бесконечнозначная логика Лукасевича $\mathbf{Ł}_\infty$ [5].

При этом **IBCW** есть импликативный фрагмент релевантной логики **R**. $\mathbf{IBCWK_1}$ – импликативный фрагмент интуиционистской логики **H**. Но $\mathbf{IBCK_1X_2}$ не является импликативным фрагментом $\mathbf{Ł_\infty}$. Поэтому заменим $\mathbf{X_2}$ на $\mathbf{X_3}$:

$$((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r).$$

Начиная с 1995 г. предпринимались настойчивые попытки показать независимость аксиомы **I** от аксиом $\mathbf{BCWK_1X_3}$, или наоборот, доказать выводимость **I** из аксиом $\mathbf{BCWK_1X_3}$. Поскольку вопрос оставался открытым, то вместо аксиомы $\mathbf{X_3}$ была взята аксиома $\mathbf{X_4}$:

$$(p\to p)\to (((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r)).$$

В итоге, $\mathbf{IBCWK_1X_4N}$ есть независимая аксиоматизация **TV**, $\mathbf{IBCWK_1X_4}$ – импликативный фрагмент **TV**, $\mathbf{IBCK_1X_4}$ – импликативный фрагмент $\mathbf{Ł_\infty}$. Более того, $\mathbf{IBCWX_4}$ есть импликативный фрагмент **RM**, в то время как $\mathbf{IBCWX_2}$ таковым не является.

Заметим, что только в этом году В.Е.Комендантским [8] с помощью прувера Otter была доказана выводимость **I** из $\mathbf{BCWK_1X_3}$. Приведем реконструкцию этого доказательства.

Пусть каждый доказанный тезис будет иметь свой номер и предшествующую строку доказательства, которая состоит из двух частей, разделенных звездочкой ∗. Слева стоит формула (или ее номер), в которую произведена подстановка и которая является большей посылкой. Справа указывается меньшая посылка, которая также может быть получена за счет подстановки. Результат применения modus ponens указывается посредством тире, затем указывается номер формулы, после чего вся строка заканчивается запятой, а доказанная формула точкой.

ТЕОРЕМА 3. **B**, **C**, **W**, $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{X_3}$ $\vdash$ **I**.

1. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.
2. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$.
3. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$.
4. $(p \to q) \to (r \to (p \to q))$.
5. $((((p\to q)\to q)\to p)\to r)\to(((((q\to p)\to p)\to q)\to r)\to r)$.

   3 $p/p \to q$, $q/p \to q$ ∗ 4 $r/p \to q$ – 6,
6. $(p \to q) \to(p \to q)$.

   2 $p/p \to q$, q/p, r/q ∗ 6 – 7,
7. $p \to ((p \to q) \to q)$.

   3 $p/(((p \to p) \to p)\to p)\to q$ ∗ 5 q/p, r/q –8,
8. $((((p \to p) \to p)\to p)\to q)\to q$

   2 $p/q \to r$, $q/p \to q$, $r/p \to r$ ∗ 1 – 9,

9. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$.

9 $q/(p \to q) \to q * 7 - 10$,

10. $(((p \to q) \to q) \to r) \to (p \to r)$.

8. $q/p \to p * q/p, r/p - 11$,

11. $p \to p$.

В заключение хотелось бы вернуться к пониманию того, что такое "подструктурные логики" Создается впечатление, что любая подструктурная логика есть *существенное* ограничение классической. Однако гильбертовские аксиоматизации некоторых подструктурных логик можно представить как расширение классической. Это имеет место, например, для широкого класса многозначных логик [1], в том числе для логик Лукасевича; для релевантной логики **R** [26]. На то, что интуиционистская логика **H** есть расширение классической **TV**, указывает К.Гёдель [21]. При этом Гёдель опирается на результат Гливенко 1929 г. (см. [3]) о переводе **H** в **TV**. Именно теория переводов и погружений одних логических систем в другие [11], которая сейчас бурно развивается (см., например, [17]), может существенно прояснить принципы взаимоотношения различных логических систем и выяснить, что на самом деле представляют собой подструктурные логики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аншаков О.М.* & *Рычков С.В.* Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // Семиотика и информатика. Вып. 23. 1984. С. 78-106.
2. *Генцен Г.* Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967.
3. *Гливенко В.* О некоторых аспектах логики Брауэра // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 1999. С. 19-23.
4. *Гришин В.Н.* Об одной нестандартной логике и ее применнении к теории множеств // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974. С. 135-171.
5. *Карпенко А.С.* Классификация пропозициональных логик // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997. С. 107-133.
6. *Карпенко А.С.* Логики Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2000.
7. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: ИИЛ, 1957.
8. *Комендантский В.Е.* OTTER и доказательство рефлексивности импликации // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М., 2001.
9. *Сидоренко Е.А*. Релевантная логика. М.: ИФРАН, 2000.

10. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука, 1972. (Переиздано с комментариями: Смирнов В.А. Теория логического вывода. М.: РОССПЭН, 1999. С. 16-233).
11. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. (Переиздано: Смирнов В.А. Логико-философские труды. М.: УРСС, 2001).
12. *Хао Ван*. На пути к механической математике // Кибернетический сборник. Вып. 5. 1962. С. 114-165. (Перевод с англ.: Wang Hao. Toward mechanical mathematics // IBM J. Res. Devel. 1960. Vol. 4. N 1. P. 2-22).
13. *Aguzzoli S.* & *Ciabattoni A.* Finiteness in infinite-valued Łukasiewicz logic // Journal of Logic, Language, and Information. 2000. Vol. 9. P. 5-29.
14. *Anderson A.R.* & *Belnap N.D., jr*. Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 1. Princeton Univ. Press, 1975.
15. *Anderson A. R.*, *Belnap N.D., jr*., *Dunn J. M*. Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 2. Princeton Univ. Press, 1992.
16. *Avron A.* A constructive analyse of RM // The Journal of Symbolic Logic. 1987. Vol. 52. N 2.
17. *Carnielli W.A.*& *D'Ottaviano M. L.* Translations between logical systems: A MANIFESTO *//* Logique et Analyse*. 1997. N 157. P. 67-81.*
18. *Cignoli R.*, *D'Ottaviano J.*, *Mundici D.* Algebraic Foundation of Many-Valued Reasoning. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
19. *Dozen K.* & *Schroeder-Heister P.* (eds.). Substructural Logics. Oxford, 1993.
20. *Girard J.Y.* Linear logic // Theoretical Computer Science. 1987. Vol. 50. P. 1-102.
21. *Gödel. K.* Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. 1933. Vol. 4. P. 34-38. (Англ. пер.: On intuitionistic arithmetic and number theory // K.Gödel. Collected Works / Ed. in chief S.Feferman. N.Y.: Oxford Univ. Press. Vol. 1. 1986. P. 287-295).
22. *Karpenko A.S.* The classification of propositional calculi // Studia Logica. 2000. Vol. 66. P. 253-271.
23. *Kiriyama E.* & *Ono H.* The contraction rule and decision problems for logics without structural rules // Studia Logica. 1991. Vol. 50. P. 299-319.
24. *Łukasiewicz J.* & *Tarski A.* Untersuchungen über den Aussagenkalkül. Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Classe III. 1930. Vol. 23. P. 1-21. (Англ. перевод: Investigations into the sentential calculus // Łukasiewicz J. Selected Works. Warszawa: PWN, 1970. P. 131-152).
25. *MacCaull W.* Relational semantics and a relational prove system for full Lambek calculus // The Journal of Symbolic Logic. 1998. Vol. 63. P. 623-637.
26. *Meyer R.K.* New axiomatics for relevant logics - I // Journal of Philosophical Logic. 1974. Vol. 3. P. 53-58.

27. *Ono H.* & *Komori Y.* Logics without the contraction rule // The Journal of Symbolic Logic. 1985. Vol. 50. P. 169-201.
28. *Prior A.N.* Formal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1962.
29. *Restall G.* An Introduction to Substructural Logics. Routledge, 2000.
30. *Rasiowa H.* An Algebraic Approach to Non-classical Logics. Warszawa: PWN, 1974.
31. *Troelstra A.S.* Lectures on Linear Logic. Stanford: CSLI, 1992.