Ю.В.Ивлев

КВАЗИМАТРИЧНАЯ ЛОГИКА – ОСНОВА ТЕОРИИ ФАКТИЧЕСКИХ (ФИЗИЧЕСКИХ) МОДАЛЬНОСТЕЙ*

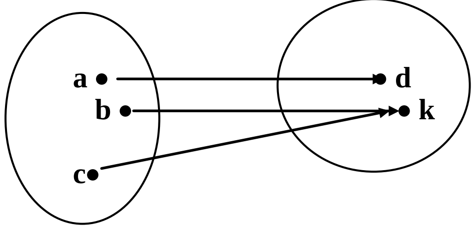
Abstract. *Quasi-matrix logic is based on generalisation of classical logic principles: bivalency (propositions take values from the domain* {t *(truth),* f *(falsity)*}*); consistency (a proposition can not have both the values); excluded middle (a proposition necessarily has some of these values); identity (in a complex proposition, a system of propositions, an argument one and the same proposition has one and the same value from the domain {t, f}); matrix principle – logical connectives are defined by matrices. As a result of generalisation we have quasi-matrix logic principles: the principle of fourvalency (propositions take values from the domain* $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$*); consistency: can not have more than one value from* $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$*; the principle of excluded fifth; identity (in a complex proposition, a system of propositions, an argument one and the same proposition has one and the same value from the domain* $\{t^n, t^c, f^c, f^i\}$*); the quasi-matrix principle (logical terms are interpreted as quasi-functions). Quasi-matrix logic is a logic of factual modalities.*

Квазиматрица – это множество $(Q,G,qf_1,...,qf_s)$, где Q и G – непустые множества, $Q \subseteq G$; $qf_1,...,qf_s$ – квазифункции.

Если функцией называется соответствие, в силу которого определенный объект из некоторого множества соотносится с определенным объектом из того же или другого множества, то квазифункция – это соответствие, в силу которого некоторый объект из определенного подмножества некоторого множества соотносится с некоторым объектом из определенного подмножества того же или другого множества.

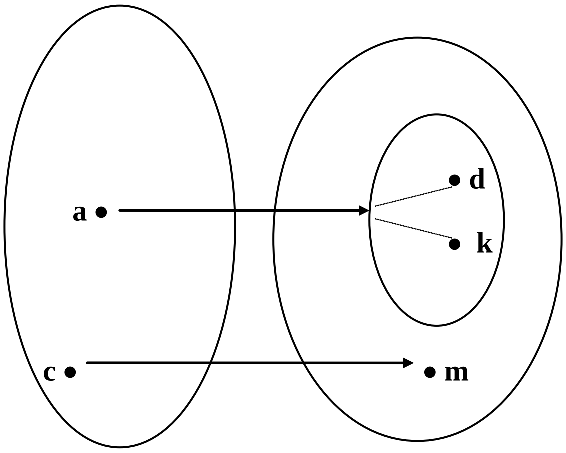
Примеры.

Функция: {(a,d), (b,k), (c,k)}.

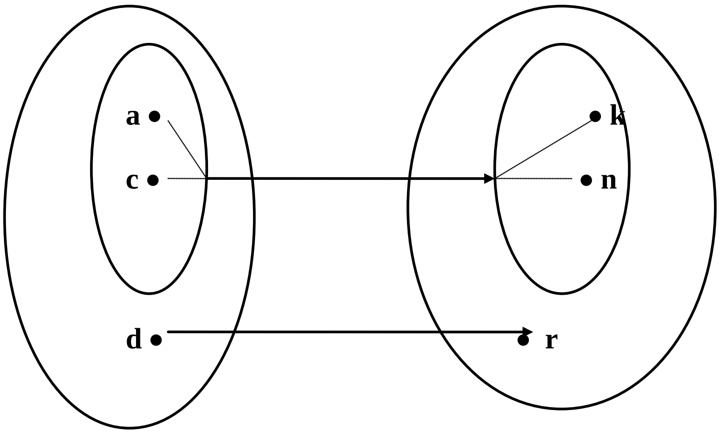


* Исследование поддержано РГНФ, грант 00-03-00319.

Квазифункция: {(a,d) $\vee_2$ (a,k), (c,m)} = {{(a,d), (c,m)} $\vee_2$ {(a,k), (c,m)}}.



Квазифункция:{$\vee_4$ ((a,k), (a,n), (c,k), (c, n)), (d,r)} = {$\vee_4$ [{(a,k), (d,r)}, {(a,n), (d,r)}, {(c,k), (d,r)}, {(c, n), (d,r)}]}



$\vee_2$ и $\vee_4$ – двух- и четырехместые метаязыковые строгие дизъюнкции. Будем считать, что дизъюнкция может быть вырожденной, то есть частным случаем квазифункции является функция. Тогда частным случаем квазиматрицы является матрица.

В общем случае объект, к которому применяется квазифункция, не определен. Не определено также значение квазифункции. Указана лишь подобласть области определения квазифункции, в которой этот объект содержится, и подобласть области значений, в которой содержится объект, являющийся значением квазифункции.

Неопределенность может быть познавательной. Этот случай имеет место, если объективно соответствие является функциональным, но оно исследователю не полностью известно. Например, при переводе выражения одного языка на другой в словаре указываются три слова, соответствующие переводимому. Наиболее адекватно в данном контексте переводимому слову соответствует одно из трех, но переводчику не известно, какое. Такие ситуации возникают и при автоматическом переводе.

Другой причиной неопределенности является неопределенность самой реальности. Например, при планировании может возникнуть необходимость учесть следующую ситуацию. Известны пределы изменения количества сырья, которое будет произведено в следующем году. Жесткой же связи между определенным количеством производимого сырья и количеством производимой продукции, даже при известных количествах рабочей силы, оборудования и т. д., нет.

На примерах (без определений) квазифункции ввели в научный оборот Х. Райхенбах (H. Reichenbach) (1932, 1935, 1936), З. Заварский (Z. Zavarski) (1936), Ф. Гонзес (F. Gonseth) (1938, 1941), Н. Решер (N.Rescher) (1962, 1964, 1965, 1969).

Решер рассматривает материальную импликацию и дает ее определение:

A	$\supset$	B
t	t	t
t	f	f
f	(t,f)	t
f	(t,f)	f

(t,f) не является значением, это выражение означает “то ли истина, то ли ложь”, то есть в зависимости от конкретного содержания высказываний импликация в этих случаях может быть как истинной, так и ложной. Остальные связки определяются обычным образом.

Очевидно, что не все тавтологии классической логики высказываний вида $A \supset B$ принимают значения t при всех значениях составляющих.

Решер вводит понятие квазитавтологии. Это формула, котороя принимает только значения t или (t,f). Если довести до логического конца предложение Решера, то следует признать квазитавтологией переменную p.

Далее Решер вслед за Гонзесом (но независимо) “исправляет” определения трехзначной логики Лукасевича:

A	$\wedge$	B
1/2	(1/2,0)	1/2

Независимо от этих и, возможно, других авторов я пришел к сходным соображениям в конце шестидесятых – начале семидесятых годов при разработке модальной логики. Мне представлялось неудовлетворительным существовавшее тогда положение дел в модальной логике. Было разработано много “логических систем”, но не было известно, какие модальные понятия в них представлены. Даже не было известно, логические или фактические (физические) модальные понятия необходимости, возможности и т. д. ими определяются. И уж конечно не шла речь о типах фактических модальностей. Не было известно, могут ли эти “логические системы” использоваться для исследования рассуждений. Размышления над сложившимся положением дел в области модальной логики привели к тому, что я выделил в современных исследованиях по логике два направления: собственно логику и подражание логике. Собственно логика имеет своим предметом формы мыслей. Эту логику Х. Карри называет философской логикой. Подражание логике – это некоторая система, например алгебраическая, которая в каком-то отношении сходна с философской логикой (может быть сходна только в отношении некоторых значков). Далее под логикой я буду иметь в виду современную логику в смысле философской логики Карри.

Как в любой другой науке, в логике можно выделить две ступени развития – эмпирическую и теоретическую. Одним из свойств теории является ее способность объяснять явления. Таким свойством обладает, на мой взгляд, моя концепция логических модальностей, основы которой представлены в [4 и 5]. Теория фактических модальностей, которая может основываться на квазиматричной логике, находится в стадии разработки.

Разработку квазиматричной логики я начал с построения системы, которую назвал минимальной модальной логикой.

Минимальная модальная логика – S_{min}. (Символы языка: $\Box$, $\Diamond$, $\neg$, $\supset$.) Известно утверждение Я. Лукасевича о невозможности определения модальных операторов “необходимо” ($\Box$) и “возможно” ($\Diamond$) в терминах “истина” и “ложь”. Это утверждение является верным лишь в случае истолкования указанных операторов в качестве функций. При истолковании их в качестве квазифункций определение в указанных терминах возможно.

Рассмотрим формулу □A. Пусть A имеет значение f (ложь). Тогда формула □A тоже имеет значение f, так как несуществующее положение дел нельзя считать необходимым (логически или фактически). Таким образом, получена одна строка таблицы:

A	□A
f	f

Пусть формула A имеет значение t (истина). Какое значение в этом случае имеет формула □A? Значение не определено. Формула □A имеет то ли значение t, то ли значение f. Эту ситуацию обозначим так: t/f. Рассуждая аналогично, устанавливаем, что при значении f формулы A значение формулы ◊A неопределено. Определения знаков отрицания и импликации обычные. Выделенное значение – t.

Принцыпы построения классической логики высказываний и логики $\mathbf{S}_{min}$:

Принципы классической логики		Принципы квазиматричной логики $\mathbf{S}_{min}$
(1) принцип двухзначности – высказывания принимают значеня из области {t, f}		принцип двухзначности
(2) принцип непротиворечия (высказывание не может иметь оба значения)		принцип непротиворечия
(3) принцип исключенного третьего (высказывание обязательно принимает значение из указанной области)		принцип исключенного третьего
(4) принцип тождества: в сложном высказывании, системе высказываний, аргументации одно и то же высказывание принимает одно и то же значение из области {t,f}		принцип тождества
(5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в пропозициональной логике этот принцип выступает в качестве принципа матричности – логические термины определяются посредством матриц, в логике предикатов он выражается в интерпретации логических терминов посредством функций).		принцип квазиматричности (логические термины интерпретируются посредством квазиматриц)

Семантически построенной системе адекватно исчисление $\mathbf{S}_{\min}$, которое является расширением классического исчисления высказываний (КИВ) за счет добавления двух новых схем аксиом: $\Box A \supset A$, $A \supset \Diamond A$. Исчисление $\mathbf{S}_{\min}$ является более бедной системой, чем основная модальная логика Я. Лукасевича, так как формула $\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A$ в ней не доказуема.

Для доказательства метатеоремы о семантической полноте исчисления вводится понятие альтернативной интерпретации. Альтернативная интерпретация – это функция $\| \ \|$.

Определение альтернаивной интерпретации.

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\| \in \{t, f\}$.

Если $\|A\|$ и $\|B\|$ определены,

то $\|\neg A\| = t \Leftrightarrow \|A\| = f$;

$\|A \supset B\| = t \Leftrightarrow \|A\| = f$ или $\|B\| = t$;

$\|A\| = f \Rightarrow \|\Box A\| = f$;

$\|A\| = t \Rightarrow \|\Box A\| \in \{t, f\}$;

$\|A\| = t \Rightarrow \|\Diamond A\| = t$;

$\|A\| = f \Rightarrow \|\Diamond A\| \in \{t, f\}$.

Формула выполнима, если и только если она истинна при некоторой альтернативной интерпретации. Формула общезначима, если и только если она истинна при каждой альтернативной интерпретации. В качесстве метатеоремы о семантической полноте доказано утверждение: существует альтернативная интерпретация $\| \ \|_{\Theta}$, при которой каждая формула из Θ является истинной. (Θ – максимальное совместимое с $\mathbf{S}_{\min}$ множество формул.)

Четырехзначные квазиматричные логические системы

Значения t^n, t^c, f^c, f^i понимаются так: высказывание, принимающее значение t^n, описывает положение дел, которое имеет место в действительности и которое однозначно детерминировано какими-либо обстоятельствами; высказывание, принимающее значение t^c, описывает положение дел, которое имеет место в действительности и которое не детерминировано однозначно теми или иными обстоятельствами; высказывание, принимающее значение f^c, описывает положение дел, которого нет в действительности и отсутствие которого не детерминировано однозначно теми или иными обстоятельствами; высказывание, принимающее значение f^i, описывает положение дел, которое не имеет места в действительности и отсутствие которого однозначно детерминировано какими-либо обстоятельствами.

Четырехзначная квазиматричная логика основана на следующем обобщении принципов классической логики.

Принципы классической логики		Принципы квазиматричной логики
(1) принцип двухзначности – высказывания принимают значеня из области {t, f}		принцип четырехзначности: {t^n, t^c, f^c, f^i}
(2) принцип непротиворечия (высказывание не может иметь оба значения)		принцип непротиворечия: не может иметь более одного значения из {t^n, t^c, f^c, f^i}
(3) принцип исключенного третьего (высказывание обязательно принимает значение из указанной области)		принцип исключенного пятого
(4) принцип тождества: в сложном высказывании, системе высказываний, аргументации одно и то же высказывание принимает одно и то же значение из области {t,f}		принцип тождества: одно и то же значение из области {t^n, t^c, f^c, f^i}
(5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в пропозициональной логике этот принцип выступает в качестве принципа матричности – логические термины определяю.тся посредством матриц, в логике предикатов он выражается в интерпретации логических терминов посредством функций).		принцип квазиматричности (логические термины интерпретируются посредством квазиматриц)

Логические термины те же, что и в $\mathbf{S}_{\min}$.

Определения логических терминов:

		a		b		c		d		e		f	
A	**¬A**	**□A**	**◊A**	**□A**	**◊A**	**□A**	**◊A**	**□A**	**◊A**	**□A**	**◊A**	**□A**	**◊A**
t^n	f^i	t	t	t^n	t^n	t^n	t^n	t^c	t^c	t^c	t^c	t	t
t^c	f^c	f	t	f^c	t^c	f^i	t^n	f^c	t^c	f^i	t^n	f^i	t^n
f^i	t^n	f	f	f^i	f^i	f^i	f^i	f^c	f^c	f^i	f^c	f	f
f^c	t^c	f	t	f^c	t^c	f^i	t^n	f^c	^{c}	f^i	t^n	f^i	t^n

g		h		i	
□A	◊A	□A	◊A	□A	◊A
t	t	t^n	t^n	t^c	t^c
f^c	t^c	f	t	f	t
f	f	f^i	f^i	f^c	f^c
f^c	t^c	f	t	f	t

		B			
(-)	⊃	t^n	t^c	f^i	f^c
	t^n	t^n	t^c	f^i	f^c
A	t^c	t^n	t^c	f^c	f^c
	f^i	t^n	t^n	t^n	t^n
	f^c	t^n	t^c	t^c	t^c

		B			
( )	⊃	t^n	t^c	f^i	f^c
	t^n	t^n	t^c	f^i	f^c
A	t^c	$t^n \vert t^c$	t^c	f^c	f^c
	f^i	t^n	t^n	t^n	t^n
	f^c	t^n	t^c	t^c	$t^n \vert t^c$

		B			
(+)	⊃	t^n	t^c	f^i	f
	t^n	t^n	t^c	f^i	f^c
A	t^c	$t^n \vert t^c$	t^c	f^c	f^c
	f^i	t^n	t^n	t^n	t^n
	f^c	$t^n \vert t^c$	t^c	t^c	$t^n \vert t^c$

Знаки **t** и **f** соответственно понимаются как сокращения для выражений **t^n/ t^c и f^i/ f^c.**

На основе приведенных определений строятся логические системы

Sa^-, Sa, Sa^+, Sb^-, Sb, Sb^+, Sc^-, Sc, Sc^+, Sd^-, Sd, Sd^+, Se^-, Se, Se^+, Sf^-, Sf, Sf^+, Sg^-, Sg, Sg^+, Sh^-, Sh, Sh^+, Si^-, Si, Si^+. Малая буква в названии системы соответствует способу определения модальных терминов, знаки +, - и отсутствие этих знаков соответствуют способу определения импликации. Выделенными значениями являются **t^n и t^c.**

Приведенные определения логических терминов введены на основе следующих соображений.

Пусть дана формула □□**A**. При значении t подформулы **A**, значение □**A**, как уже было сказано, не определено, то есть ситуация, описываемая высказыванием **A**, имеет место в действительности, но она детерминирована, например, однозначно или же не однозначно. В первом случае формуле □**A** следует приписать значение t, а во втором f. То есть в первом случае высказывание **A** оценивается как истинное и фактически необходимое, в нашей терминологии имеет значение t^n. Какое значение в этом случае принимает формула □□**A**? Если положение дел, описываемое высказыванием **A**, однозначно терминировано какими-либо обстоятельствами, то эти последние тоже могут быть детерминированы или не детерминированы какими-то иными обстоятельствами. То есть формула $\Box$**A** тоже получает оценку t^n (или t^c) и т. д. Такие ситуации имеют место как в субъективной, так и в объективной действительности.

Виды однозначной и неоднозначной детерминации в биологии рассмотрены В.Ю. Ивлевым в [1, 2].

Формализацией семантически заданных систем являются исчисления, содержащие в качестве общей части все схемы аксиом классического исчисления высказываний, правило **modus ponens**, а также следующие схемы аксиом:

$\Box A \supset A$; $\neg\Box\neg A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \neg\Box\neg A$; $\neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B)$; $\Box B \supset \Box(A \supset B)$; $\Diamond B \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$.

Исчисление, представляющее собой расширение классического исчисления высказываний за счет последних восьми схем аксиом, обознается буквой **S.** Соответствующие исчисления, обозначаемые так же, как и семантически заданные системы, строятся путем расширения исчисления **S** посредством следующих схем аксиом.

Sa^-: $\Box(A \supset B) \supset)(\Diamond A \supset \Box B)$.

Sa: $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond\neg B \supset (\neg A \supset \neg B)))$.

Sa^+: $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$.

Sb^-: $\Box(A \supset B) \supset)(\Diamond A \supset \Box B)$; $\Box A \supset \Box\Box A$; $\Diamond\Box A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \Diamond\Box A$; $\Box A \supset \Box\Diamond A$; $\Box\Diamond A \supset \Box A$; $\Diamond\Diamond A \supset \Diamond A$.

Sb: $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond\neg B \supset (\neg A \supset \neg B)))$ $\Box A \supset \Box\Box A$; $\Diamond\Box A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \Diamond\Box A$; $\Box A \supset \Box\Diamond A$; $\Box\Diamond A \supset \Box A$; $\Diamond\Diamond A \supset \Diamond A$.

Sb^+: $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$; $\Box A \supset \Box\Box A$; $\Diamond\Box A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \Diamond\Box A$; $\Box A \supset \Box\Diamond A$; $\Box\Diamond A \supset \Box A$; $\Diamond\Diamond A \supset \Diamond A$.

Исчисления **Sc^-, Sd^-, Se^-, Sf^-, Sg^- , Sh^- , Si^-** содержат схему аксиом $\Box(A \supset B) \supset) \supset (\Diamond A \supset \Box B)$.

Исчисления **Sc, Sd, Se, Sf, Sg, Sh, Si** содержат схемы аксиом $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset (\Diamond\neg B \supset (\neg A \supset \neg B)))$.

Исчисления **Sc^+, Sd^+, Se^+, Sf^+, Sg^+, Sh^+, Si^+** содержат схемы аксиом $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$;.

Исчисления, в обозначении которых имеется одна и та же малая буква, например исчисления $\mathbf{Sc^{-}}$, $\mathbf{Sc}$, $\mathbf{Sc^{+}}$, отличаются только множествами схем аксиом

$\{\Box(A\supset B)\supset(\Diamond A\supset\Box B)\}$, $\{\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box B)$; $\Box(A\supset B)\supset(\Diamond A\supset\Diamond B)$; $\Box(A\supset B)\supset(\Diamond A\supset(\Diamond\neg B\supset(\neg A\supset\neg B)))\}$, $\{\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box B)$; $\Box(A\supset B)\supset(\Diamond A\supset\Diamond B)\}$.

Остальные дополнительные схемы аксиом этих исчислений одни и те же.

Приведем эти последние дополнительные схемы аксиом.

Исчисления $\mathbf{Sc^{-}}$, $\mathbf{Sc}$, $\mathbf{Sc^{+}}$. $\Box A\supset\Box\Box A$; $\Diamond\Diamond A\supset\Diamond A$; $\Diamond\Box A\supset\Box A$; $\Diamond A\supset\Box\Diamond A$.

Исчисления $\mathbf{Sd^{-}}$, $\mathbf{Sd}$, $\mathbf{Sd^{+}}$. $\Diamond A^{*}$, где A^{*} – модализированная формула. Исчисления $\mathbf{Se^{-}}$, $\mathbf{Se}$, $\mathbf{Se^{+}}$. $\Diamond\Diamond A$; $\Diamond\neg\Box A$; $\neg\Diamond A\supset\Diamond\Box A$; $\Box A\supset\Diamond\neg\Diamond A$; $\Diamond\Box A\supset(A\supset\Box A)$; $\Diamond\Box A\supset(\Diamond A\supset A)$; $A\supset(\Diamond\neg A\supset\Box\Diamond A)$; $\neg A\supset(\Diamond A\supset\Box\Diamond A)$.

Исчисления $\mathbf{Sf^{-}}$, $\mathbf{Sf}$, $\mathbf{Sf^{+}}$. $\Diamond\Box A\supset(A\supset\Box A)$; $\Diamond\Box A\supset(\Diamond A\supset A)$; $A\supset(\Diamond\neg A\supset\Box\Diamond A)$; $\neg A\supset(\Diamond A\supset\Box\Diamond A)$.

Исчисления $\mathbf{Sg^{-}}$, $\mathbf{Sg}$, $\mathbf{Sg^{+}}$. $A\supset(\neg\Box A\supset\Diamond\Box A)$; $\neg A\supset(\Diamond A\supset\Diamond\Box A)$; $\Box\Diamond A\supset(A\supset\Box A)$; $\Box\Diamond A\supset(\Diamond A\supset A)$.

Исчисления $\mathbf{Sh^{-}}$, $\mathbf{Sh}$, $\mathbf{Sh^{+}}$. $\Box A\supset\Box\Box A$; $\Diamond\Box A\supset\Diamond A$; $\Box A\supset\Box\Diamond A$; $\Diamond\Diamond A\supset\Diamond A$.

Исчисления $\mathbf{Si^{-}}$, $\mathbf{Si}$, $\mathbf{Si^{+}}$. $\Diamond\Diamond A$; $\Diamond\neg\Box A$; $\neg\Diamond A\supset\Diamond\Box A$; $\Box A\supset\Diamond\neg\Diamond A$.

Для доказательства семантической полноты каждого из исчислений $\mathbf{Sb^{-}}$, $\mathbf{Sc^{-}}$, $\mathbf{Sd^{-}}$, $\mathbf{Sd}$, $\mathbf{Se^{-}}$ (семантики этих исчислений являются матричными) доказана следующая **лемма**. Пусть $a_1,\dots,a_n$ – все различные переменные, входящие в формулу D, а $b_1,\dots,b_n$ – истинностные значения этих переменных. Пусть A_i есть $\Box a_i$, $a_i \wedge \Diamond\neg a_i$, $\neg\Diamond a_i$ или $\neg a_i \wedge \Diamond a_i$ в зависимости от того, есть ли b_i t^n, t^c, f^i или f^c; пусть D^{*} есть $\Box D$, $D \wedge \Diamond\neg D$, $\neg\Diamond D$ или $\neg D \wedge \Diamond D$ в зависимости от того, принимает ли D значение t^n, t^c, f^i, f^c при значениях $b_1,\dots,b_n$ переменных $a_1,\dots,a_n$. Тогда

$$A_1,\dots,A_n \Rightarrow D^{*}.$$

($\Rightarrow$ – знак следования.) Доказательство проведено методом возвратной математической индукции.

Семантики остальных исчислений являются (собственно) квазиматричными. При доказательстве метатеорем о семантической полноте этих исчислений используются понятия альтернативных интерпрпретаций. Сформулируем это понятие для системы $\mathbf{Sa^{+}}$.

Альтернативная интерпретация – это функция $\|\ \|$, определяемая следующим образом.

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\| \in \{t^n, t^c, f^c, f^i\}$.

Если $\|A\|$ и $\|B\|$ определены, то $\|\neg A\| = t^n \Leftrightarrow \|A\| = f^i$; $\|\neg A\| = t^c \Leftrightarrow \|A\| = f^c$; $\|\neg A\| = f^i \Leftrightarrow \|A\| = t^n$; $\|\neg A\| = f^c \Leftrightarrow \|A\| = t^c$;

$\|A \supset B\| = f^c \Leftrightarrow$ ($\|A\| = t^n$ и $\|B\| = f^c$) или ($\|A\| = t^c$ и $\|B\| = f^c$), или ($\|A\| = t^c$ и $\|B\| = f^i$); $\|A \supset B\| = f^i \Leftrightarrow \|A\| = t^n$ и $\|B\| = f^i$; если или ($\|A\| = t^n$ и $\|B\| = t^c$), или ($\|A\| = f^c$ и $\|B\| = f^i$), то $\|A \supset B\| = t^c$; если $\|A\| = f^i$ или $\|B\| = t^n$, то $\|A \supset B\| = t^n$; если или $\|A\| = \|B\| = t^c$, или ($\|A\| = f^c$ и $\|B\| = t^c$), или $\|A\| = \|B\| = f^c$, то $\|A \supset B\| \in \{t^n, t^c\}$;

$\|A\| = t^n \Rightarrow \|\Box A\| \in \{t^n, t^c\}$; если или $\|A\| = t^c$, или $\|A\| = f^c$, или $\|A\| = f^i$, то $\|\Box A\| \in \{f^c, f^i\}$;

$\|A\| = f^i \Rightarrow \|\Diamond A\| \in \{f^c, f^i\}$; если или $\|A\| = t^n$, или $\|A\| = t^c$, или $\|A\| = f^c$, то $\|\Diamond A\| \in \{t^n, t^c\}$.

В качестве метатеоремы о семантичекой полноте доказывается утввերждение: *множ ест во формул* $\boldsymbol{\Delta}$, *совмест имое с исчислением, выполнимо.* Множество формул $\boldsymbol{\Delta}$ расширяется до максимального совместимого с исчислением множества формул $\boldsymbol{\Theta}$. Вводится функция $\|\ \|_\Theta$ такая, что для произвольной формулы A верно: $\|A\|_\Theta = t^n \Leftrightarrow A \in \boldsymbol{\Theta}$ и $\Box A \in \boldsymbol{\Theta}$; $\|A\|_\Theta = t^c \Leftrightarrow A \in \boldsymbol{\Theta}$ и $\Diamond \neg A \in \boldsymbol{\Theta}$; $\|A\|_\Theta = f^i \Leftrightarrow \neg A \in \boldsymbol{\Theta}$ и $\neg \Diamond A \in \boldsymbol{\Theta}$; $\|A\|_\Theta = f^c \Leftrightarrow \neg A \in \boldsymbol{\Theta}$ и $\Diamond A \in \boldsymbol{\Theta}$. Индукцией по числу вхождений логических терминов в формулу доказывается, что функция $\|A\|_\Theta$ является альтернативной интерпретацией.

Очевидно, что функция $\|A\|_\Theta$ приписывает выделенное значение каждой формуле из $\boldsymbol{\Delta}$.

$\mathbf{S_r}$ – квазиматричная трехзначная логика. (Язык содержит те же символы.) Вводятся значения n, c, i, которые соответственно читаются “необходимо”, “случайно”, “невозможно”. Положение дел необходимо, если и только если оно однозначно детерминировано какими-либо обстоятельствами; положение дел случайно, если и только если ни оно, ни его отсутствие не детерминировано однозначно какими-либо обстоятельствами; положение дел невозможно, если и только если его отсутствие однозначно детерминировано какими-либо обстоятельствами. Фактически здесь и выше оценки положений дел я переношу на высказывания. К сожалению, мне не удалось подобрать соответствующих подходящих терминов для оценки высказываний.

Логика $\mathbf{S_r}$ основана на следующих обобщениях принципов классической логики:

Принципы классической логики		Принципы квазиматричной логики $\mathbf{S_r}$
(1) принцип двухзначности – высказывания принимают значеня из области {t, f}		принцип трехзначности: из области {n, c, i}
(2) принцип непротиворечия (высказывание не может иметь оба значения)		принцип непротиворечия: не может иметь более одного значения из из области {n, c, i}
(3) принцип исключенного третьего (высказывание обязательно принимает значение из указанной области)		принцип исключенного четвертого
(4) принцип тождества: в сложном высказывании, системе высказываний, аргументации одно и то же высказывание принимает одно и то же значение из области {t,f}		принцип тождества: принимает одно и то же значение из области {n, c, i}
(5) принцип обусловленности истинностного значения сложного высказывания истинностными значениями составляющих его простых высказываний (в пропозициональной логике этот принцип выступает в качестве принципа матричности – логические термины определяются посредством матриц, в логике предикатов он выражается в интерпретации логических терминов посредством функций).		принцип квазиматричности (логические термины интерпретируются посредством квазиматриц)

Определения логических терминов:

A	**¬A**	**□A**	**◊A**
n	**i**	**n**	**n**
c	**c**	**i**	**n**
i	**n**	**i**	**i**

		B		
	⊃	**n**	**c**	**i**
	n	**n**	**c**	**i**
A	**c**	**n**	**n|c**	**c**
	i	**n**	**n**	**n**

n|c понимается как “то ли **n**, то ли **c”**. Выделенное значение – **n**.

Соответствующее исчисление включает все схемы аксиом КИВ, в которых метасимволы **A, B, C** обозначают модализированные формулы, **modus ponens, правило Геделя,** все схемы аксиом исчисления $\mathbf{Sc}^{+}$, дополнительные по отношению к КИВ, а также схемы: **$\Box A \supset \Diamond A$; $\neg A \supset \neg \Box A$; $\neg \Diamond A \supset \neg A$; $A \supset \Diamond A$.**

Альтернативная интерпретация – это функция $\|\ \|$, определяемая следующим образом.

Если P – пропозициональная переменная, то $\|P\| \in \{n, c, i\}$.

Если $\|A\|$ и $\|B\|$ определены, то $\|\neg A\| = n \Leftrightarrow \|A\| = i$; $\|\neg A\| = c \Leftrightarrow \|A\| = c$; $\|\neg A\| = i \Leftrightarrow \|A\| = n$;

если $\|A\| = i$ или $\|B\| = n$, то $\|A \supset B\| = n$; если $\|A\| = \|B\| = c$, то $\|A \supset B\| \in \{n, c\}$; если $\|A\| = c$ и $\|B\| = i$, то $\|A \supset B\| = c$; $\|A\| = n$ $\|B\| = i \Leftrightarrow \|A \supset B\| = i$;

$\|\Box A\| = n \Leftrightarrow \|A\| = n$; если $\|A\| = c$ или $\|A\| = i$, то $\|\Box A\| \in i$;

$\|\Diamond A\| = i \Leftrightarrow \|A\| = i$; если $\|A\| = n$ или $\|A\| = c$, то $\|\Diamond A\| = n$.

Метатеорема о семантической полноте формулируется и доказывается так же, как и в предшествующем случае.

Некоторые особенности этой логической системы.

Во-первых, в ней имеет место **правило Геделя.**

Во-вторых, все производные правила вывода классического исчисления высказываний, являясь правилами вывода данного исчисления, применимы в выводе лишь к модализированным формулам. Некоторые (по крайней мере некоторые) прямые правила вывода натурального исчисления высказываний применимы и к немодализированным формулам, например, правило: $A \vee B, \neg A \Rightarrow B$. Такие непрямые правила, как правило дедукции

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \supset B}$$

и приведения к абсурду

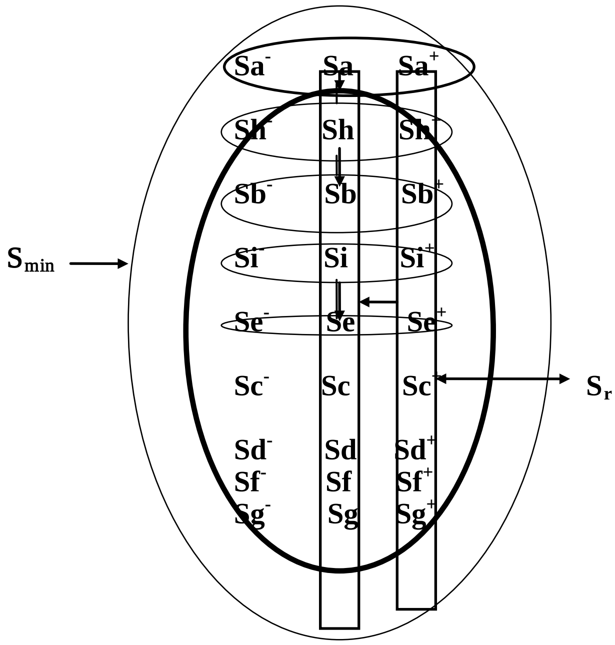
$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B;\ \Gamma, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma \Rightarrow \neg A}$$

не применимы к немодализированным формулам в выводе. Однако применимым к любым формулам в выводе является *ослабленное правило приведения к абсурду*

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B;\ \Gamma, A \Rightarrow \neg B}{\Gamma \Rightarrow \Diamond \neg A}$$

• • •

Можно выявить зависимости между исчислениями. $\mathbf{S_{min}}$ включается (по множеству теорем) в каждое из приведенных исчислений, кроме $\mathbf{S_r}$. **S** включается в каждое из исчислений, кроме $\mathbf{S_{min}}$ и $\mathbf{S_r}$. Эти и некоторые другие отношения между исчислениями можно представить наглядно.



Стрелка обозначает включение (по множеству теорем) исчисления $\mathbf{S_{min}}$ в каждое из исчислений, находящихся в овале, или включение каждого из исчислений, находящихся в овале или прямоугольнике, в соответствующее ему исчисление, находящегося в овале или прямоугольние, например, исчисление $\mathbf{Sa^-}$ включается в исчисления $\mathbf{Sb^-}$, $\mathbf{Sc^-}$, $\mathbf{Sd^-}$, $\mathbf{Se^-}$, $\mathbf{Sf^-}$, $\mathbf{Sg^-}$, $\mathbf{Sh^-}$, $\mathbf{Si^-}$; а **Si, –** в **Se;** $\mathbf{Sc^+}$ **–** в **Sc** и т. д. Двойная стрелка указывает, что исчисление $\mathbf{Sc^+}$ имеет наибольшее количество теорем, общих с исчилением $\mathbf{S_r}$.

Открытым является вопрос о возможности построения алгебраических и реляционных семантик для приведенных систем. Исчисление **S** *не имеет и квазиматричной семантики.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев В.Ю.* “Необходимость”, “случайность”, “возможность” в биологии и их философские обобщения // Категории. Философский журнал. 1997, № 2.

2. *Ивлев В. Ю.* Категории необходимости, случайности и возможности: их смысл и методологическая роль в научном познании // Философия и общество. 1997, № 3.
3. *Ивлев В. Ю., Ивлев Ю. В.* Проблема построения теории фактических модальностей // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000.
4. *Ивлев Ю. В.* Модальная логика. М., 1991.
5. *Ивлев Ю. В.* Содержательная семантика модальной логики. М., 1985.
6. *Ивлев Ю. В.* Квазифункциональная логика // НТИ, сер. 2. Информ. процессы и системы. 1992, № 6.
7. *Ивлев Ю. В.* Таблицы истинности для модальной логики. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Философия. 1973, № 6.
8. *Карпенко А. С.* Многозначные логики. М., 1997.
9. *Финн В. К.* О некоторых характеристических истинностных таблицах классической логики и трехзначной логики Я. Лукасевича // Исследования логических систем. М., 1970.
10. *Rescher N.* Many-valued logic. N.Y., 1969.