

Б.И.Федоров

## Б.БОЛЬЦАНО КАК ПРЕДШЕСТВЕННИК КОНСТРУКТИВИЗМА. II

Развивая идею первенства прямых доказательств над косвенными (непрямыми) в научных текстах, Больцано посвящает этому вопросу несколько мест в своем главном логическом сочинении “Наукоучение. Опыт обстоятельного, большей частью нового изложения логики с постоянным вниманием к прежним авторам” (WL)<sup>1</sup>. Весьма интересными в этом отношении являются рассуждения, приводимые им в § 530 последнего (четвертого) тома, где он говорит о способах перестройки не прямых доказательств в прямые. В не прямом доказательстве, отмечает Больцано, мы требуем от наших читателей лишь того, чтобы они сделали вывод об истинности доказываемого предложения *M* на том основании, что мы из его отрицания, то есть из предложения *не-M* либо непосредственно, либо в соединении с другими известными предложениями *B, C, D, ...*, которые сами читатели считают истинными, вывели следствие *не-A*, которое они признают за ложное. Тем самым мы желаем, чтобы читатели сделали следующее самостоятельное заключение: “Если бы *M* было ложно, то *не-M* было бы истинно и истинным также было бы и *не-A*. Но поскольку *не-A* ложно, то ложно *не-M*, а следовательно, истинным оказывается *M*”. Доказательства, в которых используется подобный способ рассуждения он и называет непрямыми, опосредованными или апагогическими, а также доказательством через приведение к абсурду. Все другие доказательства он считает прямыми, непосредственными или демонстративными.

Степень уверенности, создаваемая апагогическим доказательством, зависит, по мнению Больцано, исключительно от того, с какой степенью уверенности принимают за истинные два своих предположения о том, что ложным является предложение *не-M* и что ложным же является предложение *не-A*. По сути дела все сводится к тому, с какой степенью достоверности доказана главная гипотетическая посылка: “Если бы *не-M* было истинно, то истинным было бы и *не-A*? Если усматривать цель апагогических доказательств лишь в убеждении читателей, то в принципе они могут употребляться в учебниках отдельных наук. Вместе с тем к подоб-

---

<sup>1</sup> *Bolzano B. Wissenschaftslehre. 4 Bände. Sulzbach, 1837.*

ным доказательствам Больцано предъявляет серьезные претензии: ведь если из предложения **не-М**, которое считается ложным, с помощью сплошь истинных предложений **В, С, D, ...** должно выводиться ложное предложение **не-А**, то по сравнению с этим из полностью истинной совокупности предложений **В, С, D, ...** и **А** точно так же может логически следовать истинное доказываемое предложение **М**. А отсюда, как считает Больцано, тотчас же можно заключить, что вместо того, чтобы прямо из предложений **В, С, D, ...** и **А** выводить **М**, читателям предлагается окольный путь: сначала из предложений **В, С, D, ...** и **не-М** выводятся предложение **не-А**, а затем из явной ложности последнего заключают, что и среди предложений **В, С, D, ...** и **не-М** также имеется какое-то одно ложное предложение. Но поскольку все **В, С, D, ...** являются здесь заведомо истинными, то принимается решение о том, что ложным является предложение **не-М**, а тем самым само предложение **М** оказывается истинным. В результате Больцано приходит к выводу, что предложения, на которые опирается апагогическое доказательство, никогда не могут рассматриваться в качестве объективного основания доказываемой истины и не должны использоваться в “строго научных изложениях”.

Но *любое* апагогическое доказательство, с точки зрения Больцано, можно путем несложных изменений преобразовать так, что это позволит избавиться от неприятности использования в нем ложных предпосылок. Для этого прежде всего Больцано предлагает в качестве апагога рассматривать только такие предложения, предикат которых (“предикатное представление”) является отрицательным. Предложение, используемое в качестве предпосылки в апагогическом доказательстве, имеет, согласно Больцано, следующую форму:

$$\text{Каждое } A \text{ есть не-}B \quad (1)^2$$

При проведении апагогического доказательства, как отмечает Больцано, рассматривают контрадикторную противоположность доказываемого положения или предложение о том, что имеется некоторое **А**, которое одновременно есть **В**, или собственно предложение:

$$\begin{aligned} &\text{Представление об } A, \text{ которое есть } B, \\ &\text{имеет предметность (не пусто. – Б.Ф.)} \end{aligned} \quad (2)$$

Далее в доказательстве указывается, что принятие (2) противоречит уже доказанной ранее истине:

$$\text{Каждое } R \text{ есть } S \quad (3)$$

Иначе говоря, из (2) выводимо предложение:

---

<sup>2</sup> Что равнозначно в логике Больцано отрицанию предложения “Каждое **А** есть **В**”.

Представление об  $R$ , которое  
не есть  $S$ , имеет предметность (4)

Это заключение получается, по мнению Больцано, не иначе, как из соединения принятого за истинное предложения (2) с полностью истинными и

ранее доказанными тремя предложениями формы:

Представление  $X$  имеет предметность (5)

Каждое  $X$  есть  $R$

Каждое  $X$  есть  $не-S$  (6)

Чтобы установить, что представление  $R$ , которое не является никаким  $S$ , имеет предметность (существует или не пусто, - Б.Ф.) нет иного способа, как предъявить предмет, который бы являлся предметом обоих, то есть как  $R$ , так и  $не-S$ . Такой предмет, считает Больцано, можно обнаружить не иначе, как указав на исключительно его обозначающее представление  $X$  и доказав, во-первых, что этому представлению соответствует действительный предмет, то есть что это представление имеет предметность (5) – и, во-вторых, что относящийся к представлению  $X$  предмет является одновременно предметом как  $R$ , так и  $не-S$  (6). Хотя здесь, как считает Больцано, могут возразить, что для этого уже достаточно противоречия с (4), которое возникает, если одно из предложений (6) рассматривать как частное, а не общее суждение. Однако, отмечает он, и в этом случае выражение “каждый  $X$ ” не означает обязательно, что область представления  $X$  охватывает *больше* предметов.

Если теперь три предложения (5) и (6) должны быть дедуцируемы из (2), то представление, предметность которого предусмотрена в (2), должно находиться в отношении *охватывания* (§ 108, WL. – Б.Ф.) к представлению  $X$ , то есть последнее должно быть равнозначно, либо шире, чем представление, о котором идет речь в (2). Так как очевидно, согласно Больцано, что из предметности одного представления можно сразу заключить о предметности равнозначного ему или “более широкого” (более общего. – Б.Ф.) представления, а не “более узкого” (частного. – Б.Ф.), то при более детальном анализе его составных частей представление  $X$  принимает вид:

Некоторое  $A'$ , которое есть  $B'$ , (7)

где  $A'$  и  $B'$  – пара “более широких”, образуемых из  $A$  и  $B$  представлений, “за счет отбрасывания их известных составных частей ей”.

После сделанных предположений легко, как считает Больцано, можно показать, как любое апагогическое доказательство

преобразуется в такое, где можно обойтись без использования ложных предпосылок вообще.

Поскольку имеется истина (3), говорящая о том, что каждое  $R$  есть  $S$ , то предложения (5) и (6) наверняка не являются все три истинными. Следовательно, либо первое из них ложно, то есть представление  $X$  является беспредметным (пустым, - Б.Ф.), либо, если  $X$  предметно, то ложно одно из двух предложений (6). Но последнее возможно всякий раз лишь вследствие отбрасывания известных, объединенных в представлении (7) признаков, что позволяет образовывать пару представлений  $X'$  и  $X''$ , которые оба обладают предметностью и делают два предложения:

$$\begin{aligned} \text{Каждое } X' \text{ есть } R, \\ \text{Каждое } X'' \text{ есть } \textit{не-S} \end{aligned} \quad (8)$$

оба истинными. Больцано предполагает, что истинность этих предложений может устанавливаться за счет использования тех же самых предпосылок, которые использовались при доказательстве истинности предложений (5) и (6). Поскольку из признаков, которые делают беспредметным или самопротиворечивым (также пустым. – Б.Ф.) представление  $X$  и которые отсутствуют в представлениях  $X'$  и  $X''$ , невозможно получить никакого значительного следствия, которое необходимо для доказательства истинности этих предложений.

Если удается доказать истинность пары (8), то, считает Больцано, дело преобразования апагогического доказательства можно считать полностью завершенным, так как объединение их с истинной (3) оправдывает тотчас же заключение о том, что  $X'$  и  $X''$  являются парой **взаимоисключающих** (§ 105, WL. – Б.Ф.) представлений. Последнее означает, что представление о нечто, которое было бы одновременно и  $X'$  и  $X''$ , а следовательно, о “более узком” (более конкретном. – Б.Ф.) представлении  $A$ , которое одновременно есть  $B$ , является беспредметным. Но из этой истины, по мнению Больцано, как только становится известным, что представление  $A$  само по себе не является беспредметным, тот же час образуется доказываемая истина:

$$\text{Каждое } A \text{ есть } \textit{не-B}.$$

В качестве примера преобразования непрямого доказательства в прямое Больцано рассматривает доказательство Евклида о том, что в каждом треугольнике  $acb$  против большего угла  $a > b$  лежит большая сторона  $cb > ca$  (Ев. I, 19). Доказательство Евклида в изложении Больцано выглядит следующим образом. Если бы было неверно, что  $cb > ca$ , то должно быть либо  $cb = ca$ , либо  $cb < ca$ . Но если  $cb = ca$ , то (согласно Ев. I, 5) противостоящие сторонам треугольника  $acb$  углы должны быть равны, то есть  $a = b$ , что про-

тиворечит сделанному предположению. А если  $cb < ca$ , то (согласно Ев. I, 18) между противостоящими им углами имело бы место отношение:  $a < b$ , что также противоречит сделанному предположению. Следовательно, остается принять, что  $cb > ca$ . Приведенное доказательство, замечает Больцано, включает в себя два апагогических в виде следующих предложений:

В треугольнике  $acb$ , в котором  $a > b$ ,  $cb ? ca$ .

В треугольнике  $acb$ , в котором  $a > b$ , неверно что  $cb < ca$ .

Больцано считает достаточным продемонстрировать в WL преобразование апагогического доказательства лишь для первого предложения, оставляя возможность осуществить подобное же для второго предложения самим читателям.

Если, согласно Больцано, мы сравним подлежащее доказательству предложение:

В треугольнике  $acb$ , в котором  $a > b$ ,  $cb ? ca$  [1]

с предложением формы (1) предшествующего разъяснения о способе преобразования апагогических доказательств, то обнаружим следующее. Представлению  $A$  в данном случае будет соответствовать представление о треугольнике  $acb$ , в котором  $a > b$ . Под представлением  $B$  будет подразумеваться в этом случае представление о треугольнике  $acb$ , в котором  $cb = ca$ , а ложным предположением, используемым в апагогическом доказательстве, будет предложение:

Представление о треугольнике  $acb$ , в котором  $a > b$ , и одновременно  $cb = ca$  имеет предметность [2]

Подобное предположение скрытым образом, как считает Больцано, используется и в доказательстве самим Евклидом в виде гипотетического утверждения: если бы в треугольнике  $acb$   $cb = ca$ , то  $a = b$ . Предложение формы (3) здесь звучит так:

В каждом треугольнике  $acb$ , в котором  $cb = ca$ , также и  $a = b$  [3]

Следовательно, под представлением  $R$  здесь предполагается представление о треугольнике  $acb$ , в котором  $cb = ca$ . А под представлением  $S$  подразумевается представление о треугольнике  $acb$ , в котором  $a = b$ . Предложение формы (4) звучит здесь так:

Представление о треугольнике  $acb$ , в котором  $cb = ca$ , но  $a ? b$  имеет предметность. [4]

Это предложение получается в виде заключения из предложения [2] без привлечения дополнительных предложений, а лишь, как считает Больцано, за счет замены “узкого” представления “некоторый треугольник  $acb$ , в котором  $a > b$  и  $cb = ca$ ” на более “широкое” – “некоторый треугольник  $acb$ , в котором  $a ? b$  и  $cb = ca$ ”.

Последнее представление соответствует по существу представлению  $X$  из (7), имеющему форму:  $A'$ , которое есть  $B'$ . В данном конкретном случае представление  $B'$  оказывается одинаковым с представлением  $B$  (и с  $R$ ), а представления  $A'$  образуется за счет расширения объема представления  $A$ , поскольку вместо признака  $a > b$  используется более “широкий” (обобщенный. – *Б.Ф.*) признак  $a ? b$ . Предложения формы (5) и (6) звучат здесь соответственно:

Представление о треугольнике  $acb$ ,  
в котором  $cb = ca$ , но  $a ? b$  имеет предметность. [5]

Треугольник  $acb$ , в котором  $cb = ca$ ,  
но  $a ? b$  имеет признак  $a = b$ ;  
Треугольник  $acb$ , в котором  $cb = ca$ , [6]  
но  $a ? b$  имеет признак  $cb ? ca$

Чтобы избавиться от апагогической формы доказательства, в соответствии с приведенными ранее объяснениями необходимо, согласно Больцано, из представления  $X$  или из нечто, которое есть одновременно как  $A$ , так и  $B$ , отбросить известную составную часть в виде пары “более широких” представлений  $X'$  и  $X?$ , доказав тем самым, что они образуют два истинных предложения формы (8). Здесь тот же час обнаруживается:

Треугольник  $acb$ , в котором  $cb = ca$ , [7]  
имеет признак  $a = b$ ;

Треугольник  $acb$ , в котором  $a ? b$ , [8]  
имеет признак  $ca ? cb$

Доказательство предложений [7] и [8] нетрудно осуществить. Первое, как отмечает Больцано, является положением “Элементов” Евклида (Ев. I, 5), а второе получается как контрапозиция первого. При этом обнаруживается, что в данном конкретном доказательстве не нужны оба предложения, чтобы получалось заключение:

Представление о треугольнике  $acb$ , в котором  
 $a ? b$  и  $ca = cb$ , является беспредметным.

Отсюда легко образуется подлежащее доказательству предложение:

“Представление о треугольнике  $acb$ , в котором  
 $a > b$ , но  $ca = cb$  является беспредметным”.

Или

Треугольник  $acb$ , в котором  $a > b$ , имеет признак  $ca ? cb$ .

Больцано предлагает следующее краткое звучание всего доказательства: “треугольник  $acb$ , в котором  $ca = cb$ , имеет признак  $a = b$ . Следовательно, треугольник  $acb$ , в котором  $a ? b$ , имеет

признак  $ca \ ? \ cb$ . Вследствие этого треугольник  $acb$ , в котором  $a > b$ , имеет признак  $ca \ ? \ cb$ ".

Итак, предлагаемый Больцано метод преобразования апагогического доказательства позволяет избежать употребления ложных предложений в основаниях доказательства и, по мнению Больцано, опираться лишь на такие, которые "проще" первых, поскольку не содержат в своем составе беспредметных субъектных представлений (суждение с пустым или беспредметным субъектом является в логике Больцано заведомо ложным. – *Б.Ф.*). В обычной практике рассуждений подобные предложения, как считает Больцано, появляются в основном в следующем гипотетическом виде: "Если нечто, которое имеет свойство  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  имело бы свойство  $\mu$ , то оно имело бы и свойство  $\text{поп.}\gamma$ ?", где  $\text{поп.}\gamma$  и  $\gamma$  обозначают противоречащие друг другу свойства. В подобном предложении из субъектного представления предпосылки признак  $\gamma$  можно отбросить и данное упрощение не усложнит ни доказательство самого гипотетического утверждения, ни выведение из него различных заключений. Поэтому, как считает Больцано, апагогический способ доказательства не должен никогда использоваться там, "где требуется ясное осознание оснований (может быть даже субъективных), на которые опирается доказываемая истина".