Л.Л.Эсакиа

СЛАБАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ – РЕСТИТУЦИЯ

Abstract. *The purpose of this paper is a restitution of a longstanding notion of weak-transitivity and a modal system, which may be identified with the set of formulas valid in all weak-transitive Kripke models. The modal system has a finite models property and can be axiomatized quite simple: it is the smolest normal logic to contain all instances of the formula* $p \& \Box p \to \Box\Box p$. *The modal system is an especially interesting as the logic of all topological spaces provided that the limit-operation, a fundamental topological notion, is treated as the diamond modality.*

Как известно, адекватная семантика модальной системы K4 определяется в терминах фреймов Крипке (X,R) с транзитивным отношением достижимости R. Вспомним, что почти полстолетия тому назад понятие транзитивности было предметом любопытной дискуссии в среде логиков (с участием Артура Прайора), материалы которой нашли отражение в печати и прореферированы Алонзо Черчем (см.[1]); приведу цитату из заключительной части этого реферата: “This is continuation of the discussion initiated in the XXIV 185(1,2). In spite of disagreements on this way, the polemic ends with all parties agreeing that notion of weak-transitivity of a relation R, characterized by $x \neq z$ & xRy & $yRz \Rightarrow xRz$ must be distinguished from that of strong-transitivity, characterized by xRy & $yRz \Rightarrow xRz$”. Мне кажется, что понятие слабой транзитивности точнее отражает значение слов «транзитивность» и «транзит» нашего обыднного языка; скажем, перелет из пункта x в пункт y и обратно (т.е. случай, когда x=z!) мы, пожалуй, не назвали бы транзитным. Так или иначе, достигнутый консенсус позволяет нам, наряду с «обычной» транзитивностью, пользоваться и слабой транзитивностью (= weak-transitivity); более того, мы отметим некоторые достоинства слабой транзитивности и покажем, что фреймы Крипке (X, R) со слабо-транзитивным отношением достижимости R характеризуют модальную систему (назовем ее wK4) с крайне простой аксиоматикой, которая

.) является промежуточной между K и K4,

.) финитно аппроксимируема и разрешима,

.) обладает своеобразными расширениями, “минующими” систему K4, и, наконец,

.) совпадает с модальной логикой топологических пространств, когда модальность ◊ выражает фундаментальную операцию топологии, сопоставляющую множеству – его предельные точки! Хочется надеется, что предпринятая нами реституция слабой транзитивности и вместе с ней соответствующей модальной системы окажется не бесполезной.

Слабая транзитивность

Итак, пользуясь терминологией членов дискуссии, будем говорить, что бинарное отношение R *слабо транзитивно*, если из xRy и yRz мы заключаем, что xRz лишь в случае, когда $x \neq z$.

Пусть R – произвольное отношение на множестве X; определим (подобно Бертрану Расселу) *отношение родства* (=ancestral) R*.

Определение 1. $xR^*y \Leftrightarrow$ (xRy или ($x \neq y$ и существует путь

$<x_1, x_2, \ldots, x_n, y>$ ($n>0$), ведущий из x в y, т.е. $xRx_1Rx_2, \ldots, x_nRy$.

Замечание. Путь $<x_1, x_2, \ldots, x_n, y>$ из x в y назовем

(a) *безвозвратным*, если при любом i ($i \leq n$) $x \neq x_i$ и

(b) *бесповторным*, если для любых i и j, из $i \neq j$ следует $x_i \neq x_j$.

Допустим, что при некотором $i \leq n$, $x = x_i$; поскольку “отрезок” $<x_{i+1}, \ldots, x_n, y>$ исходного пути также образует путь из x в y, то итерация такой процедуры “урезания” даст нам, в конце концов, безвозвратный путь из x в y. Допустим теперь, что $x_i = x_j$ при $i \neq j$ ($i< j$), т.е. существуют повторы; заметим, что после удаления последовательности $<x_{i+1}, \ldots, x_j>$ из исходного пути мы получим более ”короткий” путь из x в y и, следовательно, повторение такой процедуры приведет к бесповторному пути. Таким образом, мы могли бы ограничиться в Определении 1 безвозвратными и бесповторными путями.

Лемма 1. Для любого отношения R, отношение родства R* слабо транзитивно и $R \subseteq R^*$.

Доказательство. Включение $R \subseteq R^*$ следует непосредственно из определения; покажем слабую транзитивность отношения R*.

Пусть $x \neq z$, xR^*y и yR^*z; заметим, что если x=y или y=z, то доказывать нечего; будем считать, что $x \neq y$ и $y \neq z$. Условия xR^*y и yR^*z порождают четыре случая: (1) xRy и yRz; поскольку $x \neq z$ и последовательность $<y, z>$ образует путь из x в z, то xR^*z. (2) xRy и ложно yRz; тогда, так как $y \neq z$, то существует путь из y в z; условие xRy позволяет присоединить y к началу и получить путь из x в z. (3) xRy ложно, но yRz; так как $x \neq y$, то существует путь из x в y;

условие yRz, позволяет “присоединить” z к концу и получить путь из x в z. (4) оба условия xRy, yRz ложны; так как $x \neq y$ и $y \neq z$., то имеются два пути: из x в y и из y в z. Ясно, что сочленение этих путей дает путь из x в z.

Лемма 2. Пусть $R \subseteq S$ и отношение S слабо транзитивно; тогда $R^* \subseteq S$.

Доказательство. Пусть xR^*y; возможны два случая; если xRy, то, поскольку $R \subseteq S$, получаем xSy; если xRy ложно, то существует путь $< x_1, x_2, \ldots, x_n, y>$ из x в y и, как мы заметили ранее, можно считать этот путь безвозвратным, т.е. $x \neq x_i$ при любом $i \leq n$. Покажем, что $xS x_i$ при любом $i \leq n$ индукцией по i.

(1) $i.=1$; так как $xR x_1$ и $R \subseteq S$, то $x S x_1$; (2) по индуктивному допущению имеем $x S x_{i-1}$; из $x_{i-1} R x_i$ получаем $x_{i-1} S x_i$; так как $x \neq x_i$, то слабая транзитивность отношения S позволяет заключить $x S x_i$; в частности, при $i = n$, получаем $x S x_n$ и, так как $x_n R y$, то $x_n S y$; из слабой транзитивности S имеем xSy.

Следствие 3. Для любого отношения R, отношение родства R^* является наименьшим, слабо транзитивным отношением, содержащим R.

Таким образом, как и в обычном, транзитивном случае, мы вправе называть R^* слабо транзитивным *замыканием* отношения R.

Лемма 4. Пусть бинарное отношение R симметрично; тогда его слабо транзитивное замыкание R^* также симметрично.

Доказательство. Пусть xR^*y; тогда, если xRy, то из симметрии R имеем yRx и, следовательно, yR^*x; если xRy ложно, то из xR^*y следует существование пути из x в y; и, учитывая симметричность отношения R, “инверсия” того же пути дает нам yR^*x.

Пример. Пусть X – произвольное множество с по крайней мере двумя элементами и R – отношение “неравенства”, т.е. $xRy \Leftrightarrow x \neq y$. Легко увидеть, что R слабо транзитивно (и даже симметрично), но не транзитивно.

Модальная система wK4

Пусть K известная базисная нормальная модальная система с единственной аксиомной схемой $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ и с обычными правилами вывода, включая правило “боксирования” $p / \Box p$.

Определение 5. *Модальная система wK4* получается из K постулированием в качестве дополнительной аксиомы формулы

$$\text{(w)} \quad (p \wedge \Box p) \rightarrow \Box \Box p,$$

т.е. wK4 = K + (w).

Заметим здесь же, что в терминах оператора $\Diamond$ эту аксиому можно записать в виде

$(w')\ \Diamond\Diamond p \to (p \vee \Diamond p)$.

Легко заметить, что формула (w) доказуема в системе К4 =К + $\Box p \to \Box\Box p$ и, следовательно, система wК4 является промежуточной между К и К4.

Утверждение 6. Пусть (X, R) произвольный фрейм Крипке, т.е. R произвольное бинарное отношение на X. Следующие условия равносильны:

1. Фрейм (X, R) является wК4-фреймом, т.е аксиома (w) – общезначима в нем;
2. Отношение R слабо транзитивно.

Доказательство. Пусть во фрейме (X, R) общезначима формула (w'), иными словами, пусть для любого $A \subseteq X$ справедливо включение $ddA - A \subseteq dA$, где $dA = R^{-1}(A)=\{x \in X: \exists y(xRy \ \&\ y \in A)\}$; следовательно, имеем, когда $A=\{z\}$ – синглетон, (*) $dd(\{z\} - \{z\} \subseteq d(\{z\})$. Допустим, что $x \neq z$, xRy и yRz; тогда $x \in R^{-1} R^{-1}(\{z\})$, $x \neq z$ и (*) дают $x \in R^{-1} (\{z\})$, т.е. xRz .

Пусть теперь R слабо транзитивно и покажем, что формула (w') общезначима в (X, R), т.е. для любого $A \subseteq X$ справедливо включение $ddA - A \subseteq dA$. Пусть $x \in ddA$; следовательно существуют $y,z \in X$, такие, что $xRyRz$ и $z \in A$.

Если x не принадлежит A, то, ввиду $z \in A$, получаем $x \neq z$ и слабая транзитивность R влечет xRz , следовательно, $x \in dA$.

Рассмотрим канонический (дескриптивный) фрейм (X, R) модальной системы wК4, т.е. семейство X всех максимальных, непротиворечивых множеств формул, содержащих все теоремы системы wК4, со стандартно определенным отношением R, а именно: $xRy \Leftrightarrow (\Box p \in x \Rightarrow p \in y)$ для любой формулы p.

Утверждение 7. Канонический фрейм (X, R) слабо транзитивен и, следовательно, является wК4 -фреймом.

Доказательство. Пусть $x \neq z$, xRy и yRz ; покажем, что xRz.

Допустим, что $\Box p \in x$; из $x \neq z$ следует, что для некоторой формулы q, $q \in x$ и $q \notin z$. Ясно, что $p \vee q \in x$, так как $p \to p \vee q$ тавтология, то (в системе К) имеем $\Box(p \to p \vee q)$ и $\Box p \to \Box(p \vee q)$; так как $\Box p \in x$, то $\Box(p \vee q) \in x$; из аксиомы (w) и $(p \vee q) \wedge \Box(p \vee q) \in x$ получаем $\Box\Box(p \vee q) \in x$ и, следовательно, $\Box(p \vee q) \in y$ и $(p \vee q) \in z$; но $q \notin z$ и, следовательно, $p \in z$.

Следствие 8. Семантическая полнота системы wК4

Модальная система wK4 характеризуется классом всех слабо транзитивных фреймов Крипке.

Метод фильтрации и система wK4

В этом разделе, воспроизводя метод фильтрации, мы почти дословно следуем Сегербергу [2]. Пусть (X’, R’, |=’) – произвольная модель и Ψ множество формул, замкнутое по подформулам. Определим отношение эквивалентности E на X’:

$xEy \Leftrightarrow$ для любой формулы $p \in \Psi$ ($x \models p \Leftrightarrow y \models p$).

Пусть X – фактор-множество, т.е. X = {E(x): x ∈ X}, и /= отношение форсинга на X: $E(x) \models p \Leftrightarrow p \in \Psi$ & $x \models$ ‘ p.

Фактор-модель (X, R, |=) называется *Ψ-фильт рацией* исходной модели, если отношение R удовлетворяет условиям:

(1) $xR'y \Rightarrow E(x)RE(y)$ и для любой формулы p

(2) $E(x)RE(y) \Rightarrow$ ($\Box p \in \Psi$ & $x \models$ ‘$\Box$ p $\Rightarrow y \models$ ‘ p).

Известно [2], что транзитивное замыкание наименьшей Ψ-фильтрации может не быть Ψ-фильтрацией, однако (см. [2], Лемма 2), если исходная модель транзитивна, то транзитивное замыкание наименьшей Ψ-фильтрации является Ψ-фильтрацией.

Модификацию на случай слабой транзитивности выражает

Лемма 9. Если исходная модель (X’, R’, |=’) слабо транзитивна, то слабо транзитивное замыкание R* наименьшей Ψ-фильтрации R является Ψ-фильтрацией.

Доказательство. Так как $R \subseteq R^*$, то достаточно убедится, что отношение R* удовлетворяет фильтрационному условию (2). Допустим, что aR*b и a.|= $\Box$ p, где a, b произвольные классы эквивалентности. Если a R b , то существуют x ∈ a и y ∈b , такие, что xRy; так как a.|= $\Box$ p и x ∈ a, то x.|= ‘ $\Box$ p и, следовательно, .y |= ‘ p. Если a R b ложно, то a ≠ b и существует путь <a_1 , ..., a_n,b > из a в b. Ради краткости, рассмотрим лишь случай n = 1, т.е. a R a_1 R b. Из a R a_1 следует существование x ∈ a и $x_1 \in a_1$, таки, что xR x_1; из a_1R b имеем x_1’Ry для некоторых $x_1' \in a_1$ и y ∈ b ; из a ≠ b следует, что существует q ∈ Ψ, такое, что x |= q, но y |= q ложно. Допустим, что x.|= $\Box$ p; ясно, что $x \models p \vee q$, и так как $x \models \Box p$, то $x \models \Box(p \vee q)$, следовательно, $x \models (p \vee q) \wedge \Box(p \vee q)$; так как исходная модель слабо транзитивна, то в ней верна аксиома (w) и, следовательно, $x \models (p \vee q) \wedge \Box (p \vee q) \rightarrow \Box \Box (p \vee q)$.

Тогда $x \models \Box \Box (p \vee q)$. Так как xR x_1, то $x_1 \models \Box (p \vee q)$; но x_1 Ex_1’ и, следовательно, $x_1' \models \Box (p \vee q)$; так как x_1’Ry , то $y \models (p \vee q)$; из ложности y |= q; следует y |= p.

Следствие 10. Модальная система wK4 - финитно аппроксимируема и характеризуется конечными слабо транзитивными фреймами.

Связь wK4 и S4

Начнем с некоторых эвристических соображений. Пусть (X, R) – произвольный S4-фрейм, т.е. произвольное квази упорядоченное множество, и $X_0 \subseteq X$. Определим на том же множестве X отношение R_0 следующим образом:

(1) если $x \neq y$, то $xRy \Leftrightarrow xR_0y$ и (2) $xR_0x \Leftrightarrow x \notin X_0$.

Допуская вольность речи, можно это определение перефразировать следующим образом: отношение R_0 получается из R “удалением” рефлексивных петель в точках из предписанного множества X_0 (сохраняя остальные R-связи нетронутыми). Заметим, что когда $X_0 = X$, мы получаем иррефлексивное, слабо транзитивное отношение R_0. Отметим также, что исходный фрейм (X, R) однозначно получается из (X, R_0), восстановлением удаленных рефлексивных петель, т.е. положив $xRy \Leftrightarrow x = y$ или xR_0y. Нетрудно убедиться, что любое слабо транзитивное отношение R_0 на множестве X получается из своего рефлексивного компаньона R удалением рефлексивных петель в подходящих точках множества X. Эти “семантические “ связи между wK4- и S4-фреймами позволяют установить следующую простую «дедуктивную» связь системы S4 с wK4. Вспомним известное (по крайней мере в контексте доказуемостной логики) “расщепляющее” преобразование # формул p, состоящее в замене каждой подформулы формулы p вида $\Box$ q на q $\wedge \Box$ q. Заметим, что преобразование # аксиомы “транзитивности” $\Box p \to \Box \Box p$ системы S4 дает нам формулу, равносильную аксиоме (w) системы wK4. Действительно, $\# (\Box p \to \Box \Box p) = (p \wedge \Box p \to (p \wedge \Box p \to \Box (p \wedge \Box p))$; легко видеть, что последняя формула равносильна (в системе К) формуле (w).

Утверждение 11. (a) S4 |- p $\Leftrightarrow$ wK4 |- # (p)

(b) wK4 является наименьшим нормальным расширением системы К, в которое погружаема система S4 преобразованием #.

Топологическая семантика wK4

В заключительной части своей фундаментальной работы [3], посвященной алгебрам с замыканием (=алгебраической семантике модальной системы S4), Мак-Кинси и Тарский замечают: “ Like the topological operation of closure other topological operation can also be treated in an algebraic way. This may be especially interesting in regard to those operation which are not definable in terms of closure... An especially important notion is that of the derivative of a point set...” (см. [3], p.182). Далее приведено

Определение 12. (Мак-Кинси–Тарский) Булева алгебра с оператором (B, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, d) называется алгеброй с деривацией, если оператор d удовлетворяет условиям: (1) $d0=0$,

(2) $d(a \vee b)=da \vee db$ и (3) $d\,d\,a \leq da$, для любых $a,b\in B$.

В современной “модальной“ литературе эти алгебры именуются K4-алгебрами и образуют алгебраическую семантику модальной системы K4, когда модальный оператор ◊ интерпретируется с помощью оператора деривации d.

Вспомним, что точка x топологического пространства X называется *предельной т очкой* (или *т очкой накопления*) множества A, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества A, отличную от x. Обозначим через dA множество всех предельных точек множества A. Вспомним, что топологическое замыкание cA множества A равно $A \cup dA$.

Учитывая эту, подразумеваемую, топологическую интерпретацию оператора d, нам представляется целесообразным несколько ослабить требования, наложенные на оператор деривации в Определении 11, а именно, заменить условие (3) на несколько более слабое (3’) $dda \leq a \vee da$. Итак примем

Определение 12'. Булева алгебра с оператором (B, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, d) называется *алгеброй с деривацией*, если выполнены условия (1), (2) и (3’).

Класс алгебр с деривацией образует алгебраическую семантику модальной системы wK4 (сравни условие (3’) с аксиомой (w’) системы wK4). Оправдание предложенной нами модификации основано на следующих простых наблюдениях.

Основная аксиома (и, следовательно, любая теорема) системы wK4 топологически общезначима. Действительно, несложно убедиться, что аксиома (w’) $\Diamond\Diamond p \to (p \vee \Diamond p)$ или теоретико-множественное включение $ddA \subseteq A \cup dA$. справедливо в любом топологическом пространстве X для произвольного подмножества A. Однако характерная аксиома K4 $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ или соответствующее ей включение $ddA \subseteq dA$ не во всех пространствах верны: пусть, например, множество X (по крайней мере с двумя элементами) снабжено антидискретной топологией (т.е. открытыми являются только пустое множество и само пространство X). Легко проверить, что условие $ddA \subseteq dA$ ложно для любого синглетона $A=\{x\}$; действительно, в этом случае dA содержит все точки, кроме точки x: однако $x \in ddA$.

Пусть (X, R) – произвольный фрейм; обозначим через $(X, R)^+$ булеву алгебру (всех подмножеств множества X) с оператором d: $dA = \{x \in X: \exists x\ (xRy\ \&\ y \in A)\}$ или, короче, $dA = R^{-1}(A)$ для любого множества A. Мы уже знаем (Утверждение 6), что алгебра $(X, R)^+$ является wK4-алгеброй, если и только если (X, R) слабо транзитивный фрейм. Учитывая, что система wK4 финитно аппроксимируема (или, алгебраически говоря, что многообразие алгебр с деривацией порождается своими конечными алгебрами), специально выделим конечный случай.

Утверждение 13. Каждая конечная алгебра с деривацией (B, d) представима (с точностью до изоморфизма) в виде алгебры $(X, R)^+$ для подходящего слабо транзитивного фрейма (X, R).

Пусть вновь (X, R) – произвольный слабо транзитивный фрейм и $(X, R)^+= (B, d)$ – соответствующая алгебра с деривацией; определим (используя d) на множестве X новую операцию c, положив: $cA = A \cup dA$ для любого множества $A \subseteq X$. Легко видеть, что оператор c удовлетворяет всем аксиомам Куратовского и, следовательно, являясь оператором топологического замыкания, индуцирует на множестве X топологию; пусть для любого множества A $d'A$ множество предельных точек (в этой топологии!) множества A. Операторы d' и d не совпадают, хотя топология на X и была индуцирована оператором d! В этом легко убедится рассмотрев, скажем, случай, когда отношение R рефлексивно; действительно, в этих условиях $cA= dA$, так как $A \subseteq dA$, и "настоящий" оператор перехода к пределу d' не может совпадать с оператором замыкания c хотя бы потому, что $x \notin d(\{x\})$, в то время как $x \in c(\{x\})$. Справедливо простое (но ключевое) наблюдение.

Утверждение 14. Если $(X, R)^+= (B, d)$ и R слабо транзитивно, то d является оператором предела в топологии, индуцированной оператором замыкания (порожденным d), если и только если отношение R иррефлексивно.

Доказательство. Достаточно вспомнить, что в любом топологическом пространстве X оператор предела d удовлетворяет условию: $x \in d(A) \Leftrightarrow x \in c(A - \{x\})$, из которого следует $x \notin d(\{x\})$, т.е. «иррефлексивность» оператора d.

Итак, образно говоря, возникает такая картина: на множестве X имеется семейство слабо транзитивных отношений. R_0, рефлексивные замыкания которых совпадают (соответственно, имеется семейство операторов деривации d, дающих один и тот же оператор замыкания по схеме $cA = A \cup dA$); все эти отношения R_0 отличаются друг от друга лишь множеством X_0 своих иррефлексивных точек (эту тему мы уже затрагивали, см. выше). Один из крайних случаев, когда $X_0 = X$, т.е. “удалены” все петли, дает иррефлексивное отношение, которое и соответствует “настоящему” топологическому оператору предела!

Справедливо следующее, имеющее и самостоятельное значение,

Утверждение 15. Топологии на конечном множестве X находятся в одно-однозначном соответствии с иррефлексивными, слабо транзитивными отношениями на X.

Финитная аппроксимируемость модальной системы wK4 говорит нам о том, что wK4 характеризуется конечными, слабо транзитивными фреймами (X, R), из чего еще не следует, что для опровержимости недоказуемых формул можно ограничиться “запасом” конечных, иррефлексивных фреймов. Однако для любого слабо транзитивного фрейма (X, R) существует иррефлексивный фрейм (X’, R’) и сюръективное отображение $f : X \to X'$, являющееся p-морфизмом (т.е. такое, что f R’ (x) = R f(x)). Построение фрейма (X’, R’) проще объяснить “на пальцах”, чем дать формальное описание. Каждую R-рефлексивную точку, т.е. каждую точку x, нарушающую иррефлексивность отношения R, заменим на две разные точки x_1 и x_2 и положим: $x_1\ R'\ x_2$ и $x_2\ R'\ x_1$ (таким образом, точка x заменяется на двухточечный иррефлексивный сгусток), оставив все остальные связи прежними, т.е. $xR'y \Leftrightarrow xRy$, когда $x \neq y$. Отображение f определим следующим образом: f тождественно на всех иррефлексивных точках и $f(x_1) = f(x_2) = x$. Легко убедиться, что f действительно p-морфизм; тем самым справедливо

Утверждение 16. Модальная система wK4 характеризуется классом конечных иррефлексивных, слабо транзитивных фреймов

Привилегированное (в топологическом отношении) положение модальной системы wK4 выражает

Следствие 17. Модальная система wK4 является логикой топологических пространств, другими словами, для любой формулы p wK4 |- p $\Leftrightarrow$ p - общезначима в любом топологическом пространстве.

Доказательство. Мы уже знаем, что любая, недоказуемая в wK4, формула p опровержима в подходящем конечном слабо транзитивном фрейме (X, R); из Утверждения 16 заключаем, что p опровергается в соответствующем “расщепленном” иррефлексивном фрейме (X’, R’), который также конечен ввиду финитарности построения. Утверждение 15 позволяет заключить, что формула p опровержима в топологическом пространстве, соответсвующем фрейму (X’, R’).

А что можно сказать с топологической точки зрения о модальной системе K4? Вспомним аксиому отделимости T_d, введенную в работе [4] : по определению, топологическое пространство X удовлетворяет *аксиоме отделимости T_d*, если для каждой точки x $\in$ X найдутся замкнутое множество A и открытое множество B, такие, что $\{x\} = A \cap B$. Известно, что класс T_d-пространств является строго промежуточным между классами T_0 и T_1-пространств, т.е. $T_1 \subset T_d \subset T_0$.

Утверждение 18. Модальная система K4 характеризуется классом T_d-пространств, т.е. формула p общезначима в любом T_d-пространстве, если и только если K4 |- p.

Об одном расширении системы wK4

В работе [5] К.Сегерберг аксиоматизирвал модальную систему, характеризуемую фреймами (X, R), в которых отношение достижимости R совпадает с отношением $\neq$; назовем его отношением отличимости (= dissidence relation). Сегерберг пишет ([5], p.61): «Professor Georg Henrik von Wright seems to have been the first to notice the fact, overlooked by everyone else, that “somewhere else” has an interesting logic of its own, distinct from that of the S5-operaror “somewhere”».

Модальная система Сегерберга (обозначим ее KS (=Krister Segerberg) получается из wK4 постулированием формулы $p \to \Box\Diamond p$ в качестве дополнительной аксиомы.

Определение 19. Отношение R на множестве X назовем *слабой эквивалентностью*, если R слабо транзитивно и, кроме того, симметрично.

Ясно, что слабая эквивалентность, отличается от “обычной” только рефлексиями: все точки отношения эквивалентности – рефлексивны, в то время как слабая эквивалентность допускает наличие любого множества X_0 ($\subseteq$X) иррефлексивных точек. Крайний случай, когда X_0 =X, т.е. когда отношение “полностью” иррефлексивно, также возможен! Фрейм (X, R), в котором отношение R является слабой эквивалентностью, назовем *сгустком,* если для любых двух различных точек x и y x R y. Сгусток называется *иррефлексивным*, если все его точки иррефлексивны.

Алгебраическую семантику модальной системы KS образуют слабо монадические алгебры; булеву алгебру с оператором (B, d) назовем *слабо монадической*, если (1) (B, d) – wK4-алгебра и (2) $a \wedge d \neg d\ a = 0$ для любого элемента $a \in B$. Многообразие wMA слабо монадических алгебр обладает рядом «приятных» черт; как и многообразие монадических алгебр Халмоша [6], многообразие wMA локально конечно. Пусть $(B, d) = (X, R)^{+}$ конечная, слабо монадическая алгебра; тогда (B, d) неразложима в подпрямое произведение, если и только если (X, R) – сгусток. Каждая конечная неразложимая алгебра (B', d') вложима в неразложимую алгебру $(B, d) = (X, R)^{+}$, у которой (X, R) является иррефлексивным сгустком, т.е. $x\ R\ y \Leftrightarrow x \neq y$. Такие алгебры назовем *шаблонными*. Внутреннее описание шаблонных алгебр (B, d) таково: (0) d0=0, (1) если a – атом булевой алгебры B, то $d\ a = \neg\ a$, (2) $d\ a = 1$, в остальных случаях. Многообразие wMA слабо монадических алгебр порождается своими шаблонными алгебрами. Справедлива следующая усиленная версия известного результата Скрогса [7]: модальная система KS *наследственно* финитно аппроксимируема; каждое нормальное расширение системы KS характеризуется подходящим классом сгустков; в частности, система KS характеризуется иррефлексивными сгустками, а классическая система S5 – рефлексивными сгустками. Система KS является наименьшим нерефлексивным "напарником" системы S5.

В последнее время система KS была "переоткрыта" в контексте компьютерной логики и вновь привлекла внимание логиков (см., например, работу [8] и цитированную в ней литературу).

В заключение отметим, что основные наблюдения, относящиеся к слабой транзитивности и топологической семантике модальной системы wK4, были получены автором в семидесятые годы минувшего столетия [9]. В тот же период в диссертационной работе В.Месхи был детально исследован класс wK4-алгебр, удовлетворяющих дополнительному условию d1 = 1, которому в топологической семантике соответствует класс плотных в себе пространств. Совсем недавно Д.Габелая в своей магистерской работе, проведенной в Амстердамском университете, построил табличное исчисление для системы wK4, а также обнаружил удобный топологический эквивалент понятия p-морфизма в категории топологических пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Church A.* . Journ. Symb.Logic. 25 (1960), 263-264
2. *Segerberg K.* Decidability of S4.1, Theoria, 34 (1968), 7-20

3. *MacKinsey J., Tarski A.,* The algebra of topology, Annals of Math. 45 (1944) 141-191
4. *Aull C.E.*, *Thron W.J.* , Separaction axioms between T_0 and $T_{1,}$ Indag.Math. 24 (1962) 26-37
5. *Segerberg K.,* ”Somewhere else” and “some other time”, In: Wright and Wrong: mini-essay in honor of G.H.von Wright, Publ. the group in logic and methodology of Real Finland, 1976, 61-64.
6. *Halmos P.,*. Algebraic logic. Monadic Boolean algebras., Composit. math., 12 (1955) 217-249
7. *Scroggs S.J.,* Extensions of the Lewis S5, Journ. Symb .Logic, 16 (1951) 112-120
8. *de Rijke M.,* The Modal logic of inequality, Journ. Symb. Logic, 57 (19920 566-587
9. *Esakia L.* The Modal Logic of Topological spaces, The Georgian Acad.Sci., Preprint, 1976 (in Russian)