М.Н.Бежанишвили

ИСЧИСЛЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ ХАО ВАНА И ИХ РАСШИРЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ИТЕРАЦИЮ ИМПЛИКАЦИИ

Abstract. *Hao Wang [10] suggested two extensions of predicate calculus permitting partially defined predicates. He formulated two calculi of partial predicates PP and EP. Interpretation of implication of these calculi depends on the relations between all possible values of its parts. Therefore, the notion of a formula is restricted in PP and EP as implication is not iterating in them. A.Rose [9] constructed an independent system of axioms for propositional fragment of PP with finite number of axioms and proved its completeness by means of a syntactic criterion of provability in it. N.M.Ermolaeva [4] has done the same for propositional fragment of EP applying semantical criterion of the validity. In the present article we give the Rose style proof of completeness of the propositional fragment of EP introducing a syntactic criterion of provability in it, and on the ground of a modified relational semantics we formulate extensions of PP and EP permitting iteration of implication.*

Введение

При исследовании различных версий исчисления предикатов и теории множеств обычно ограничиваются рассмотрением полностью определенных предикатов и множеств. Для того чтобы естественным образом обобщить такой подход, некоторые логики считают целесообразным привлечение к рассмотрению частично определенных предикатов и множеств. В разные периоды своей деятельности такой обобщенный подход разрабатывали Т.Скулем, Г.Беман, Д.Бочвар, В.Аккерман, К.Шютте, Ф.Фитч, С.Феферман и др. (ссылки на их работы можно найти в [10] и [8]). Схожими способами они стремились без использования типовых ограничений устранить антиномии логики и теории множеств и в этом направлении достигли определенных успехов. Но несмотря на общность цели, они пришли к существенно различным построениям. Это свидетельствует, что до конца еще не выяснено, как следует трактовать такую обобщенную точку зрения на логику. Один из альтернативных подходов был предложен Хао Ваном в [10].

Исчисления частичных предикатов Хао Вана

Алфавит исчисления частичных предикатов Хао Вана ***PP*** содержит логические связки для отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$, кванторы всеобщности и существования: ∀ и ∃, неограниченные множества: индивидных переменных (**Ind**), n-арных функциональных знаков (**Fun**; $n \geq 0$), n-арных предикатных букв (**Prl**; $n \geq 0$). Он может также содержать конкретные функциональные и предикатные знаки.

Термы (**Trm**) и атомарные формулы (**Atm**) определяются обычно. Формулы (**Frm**) образуют наименьшее множество такое, что $\mathbf{Atm} \subseteq \mathbf{Frm}$ и если $x \in \mathbf{Ind}$, а A и B – не содержащие знака $\rightarrow$ формулы, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\forall x A(x)$, $\exists x A(x) \in \mathbf{Frm}$. Заметим, что, согласно этому определению, ни в одной формуле не допускается итерация знака $\rightarrow$.

Интерпретация ***PP*****.** Моделью исчисления частичных предикатов Хао Вана ***PP*** является пара $\langle \mathbf{D}, \mathbf{V} \rangle$, где **D** – любое непустое множество индивидов, а **V** – означивающая функция из **Prl** в $\{\mathbf{t},\mathbf{u},\mathbf{f}\}$, такая, что если P^n – пропозициональная переменная ($n=0$), $\mathbf{V}(P^n)=\mathbf{t}$ или **u** или **f**, а если P^n – n-арная предикатная буква ($n>0$), $\mathbf{V}(P^n)=(\mathbf{R}, \mathbf{S})$, где $(\mathbf{R},\mathbf{S})$ есть пара, такая, что $\mathbf{R} \cap \mathbf{S} = \varnothing$ и $\mathbf{R},\mathbf{S} \subseteq \mathbf{D}^n$, где $\mathbf{D}^n$ – n-кратное декартово произведение **D** на себя.

Если задана модель для ***PP***, то с помощью индукции по строению формул мы сможем определить значение любой формулы A при данном сопоставлении свободным индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ формулы A элементов $\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_n}$ из **D**.

Если P – пропозициональная переменная, то $\mathbf{V}(P)$ уже задано моделью.$\mathbf{V}(P^n(x_1,...,x_n))=\mathbf{t}$ при данном сопоставлении свободным индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ формулы $P^n(x_1, ...,x_n)$ элементов $\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_n} \in \mathbf{D}$, если n-ка $(\mathbf{a_1},...,\mathbf{a_n}) \in \mathbf{Q}$, $\mathbf{V}(P^n(x_1,..., x_n))=\mathbf{f}$, если $(\mathbf{a_1},..., \mathbf{a_n}) \in \mathbf{S}$, в противном случае,$\mathbf{V}(P^n(x_1,...,x_n))=\mathbf{u}$.

Оценка формул, в которые входят только знаки: $\neg$, $\wedge$ и $\vee$, осуществляется согласно трехзначным таблицам Лукасевича: $\mathbf{V}(\neg A)=\mathbf{t}$, если $\mathbf{V}(A)=\mathbf{f}$; $\mathbf{V}(\neg A)=\mathbf{f}$, если $\mathbf{V}(A)=\mathbf{t}$; в противном случае, $\mathbf{V}(\neg A)=\mathbf{u}$.

$\mathbf{V}(A \wedge B)=\min(\mathbf{V}(A),\mathbf{V}(B))$ и $\mathbf{V}(A \vee B)=\max(\mathbf{V}(A),\mathbf{V}(B))$, предполагая, что $\mathbf{t}>\mathbf{u}>\mathbf{f}$.

Кванторы ∀ и ∃ трактуются как обобщения связок $\wedge$ и $\vee$: $\mathbf{V}(\forall y A(x_1,\ldots,x_n,y)=\mathbf{t}$ при сопоставлении свободным индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ формулы $\forall y A(x_1,\ldots,x_n,y)$ элементов $\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_n}$ из **D,** если при том же сопоставлении $\mathbf{V}(A(x_1, \ldots,x_n,y))=\mathbf{t}$, когда значением y является любой элемент **b** из **D**; $\mathbf{V}(\forall y A(x_1,\ldots,x_n,y)=\mathbf{f}$ при сопоставлении свободным индивидным переменным $x_1,\ldots,x_n$ формулы $\forall y A(x_1,\ldots,x_n,y)$ элементов $\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_n}$ из **D,** если при том же сопоставлении $\mathbf{V}(A(x_1,\ldots, x_n,y))=\mathbf{f}$, когда значением y является хотя бы один элемент **b** из **D**; в противном случае, $\mathbf{V}(A(x_1,\ldots,x_n,y))=\mathbf{u}$. Оценка формул вида $\exists y A(x_1,\ldots,x_n,y)$ производится двойственным образом.

Импликация является связкой более высокого уровня. Поэтому Хао Ван определяет не истинность формулы вида $A \rightarrow B$ в модели, а ее общезначимость по отношению к множеству означиваний.

Формула вида $A \rightarrow B$ общезначима в ***PP*** тогда и только тогда, когда для всякого означивания **V**, всякий раз, когда **V**(A)=**t**, то и **V**(B)=**t**.

Отметим, что ни одна не содержащая знака $\rightarrow$ формула не является общезначимой.

Аксиомы ***PP*** имеют вид $A \rightarrow B$, где A и B – такие бескванторные формулы, что для всякого означивания **V**, если **V**(A)=**t**, то и **V**(B)=**t**.

Правила вывода ***PP***.

Правила для введения кванторов: из $A \rightarrow B(y)$ следует $A \rightarrow \forall x B(x)$; из $A \rightarrow B(s)$ следует $A \rightarrow \exists x B(x)$; из $B(y) \rightarrow A$ следует $\exists x B(x) \rightarrow A$ и из $B(s) \rightarrow A$ следует $\forall x B(x) \rightarrow A$, где A,B∈**Frm**, x, y∈**Ind**, s∈**Trm** и y не входит свободно в A.

Правила для сокращения сторон $\rightarrow$: из $A \wedge A \wedge B \rightarrow C$ следует $A \wedge B \rightarrow C$; из $A \rightarrow B \vee B \vee C$ следует $A \rightarrow B \vee C$, где A,B,C∈**Frm**;

Правила для протаскивания кванторов: пусть A,B,C,D∈**Frm**, x∈**Ind** и x не входит свободно в B, а $C \approx D$ означает, что замена подформулы C на D или D на C из нижеследующего списка формул в любую теорему ***PP*** вновь дает нам теорему ***PP****:*

A $\quad \forall x \neg A(x) \approx \neg \exists x A(x)$, $\exists x \neg A(x) \approx \neg \forall x A(x)$,
$\forall x (A(x) \wedge B) \approx \forall x A(x) \wedge B$, $\exists x (A(x) \wedge B) \approx \exists x A(x) \wedge B$,
$\forall x (A(x) \vee B) \approx \forall x A(x) \vee B$, $\exists x (A(x) \vee B) \approx \exists x A(x) \vee B$.

Хао Ван в [10] показал что ***PP*** является корректным и полным (т.е. $A \rightarrow B$ является теоремой ***PP*** тогда и только тогда, когда для всякого **V**, если **V**(A)=**t,** то **V**(B)=**t**). Он также установил, что сечение является допустимым правилом ***PP*** и исследовал отношение ***PP*** с классической логикой. Кроме того, Хао Ван построил альтернативное по отношению к ***PP*** исчисление ***EP***, которое отличается от ***PP*** лишь толкованием импликации: **V**($A \rightarrow B$)=**t** в ***EP*** тогда и только тогда, когда для всякого означивания **V**, если **V**(A)=**t**, то **V**(B)=**t** и если **V**(A)=**u**, то **V**(B)≠**f**.

Язык, интерпретация (с только что указанным единственным отличием) и правила вывода для ***EP*** те же самые, что и для ***PP***, а ограничительное условие аксиом ***EP*** соответствует интерпретации знака $\rightarrow$ в ***EP***.

В [3] и [2] было показано, что аналоги интерполяционной теоремы Крейга справедливы для исчислений частичных предикатов Хао Вана ***PP*** и ***EP***.

Пропозициональные фрагменты исчислений *PP* и *EP*

Пропозициональные фрагменты исчислений частичных предикатов Хао Вана *PP* и *EP* в дальнейшем соответственно будем обозначать через $\boldsymbol{PP_S}$ и $\boldsymbol{EP_S}$. Очевидно, что атомарными формулами в них будут только пропозициональные переменные.

А.Роуз сформулировал независимую и полную систему аксиом для $\boldsymbol{PP_S}$, которая содержит нижеследующие аксиомы A1-A12 и правила вывода R1-R4:

A1. $P \to P \vee Q$,

A2. $P \vee Q \to Q \vee P$,

A3. $P \wedge Q \to P$,

A4. $P \wedge Q \to Q \wedge P$,

A5. $\neg\neg P \to P$,

A6. $P \to \neg\neg P$,

A7. $P \wedge (Q \vee R) \to (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$,

A8. $\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$,

A9. $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$,

A10. $\neg(P \vee Q) \to (\neg P \wedge \neg Q)$,

A11. $(\neg P \wedge \neg Q) \to \neg(P \vee Q)$,

A12. $(P \wedge \neg P) \to Q$.

R1. Из $A \to C$ и $B \to C$ следует $A \vee B \to C$;

R2. Из $A \to B$ и $A \to C$ следует $A \to B \wedge C$;

R3. Из $A \to B$ и $B \to C$ следует $A \to C$, где A,B,C – не содержащие знака $\to$ формулы.

R4. Пусть P – пропозициональная переменная, входящая в формулу A, формула B – не содержит знака $\to$, а C получается из A в результате замены всех вхождений P в A на B; тогда из A следует C.

А.Роуз установил также необходимое и достаточное условие доказуемости формул в $\boldsymbol{PP_S}$, с его помощью доказал полноту $\boldsymbol{PP_S}$ и сформулировал независимую и полную систему аксиом для той версии пропозиционального фрагмента *PP*, которая в качестве исходных логических связок содержит лишь $\neg$ и $\vee$ (см. [9]).

Н.М.Ермолаева в [4] исследовала все возможные пропозициональные исчисления типа Хао Вана, получающиеся при варьировании аксиомы A12 и для соответствующих логик ввела особые обозначения: $\boldsymbol{L_I}$ совпадает с $\boldsymbol{PP_S}$ (т.е. с пропозициональным фрагментом *PP*), $\boldsymbol{L_{II}}$ получается из $\boldsymbol{L_I}$, если в ней A12 будет заменена более слабой аксиомой A12′. $P \wedge \neg P \to Q \vee \neg Q$. При этом, она характеризует $\boldsymbol{L_{II}}$ как фрагмент трехзначной логики Лукасевича. Хотя на самом деле, логику $\boldsymbol{L_{II}}$ можно точнее описать, как пропозициональный фрагмент альтернативного исчисления Хао Вана *EP*, т.е.

как $\boldsymbol{EP_S}$. Логика $\boldsymbol{L_{III}}$ двойственна к $\boldsymbol{L_I}$ (к $\boldsymbol{PP_S}$) и получается из $\boldsymbol{L_I}$, если в ней А12 будет заменена новой аксиомой: $P \to Q \vee \neg Q$. А $\boldsymbol{L_{IV}}$ является логикой де Моргана и получается из $\boldsymbol{L_I}$ опусканием аксиомы А12. В [4] также указывается семантический критерий истинности одноимпликативных формул и с его помощью доказывается теорема полноты для $\boldsymbol{L_{II}}$ (=$\boldsymbol{EP_S}$). Ниже мы приведем другое доказательство этой теоремы, использующее синтаксический критерий доказуемости формул в $\boldsymbol{EP_S}$. По своему характеру оно, на наш взгляд, ближе к способу, который А.Роуз использовал для установления полноты $\boldsymbol{PP_S}$.

Замечание. Автору было известно, что в [4] исследуются пропозициональные логики типа Хао Вана, но, к сожалению, содержание этой работы до последнего времени для него оставалось неизвестным. Лишь этим следует объяснить, что ни в [3] и ни в [2], где описывается система аксиом для $\boldsymbol{EP_S}$ и дается набросок доказательства полноты $\boldsymbol{EP_S}$, не упоминается работа [4], в которой эти факты были установлены значительно раньше. □

В [4] также рассматриваются классическая логика $\boldsymbol{K}$ (она получается присоединением $P \to Q \vee \neg Q$ к аксиомам $\boldsymbol{L_I}$) и противоречивая логика $\boldsymbol{L_0}$ (в которой верны все формулы); описывается точная модель логики $\boldsymbol{L_{IV}}$, далее, по включению упорядочиваются все перечисленные выше логики:

$\boldsymbol{L_{IV}} \subset \boldsymbol{L_{II}}$, $\boldsymbol{L_{II}} \subset \boldsymbol{L_I}$, $\boldsymbol{L_{II}} \subset \boldsymbol{L_{III}}$, $\boldsymbol{L_I} \subset \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L_{III}} \subset \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{L_0}$,

и доказывается интересный факт о том, что между каждыми двумя соседними логиками этого списка нет промежуточных логик.

В [5] В.К.Финн показал, что $\boldsymbol{L_I}$ (=$\boldsymbol{PP_S}$) есть одноимпликативный фрагмент трехзначной логики Лукасевича , а в [1] предложено предикатное расширение $\boldsymbol{L_{II}}$ (=$\boldsymbol{EP_S}$) и установлено, что оно в некотором смысле эквивалентно секвенциальному исчислению Дж.Клива (ср. [1] и [7]).

Конечные конъюнкции (дизъюнкции) произвольных формул в дальнейшем будем обозначать через $\prod_{i<m}$ ($\sum_{k<n}$). Пусть А и В конечные конъюнкции (дизъюнкции) формул. Будем говорить, что В является подконъюнкцией (поддизъюнкцией) А, если каждый конъюнктивный (дизъюнктивный) член формулы В также является конъюнктивным (дизъюнктивным) членом формулы А.

Отметим некоторые очевидные особенности исчислений $\boldsymbol{PP_S}$ и $\boldsymbol{EP_S}$:

(1) Если А – конечная конъюнкция формул и В является подконъюнкцией А, то формула $A \to B$ доказуема в $\boldsymbol{EP_S}$;

(2) Если В – конечная дизъюнкция формул и А является поддизъюнкцией В, то формула $A \to B$ доказуема в $\boldsymbol{EP_S}$;

(3) Если формулы: $A_1 \to A_2$, $A_2 \to A_3, \ldots, A_{n-1} \to A_n$ доказуемы в $\boldsymbol{EP_S}$, то формула $A_1 \to A_n$ также доказуема в $\boldsymbol{EP_S}$;
(4) Если формулы: $A \to B_1$, $A \to B_2, \ldots, A \to B_n$ доказуемы в $\boldsymbol{EP_S}$, то формула $A \to B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$ также доказуема в $\boldsymbol{EP_S}$;
(5) Если формулы: $A_1 \to B$, $A_2 \to B, \ldots, A_n \to B$ доказуемы в $\boldsymbol{EP_S}$, то формула $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \to B$ также доказуема в $\boldsymbol{EP_S}$.
Отметим еще некоторые легко устанавливаемые особенности исчислений $\boldsymbol{PP_S}$ и $\boldsymbol{EP_S}$. Пусть в $C^{\#}$ обозначает конъюнктивную нормальную форму (КНФ) формулы C, а C° – дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) формулы C, тогда
(6) Формула вида $A \to B$ доказуема в $\boldsymbol{PP_S}$ (в $\boldsymbol{EP_S}$) тогда и только тогда, когда $A^{\circ} \to B^{\circ}$ доказуема в $\boldsymbol{PP_S}$ (в $\boldsymbol{EP_S}$) тогда и только тогда, когда $A^{\circ} \to B^{\#}$ доказуема в $\boldsymbol{PP_S}$ (в $\boldsymbol{EP_S}$) тогда и только тогда, когда $A^{\#} \to B^{\circ}$ доказуема в $\boldsymbol{PP_S}$ (в $\boldsymbol{EP_S}$).
(7) Если формулы A и B не содержат знака $\to$, то замена A на B или B на A в любую теорему $\boldsymbol{PP_S}$ допустима тогда и только тогда, когда в $\boldsymbol{PP_S}$ доказуемы формулы: $A \to B$, $B \to A$, $\neg A \to \neg B$ и $\neg B \to \neg A$ [9].
(8)Формула вида $A \to B$ доказуема в $\boldsymbol{EP_S}$ тогда и только тогда, когда в $\boldsymbol{PP_S}$ доказуемы формулы: $A \to B$ и $\neg B \to \neg A$ [4].
Из (7) и (8) сразу следует
(9)Замена не содержащих знака $\to$ формул A на B или B на A в любую теорему $\boldsymbol{EP_S}$ допустима тогда и только тогда, когда в $\boldsymbol{EP_S}$ доказуемы формулы: $A \to B$ и $B \to A$.

Критерии доказуемости формул в $\boldsymbol{PP_S}$ и $\boldsymbol{EP_S}$

Пусть $\sum_{i<m} C_i$ есть ДНФ формулы A, $\sum_{k<n} D_k$ – ДНФ формулы B, $\prod_{r<s} E_r$ – КНФ формулы B и пусть для каждого $i<m$ $\sum_{k<n} F_k$ получается из $\sum_{k<n} D_k$ вычеркиванием тех конъюнктивных членов из каждого D_k ($k<n$), которые являются также конъюнктивными членами C_i.

Синт аксический крит ерий доказуемост и формул в $\boldsymbol{PP_S}$. Будем говорить, что формула $A \to B$ удовлетворяет синтаксическому критерию доказуемости формул в $\boldsymbol{PP_S}$, если для каждого такого дизъюнктивного члена C_i ДНФ $\sum_{i<m} C_i$ формулы A, который в качестве конъюнктивных членов не содержит ни одной пропозициональной переменной вместе с ее отрицанием, существует такой дизъюнктивный член D_k ДНФ $\sum_{k<n} D_k$ формулы B, что D_k является подконъюнкцией C_i (*крит ерий Роуза*).

Семант ический крит ерий доказуемост и формул в $\boldsymbol{EP_S}$. Для того чтобы $C_i \to \sum_{k<n} F_k$ была общезначимой, необходимо и доста-

точно, чтобы $\mathbf{V}(\sum_{k<n}F_k) \neq \mathbf{f}$ для всякого означивания $\mathbf{V}$ (*критерий Ермолаевой*).

Синтаксический критерий доказуемости формул в $\boldsymbol{EP_S}$. Будем говорить, что формула $A \to B$ удовлетворяет синтаксическому критерию доказуемости формул в $\boldsymbol{EP_S}$, если а) каждый дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A, который в качестве конъюнктов не содержит ни одну пропозициональную переменную вместе с ее отрицанием, удовлетворяет критерию Роуза для $\boldsymbol{PP_S}$, и б) для каждого дизъюнктивного члена C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A, который в качестве конъюнктивных членов содержит по крайней мере одну пропозициональную переменную вместе с ее отрицанием, каждый конъюнктивный член E_r КНФ формулы B является классической тавтологией (т.е. содержит некоторую пропозициональную переменную вместе с ее отрицанием) или в качестве дизъюнктивного члена содержит хотя бы один конъюнктивный член, входящий в указанный дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A.

Лемма 1. *Если формула* $A \to B$ *не удовлетворяет синтаксическому критерию доказуемости формул в* $\boldsymbol{EP_S}$, *то формула* $A \to B$ *не общезначима.*

Доказательство. Предположим, что условие леммы выполняется. Тогда существует такое число $i<m$, что а) если дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A в качестве конъюнктов не содержит ни одной пропозициональной переменной вместе с ее отрицанием, то ни для какого $k<n$ дизъюнктивный член D_k ДНФ $\sum_{k<n}D_k$ формулы B не является подконъюнкцией C_i, или б) если дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A в качестве конъюнктов содержит по крайней мере одну пропозициональную переменную вместе с ее отрицанием, то существует число $r<s$ такое, что конъюнктивный член E_r КНФ $\prod_{r<s}E_r$ формулы B не является классической тавтологией (т.е. не содержит ни одной пропозициональной переменной вместе с ее отрицанием), а также ни один дизъюнктивный член E_r КНФ $\prod_{r<s}E_r$ формулы B в то же время не является конъюнктивным членом C_i.

Рассмотрим случай а). Определим $\mathbf{V_0}$ следующим образом: пусть $\mathbf{V_0}(P)=\mathbf{t}$ для всякой пропозициональной переменной P, входящей в C_i без знака отрицания. Пусть, далее, $\mathbf{V_0}(Q)=\mathbf{f}$ для всякой пропозициональной переменной Q, входящей в C_i со знаком отрицания, и пусть $\mathbf{V_0}(R)=\mathbf{u}$ для всех таких пропозициональных переменных R, которые являются конъюнктами D_k, но не являются конъюнктами C_i. Остальные пропозициональные переменные могут принимать любые значения.

Очевидно, что в таком случае $\mathbf{V_0}(\sum_{i<m}C_i)=\mathbf{V_0}(C_i)=\mathbf{t}$, а для всякого $k<n$ $\mathbf{V_0}(D_k)\neq\mathbf{t}$ и, следовательно, $\mathbf{V_0}(\sum_{k<n}D_k)\neq\mathbf{t}$.

В случае б) мы зададим $\mathbf{V_0}$ следующим образом: пусть $\mathbf{V_0}(P)=\mathbf{u}$ для всякой пропозициональной переменной P, входящей в C_i. $\mathbf{V_0}(Q)=\mathbf{f}$ для всякой пропозициональной переменной Q, входящей в E_r без знака отрицания, и, наконец, пусть $\mathbf{V_0}(R)=\mathbf{t}$ для всех пропозициональных переменных R, входящей в E_r со знаком отрицания. Остальным переменным можно придать любые значения.

В таком случае мы легко убедимся, что $\mathbf{V_0}(C_i)=\mathbf{u}$, $\mathbf{V_0}(\prod_{r<s}E_r)=$ $=\mathbf{V_0}(E_r)=\mathbf{f}$, $\mathbf{V_0}(\sum_{i<m}C_i)=\mathbf{u}$ или, возможно, $\mathbf{t}$, в зависимости от того, какие значения получат при означивании $\mathbf{V_0}$ отличные от C_i дизъюнктивные члены C_t ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A ($t<m$, $t\neq i$). □

Лемма 2. Если формула $A\rightarrow B$ удовлетворяет синтаксическому критерию доказуемости формул в $\boldsymbol{EP_S}$, то $A\rightarrow B$ доказуема в $\boldsymbol{EP_S}$.

Доказательство. Пусть $A\rightarrow B$ удовлетворяет условию леммы. В таком случае мы будем иметь всего две возможности:

а). Дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A не содержит ни одной пропозициональной переменной вместе с ее отрицанием и существует дизъюнктивный член D_k ДНФ $\sum_{k<n}D_k$ формулы B, являющийся подконъюнкцией формулы A. Но тогда, согласно свойству (1), в $\boldsymbol{EP_S}$ доказуема $C_i\rightarrow D_k$, откуда в силу свойства (2) следует, что $C_i\rightarrow\sum_{k<n}D_k$ также доказуема в $\boldsymbol{EP_S}$.

б). Дизъюнктивный член C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A содержит некоторую пропозициональную переменную P вместе с ее отрицанием $\neg P$ и каждый конъюнктивный член E_r КФН $\prod_{r<s}E_r$ формулы B является либо классической тавтологией (т.е. содержит некоторую пропозициональную переменную Q вместе с ее отрицанием $\neg Q$), либо конъюнктивный член E_r КФН $\prod_{r<s}E_r$ в качестве дизъюнкта содержит G, являющийся в то же время конъюнктом дизъюнктивного члена C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A.

В первом случае, согласно свойству (1), в $\boldsymbol{EP_S}$ доказуема формула $C_i\rightarrow P\vee\neg P$. Кроме того, в силу аксиомы A12′ мы имеем $P\wedge\neg P\rightarrow Q\vee\neg Q$, а согласно свойству (2) в $\boldsymbol{EP_S}$ доказуема формула $Q\vee\neg Q\rightarrow E_r$. Из этих формул, используя свойство (3), мы сразу выведем формулу $C_i\rightarrow E_r$.

Во втором случае конъюнктивный член E_s КФН $\prod_{r<s}E_r$ формулы B хоть и не является классической тавтологией, но содержит некоторый дизъюнктивный член G, являющийся также конъюнктом дизъюнктивного члена C_i ДНФ $\sum_{i<m}C_i$ формулы A. Опять согласно (1) мы сначала выводим в $\boldsymbol{EP_S}$ формулу $C_i\rightarrow G$. Затем, в силу свойства (2) устанавливаем доказуемость $G\rightarrow E_r$ в $\boldsymbol{EP_S}$ и с помощью (3) убеждаемся, что в $\boldsymbol{EP_S}$ также доказуема $C_i\rightarrow E_r$.

В обоих случаях мы показали, что для любого $r<s$ в $\boldsymbol{EP_S}$ доказуема $C_i \to E_r$, но тогда согласно свойству (4) в $\boldsymbol{EP_S}$ также доказуема формула $C_i \to \prod_{r<s} E_r$ и, следовательно, $C_i \to \sum_{k<n} D_k$, в силу свойства (6).

Мы рассмотрели обе возможности а) и б) выполнения критерия доказуемости формул в $\boldsymbol{EP_S}$ и установили, что в каждой из них для любого $i<m$ в $\boldsymbol{EP_S}$ доказуемы все формулы вида $C_i \to \sum_{k<n} D_k$, но тогда, согласно свойству (5), в $\boldsymbol{EP_S}$ также доказуема формула $\sum_{i<m} C_i \to \sum_{k<n} D_k$. □

Теорема 1. *Пропозициональное исчисление* $\boldsymbol{EP_S}$ *является полным* (Ермолаева, 1973).

Доказательство прямо следует из контрапозиции леммы 1 и из леммы 2. □

Расширение исчислений частичных предикатов Хао Вана

Как только мы попытаемся обобщить понятие формулы, допустив итерацию знака $\to$ в формулах ***PP*** и ***EP***, сразу же возникнут трудности при оценке формул, содержащих более одного вхождения знака $\to$. Как уже было отмечено, в исчислениях Хао Вана истинность формулы вида $A \to B$ зависит не от того, какие конкретные значения принимают A и B при данном означивании, а от определенного отношения между совокупностями значений A и B. Если формулу вида $P \to (Q \to P)$ мы все же сможем разумно оценить как $(P \wedge Q) \to P$, то обязательно столкнемся с трудностью при оценке формулы $(\neg P \to P) \to P$, так как для каждого заданного значения P мы не сумеем определять конкретное значение антецедента $\neg P \to P$ этой формулы (мы сможем установить лишь то, что антецедент этой формулы не общезначим; см.[10]). Этим и отличается импликация Вана от импликаций трехзначных логик, скажем, Лукасевича или Клини. Поэтому несмотря на то обстоятельство, что $\boldsymbol{PP_S}$ является фрагментом трехзначной логики Лукасевича (о чем упоминалось выше, см. [5]), последнюю не следует считать расширением $\boldsymbol{PP_S}$, сохраняющим своеобразие импликации Вана, так как в трехзначной логике Лукасевича значение импликации зависит от конкретных значений ее антецедента и консеквента, а не от совокупности их значений.

Если мы хотим так расширить ***PP*** и ***EP***, чтобы итерация знака $\to$ была в них допустима, мы обязаны сохранить вышеуказанное свойство импликации Хао Вана.

Это можно, например, осуществить с помощью реляционной семантики (модифицированной для трехзначного случая)[1].

Мы можем следующим образом построить расширения ***PP**** и ***EP**** исчислений Хао Вана ***PP*** и ***EP***. Понятие формулы ***PP**** (***EP****) определяется обычно (с итерациями знака $\rightarrow$), а оценка формул осуществляется в следующей реляционной семантике.

PP*(***EP****)-фрейм является упорядоченной тройкой $\mathbf{Fr}=\langle\mathbf{H}, \mathbf{R}, \mathbf{D}\rangle$, где $\mathbf{H}\neq\varnothing$, $\mathbf{R}\subseteq\mathbf{H}\times\mathbf{H}$, причем **R** рефлексивно и транзитивно в **H**, **D** – функция областей, определенная на **H**, такая, что для всякого **v** из **H**, $\mathbf{D}(\mathbf{v})\neq\varnothing$ и если $(\mathbf{w},\mathbf{v})\in\mathbf{R}$, то $\mathbf{D}(\mathbf{w})\subseteq\mathbf{D}(\mathbf{v})$, $\mathbf{w},\mathbf{v}\in\mathbf{H}$. Пусть, далее, **Prl** – множество всех предикатных букв. ***PP****(***EP****)-модель есть пара $\langle\mathbf{Fr}, \mathbf{V}\rangle$, где **Fr** – ***PP****(***EP****)-фрейм, а **V** – частичная функция из $\mathbf{Prl}\times\mathbf{H}$ в $\{\mathbf{t},\mathbf{u},\mathbf{f}\}$, такая, что если P – пропозициональная переменная, $\mathbf{V}(P,\mathbf{w})=\mathbf{t}$ или **u** или **f**, а если P – n-арная предикатная буква, то $\mathbf{V}(P,\mathbf{w})=(\mathbf{Q},\mathbf{S})$, где $(\mathbf{Q},\mathbf{S})$ есть пара, такая, что $\mathbf{Q}\cap\mathbf{S}=\varnothing$ и $\mathbf{Q},\mathbf{S}\subseteq[\mathbf{D}(\mathbf{w})]^n$, где $[\mathbf{D}(\mathbf{w})]^n$ – n-кратное декартово произведение $\mathbf{D}(\mathbf{w})$ на себя. Теперь при сопоставлении переменным $x_1,...,x_n$ элементов $\mathbf{a_1},...,\mathbf{a_n}$ из $\mathbf{U}=\cup\mathbf{D}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v}\in\mathbf{H}$, $\mathbf{V}(P^n(x_1,...,x_n),\mathbf{w})=\mathbf{t}$, если $(\mathbf{a_1},...,\mathbf{a_n})\in\mathbf{Q}$, $\mathbf{V}(P^n(x_1,...,x_n),\mathbf{w})=\mathbf{f}$, если $(\mathbf{a_1},...,\mathbf{a_n})\in\mathbf{S}$, в противном случае, $\mathbf{V}(P^n(x_1, ...,x_n),\mathbf{w})=\mathbf{u}$. Условия оценки для $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ и $\exists$ такие же, как в ***PP*** и ***EP***. Наконец, $\mathbf{V}(A\rightarrow B,\mathbf{w})=\mathbf{t}$ в ***PP****, если для всякого **v**, такого, что $(\mathbf{w},\mathbf{v})\in\mathbf{R}$, если $\mathbf{V}(A,\mathbf{v})=\mathbf{t}$, то $\mathbf{V}(B,\mathbf{v})=\mathbf{t}$. А для ***EP****, кроме того, требуется выполнение условия: если $\mathbf{V}(A,\mathbf{w})=\mathbf{u}$, то $\mathbf{V}(B,\mathbf{v})\neq\mathbf{f}$. В противном случае $\mathbf{V}(A\rightarrow B,\mathbf{w})=\mathbf{f}$ в ***PP****, соответственно в ***EP****.

Легко можно показать, что ***PP**** (***EP****) является консервативным расширением ***PP*** (***EP***) в следующем смысле: формула A общезначима в ***PP*** тогда и только тогда, когда A общезначима в классе фреймов ***PP**** (***EP****).

Связь с эпистемической логикой

В [6] было сформулировано табличное исчисление частично интерпретируемой эпистемической модальной логики ***E4***. Логика ***E4*** интересна и тем, что в ней можно осуществить переводы формул ***PP**** и ***EP****.

[1] На последних смирновских чтениях, в мае 2001 г., Н.Н.Непейвода сообщил автору, что он ранее исследовал возможности расширения исчислений частичных предикатов Хао Вана, допускающие итерацию импликации, без использования реляционной сумантики. К сожалению, эта работа для автора остается недоступной.

Алфавит ***E4*** отличается от алфавита ***PP**** и ***EP**** лишь тем, что вместо импликации Вана $\rightarrow$ он содержит эпистемический модальный оператор знания $\Box$ (читается: *«известно, что»*).

Понятие формулы ***E4*** обычное. Фреймы и модели ***E4*** совпадают с ***PP****- и ***EP****-фреймами и моделями, а условия истинности для $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ и $\exists$ в ***E4*** соответственно совпадают с условиями их истинности в ***PP**** и ***EP****. Наконец, $\mathbf{V}(\Box A,\mathbf{w})=\mathbf{t}$ в ***E4***, если $\mathbf{V}(A,\mathbf{v})=\mathbf{t}$ для всякого $\mathbf{v}$, такого, что $(\mathbf{w},\mathbf{v})\in\mathbf{R}$. В противном случае (т.е. если существует такой $\mathbf{v}$, что $(\mathbf{w},\mathbf{v})\in\mathbf{R}$ и $\mathbf{V}(A,\mathbf{v})\neq\mathbf{t}$), $\mathbf{V}(\Box A,\mathbf{w})=\mathbf{f}$.

Заметим, что в ***E4*** общезначимой не является ни одна такая формула, которая не содержит $\Box$.

Теперь следующим образом определим функцию τ, соответственно τ', перевода формул ***PP****, соответственно ***EP****, в ***E4***:

$\tau(A) = A$, если A не содержит знака $\rightarrow$;

$\tau(A\rightarrow B) = \neg\Box\tau(A)\vee\Box\tau(B)$,

учитывая свойство (9), соответственно будем иметь

$\tau'(A) = \tau(A)$, если A не содержит знака $\rightarrow$;

$\tau'(A\rightarrow B) = \tau(A\rightarrow B)\wedge\tau(\neg B\rightarrow\neg A)$.

Используя правила построения таблиц для ***E4*** (см.[6]), можно показать, что справедлива следующая

Теорема 2. *Формула* A *общезначима в классе фреймов* ***PP****, *соответственно* ***EP****, *тогда и только тогда, когда* $\tau(A)$, *соответственно* $\tau'(A)$, *доказуема в* ***E4***.

Мы можем расширить исчисление ***PP****, не прибегнув к типовым ограничениям, допуская появление пропозициональных и предикатных букв на местах связанных переменных и разрешая появление формул на местах свободных переменных. Но основная задача при привлечении к рассмотрению частично определенных предикатов и множеств заключается в выяснении того, способна ли такая логика без порождения антиномий справиться с теми проблемами, для решения которых и было первоначально построено расширенное классическое исчисление предикатов, сразу же отвергнутое из-за его противоречивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аншаков О.М., Финн В.К.* Так называемые нечеткие логики и одноимпликативные исчисления // Семиотика и информатика, вып.17. 1981. С. 71-89.
2. *Бежанишвили М.Н.* Об одном исчислении частичных предикатов Хао Вана // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке / Материалы VI Общероссийской научной конференции 22-24 июня 2000 г. Изд-во Санкт-Петербургского университета. 2000. С.156-158.

3. *Беж анишвили М.Н.* Интерполяционная теорема для исчислений частичных предикатов Хао Вана // Логические исследования, вып.7. М.: Наука, 2000. С.148-158.
4. *Ермолаева Н.М.* О логиках, родственных исчислению Хао Вана // Научно-техническая информация, сер.2. №8. 1973. С.34-37.
5. *Финн В.К.* Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений и их алгебр // Философия в современном мире / Философия и логика. М.: Наука. 1974. С.398-438.
6. *Bezhanishvili M.* A partially interpreted modal tableau calculus // Multiple-Valued Logic. 5. 2000. P.103-116.
7. *Cleave J.P.* The notion of logical consequence in the logic of inexact predicates // Zeitschr. fuer math. Logik und Grundlagen d. Math. 20. 1974. P.307-324.
8. *Feferman S.* Toward useful type-free theories. I // JSL. 49. 1984. P.75-111.
9. *Rose A.*, A formalization of the propositional calculus corresponding to Wangs calculus of partial predicates // Zeitschr. fuer math. Logik und Grundlagen d. Math. 9. 1963. P.177-198.
10. *Wang H.*, The calculus of partial predicates and its extension to set theory. I // Zeitschr. fuer math. Logik und Grundlagen d. Math. 7. 1961. P.283-288.