M.M. Novosyolov

SUR LES INDISCERNABILITES COMME STRUCTURES ALGEBRIQUES

La logique qui correspond à un tel état des choses n'est pas «booléenne» …
Max Black

Резюме. *Основная цель статьи – в логической модели отобразить «разрыв» между чистым опытом и теорией и тем самым объяснить то «нетерпимое противоречие», на которое неоднократно указывал Анри Пуанкаре. С этой целью на основе понятия о тождестве как эмпирической (интервальной) неразличимости рассматриваются структуры неразличимостей в качестве модели неклассических алгебраических структур (решётки с псевдодополнениями, алгебры Гейтинга, n-значная алгебра Гёделя и др.).*

Dans l'intervention suivante, je me propose de présenter quelques-unes de mes idées sur le principe de l'identité des indiscernables commencées par mon article «Identity»[1], ma thèse «Identity with a measure of transitivity»[2] et mon article «On epistemological presiseness : interval approach» [3].

Ce sujet est traditionnel. Mais il est polysémentique, il est ouvert à toute interprétation raisonnable. Finalement il y a beaucoup de variantes de ce principe qui dépendent de la méthode utilisée pour définir les notions.

En particulier, l'expression «identité des indiscernables» peut être interprétée en accentuant le mot «identité» ou le mot «indiscernabilité». D'ordinaire on choisit le premier accent conformément aux travaux de Leibniz sur la logique pure[4]. Mais c'est le deuxième accent qui m'intéresse maintenant. Il est conforme à ce qu'on peut trouver chez Leibniz dans ses trouvaux mathématiques. L'indiscernabilité y est inséparable d'une continuité.

Du moment que Henri Poincaré a exposé ses idées sur la continuité empirique, le principe de l'identité pris dans le context empirique ne devient plus la logique pure de préférence – il est

[1] Novoselov M.M., Identity // Great Soviet Encyclopedia, a translation of the third edition, Macmillan, NY.- L., vol. 26, 1981, p. 79-80.
[2] LMPS'87, Abstracts, vol. 4, part 2, section 6, Moscow, 1987, p. 57-59.
[3] Voir : Science as a subject of study, Moscow, 1987, p. 165-195.
[4] Par exemple: Tarski A., Introduction à la logique, Paris- Louvain, 1960.

désirable de mettre en forme logique un phénomène de l'indiscernabilité empirique aussi. Il convient de remarquer ici que Leibniz n'a jamais tâché de souligner la différence particulière entre la continuité mathématique et la continuité empirique. Seul Henri Poincaré, en évoquant le problème de la continuité dans ses livres philosophiques, a noté que la notion de la continuité formée par l'expérience empirique est bien différente de celle formée par la connaissence théorique. D'après Poincaré, la continuité empirique est contradictoire en soi. Les données expérimentales peuvent s'exprimer par les relations suiventes: $\boldsymbol{a = b}$, $\boldsymbol{b = c}$, $\boldsymbol{a \neq c}$, qui se trouvent en désaccord intolérable avec la loi de contradiction de la logique pure[5].

Ainsi, d'une part, pour l'étude de la nature, pour faire une science quelconque, il faut autre chose que la logique pure parce qu'elle ne peut créer de nouveau. Mais d'autre part, c'est la contradictoire de la connaissance expérimentale qui ne permet pas de renoncer à la logique. Tel est évidemment l'état de la question.

D'abitude, comme on le sait, dans la connaissance théorique, on précise la notion intuitive de la continuité d'une manière classique — selon les méthodes ensemblistes. Et la manière de traiter l'indiscernabilité y conforme aussi aux abstractions ensemblistes: on considére la continuité comme ensemble des points où chaque point individualisé lui-même indépendemment du seuil de perception ou d'une précision de mesure.

Les images empiriques, au contraire, sont définies par rapport à notre sensibilité ou sensibilité du mesureur. Il en résulte que, dans l'expérience empirique, il y a toujours un intervalle d'incertidude ou d'approximation (ou d'abstraction) pour discerner les objets comme images ponctuelles individualisées. Au dire de Poincaré, les objets de l'expérience empirique sont enveloppés par le brouillard.

C'est pourquoi aux fins de caractéristique de la continuité empirique, il doit y avoir une autre notion de l'identité des indiscernables que celle de la logique pure (ou de Leibniz). Pour l'identité fondé sur des faits empiriques il faut échager les conditions proprement logique contre les coditions empiriques.

Au dessous je propose l'esquisse d'une telle notion.

Soit M l'univers des objets quelconques et soit N l'espase métrique de dimension finie engendrée par les vecteurs dont les composantes sont des propriétés mesurables des éléments de M. Supposons qu'il existe une application de M dans N telle que chaque objet de M est marqué par un vecteur de ses propriétés.

[5] Voir : Poincaré H., Science et hypothèse, Paris, 1906, ch. 2 ou : Poincarè H., La valeur de la science, Paris, 1905, ch. 3, § 3.

Il est clair qu'au point de vue empirique, les objets sont indiscernables dans M quand leurs images sont indiscernables dans N. Et ces images sont indiscernables dans N lorsque la distance (la mesure d'incertidude) entre elles n'excède pas une valeur fixée.

D'où il découle le schéma de définition suivant pour les objets de M :

$$\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{R}_\varepsilon\ \boldsymbol{y} \equiv \varphi\,(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i) \leq \varepsilon,$$

où ε (une valeur de seuil) appartient à l'ensemble des nombres réels positifs y compris 0 (zéro) et +∞ (plus l'infini), $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \boldsymbol{x}_n)$, $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$, $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sont les propriétés mesurables des éléments de M et $\boldsymbol{R}_\varepsilon$ désigne une indiscernabilité empirique. Je l'appelle aussi ***identité empirique***.

Il est évident qu'en reliant l'identité empirique avec l'information sur la proximité métrique des objets, nous ne pouvons encore être certain de la revélation de toute la structure objective fondée sur les données de l'expérience, parce que l'identité empirique est la vérité de fait et son opposé est possible. Cependant, on obtient avec une haute vraisemblance une bonne approximation si on choisit une convenable fonction de distence.

Pourtant, c'est la question philosophique. Je n'en parlerai pas ici. A présent, je me borne aux quelques conséquences algébriques du schéma de définition présenté plus haut. Je vais considérer deux cas.

Le cas 1. Dans ce cas, grâce à l'introduction du paramètre ε nous pouvons supposer l'affectation d'indices des toutes indiscernabilitées empiriques et nous pouvons faire abstraction de toutes leurs qualités, excepté leurs valeurs de ε.

Soit $\mathbf{R}^+ = \{\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq +\infty\}$.

Soit $\boldsymbol{R}_\varepsilon$ le nom commun pour fixer qu'il s'agit de l'indisctrnabilité quelconque.

Considèrons l'ensemble produit (cartésien) $E = \{\boldsymbol{R}_\varepsilon\} \times \mathbf{R}^+$.

Le couple $\langle \boldsymbol{R}_\varepsilon, \alpha\rangle$ où $\alpha \in R^+$, par exemple $\langle \boldsymbol{R}_\varepsilon, 0{,}01\rangle$, ce n'est autre que le nom de l'indiscernabilité concrète.

En autre terme, posons par définition $\langle \boldsymbol{R}_\varepsilon, \alpha\rangle = \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha}$.

Désignons par « ≤ » l'ordre de $\mathbf{R}^+$.

Désignons par « ⊆ » l'ordre de E.

On voit aisément que chaqun indiscernabilité sera comparé avec l'autre par le valeur de $\mathbf{R}^+$. Formellement :

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha} \subseteq \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \beta} \equiv \alpha \leq \beta.$$

Ainsi donc, nous sommes en présence d'un ensemble infini filtrant (à gauche et à droite) des indiscernabilités linéairement (totalement) ordonnés par inclusion. Cet ensemble a un élément nul ($\boldsymbol{R}_{\varepsilon = 0}$) et un élément unité ($\boldsymbol{R}_{\varepsilon\ =\ \infty}$). En outre tout sous-ensemble de lui à deux éléments $\{\boldsymbol{R}_{\varepsilon\ =\ \alpha}\ ,\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon\ =\ \beta}\ \}$ possède une borne inférieure et une borne supérieure. Donc, l'ensemble des indiscernabilités est réticulé ou ***le treillis***.

Notons bien que dans notre treillis, $\boldsymbol{R}_{\varepsilon = 0}$ n'est autre que l'identité logique pure (ou l'égalité arithmétique). En règle générale, les logiciens associent seulement ce cas avec le principe de l'identité des indiscernables formulé par Leibniz lui-même. Mais participant à notre treillis thèorique, cet identité est inaccessible pour l'expèrience empirique. Voilà pourquoi j'étudie ici le cas plus générale comprenant les identités (les indiscernabilités) qui ne sont pas transitives ou sont transitives avec une certaine mesure.

Nous pouvons maintenant définir le treillis des indiscernabilités en tant que structure algébrique à deux operations logique (la conjonction « & » et la disjonction « $\vee$ ») conformément à la règle suivante :

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha}\ \&\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \beta} \equiv \inf\{\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha}\ ,\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \beta}\ \},$$

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha} \vee \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \beta} \equiv \sup\{\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha}\ ,\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \beta}\ \},$$

c'est-à-dire en identifiant la conjonction avec la borne inférieure de l'ensemble de ses composants et la disjonction avec la borne supérieure de celui-ci.

Signalons que le treillis des indiscernabilités est distributif mais il n'est pas complémenté. Par conséquent, il n'est pas booléen. En effet, $\boldsymbol{R}_{\varepsilon = 0}$ est le complement booléien de $\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \infty}$ et réciproquement. Mais pour n'importe quelle indiscernabilité ce n'est pas vrai. Néanmoins, la négation peut être introduite à notre treillis par la table :

$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha}$	$\neg\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha}$
$\alpha = 0$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \infty}$
$\alpha > 0$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = 0}$

Je voudrais remarquer que « tertium non datur » ne vérifie pas pour la négation indiquée. C'est son affaiblissement qui n'est que vérifié. Autrement dit, la négation de notre treillis est pseudo-négation ou, d'une façon exacte, pseudo-complément relatif à un élément (empirique) du treillis[6]. Donc, l'agébre des indiscernabilités empiriques est pseudo-booléenne (à savoir ***le treillis pseudo-complémenté***).

Il est utile de remarquer aussi que nous pouvons considérer séparement la conjoction et la disjonction. En conformité avec cela, on

[6] Voir : Rasiowa H., Sikorski R., The mathematics of metamathematics, Warszawa, 1963, p. 54-62.

reçoit deux demi-treillis. On montre sans peine que dans ce cas nous aurons deux demi-groupes commutatifs où $\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \infty}$ est élément neutre pour la conjonction et $\boldsymbol{R}_{\varepsilon = 0}$ est celui-ci pour la disjonction.

En retournant à notre cas principal, voyons le treillis pseudo-complémenté enrichi de l'implication définie par la table suivante :

$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha} \Rightarrow \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \beta}$
$\alpha \leq \beta$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \infty}$
$\alpha > \beta$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \beta}$

Cette table s'explique naturellement. En effet, si $\alpha \leq \beta$ il est nécessaire d'evaluer l'implication $\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \alpha} \Rightarrow \boldsymbol{R}_{\varepsilon = \beta}$ comme vraie. Mais si $\alpha > \beta$ cela reste à vérifier parce que sa valuation binaire comme mensonge n'est pas adéquate. Le choix au profit de notre table convient le mieux à l'expérience et il est plus préférable du point de vue logique parce qu'il correspond au pseudo-complément relatif $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$ par rapport à $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$. Il est aisé de vérifier que dans ce cas nous sommes en présence de l'exemple du treillis implicatif avec les éléments nul et unité. Autraiment dit, c'est un modèle empirique de ***l'algébre de Heyting*** [7]. Si l'on sait qu'il suffit de disposer du nombre fini des indiscernabilités, on aura toujour ***l'algébre à n-valeurs de Gëdel*** [8].

Le cas 2. Je me borne au cas où il y a quelque modèle empirique, par exemple une certaine quantité mesurable, et un ensemble des résultats de sa mesure à la précision requise. Dans ce cas chaque indiscernabilité a une représentation matricielle. Nous pouvons évaluer chaque indiscernabilité au moyen de la (0-1)- matrice carrée. Alors la conjonction des indiscernabilités coïncide avec l'intersection logique de leurs matrices et la disjonction avec la réunion logique de celles-ci. Les symboles $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$ et $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$ changent leurs sens : $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$ désigne maintenent toute indiscernabilité qui peut être représentée par la matrice unité et $\boldsymbol{R}_{\varepsilon = \infty}$ toute indiscernabilité qui peut être représentée par la matrice universelle. On voit que dans ce cas actuel, il y a aussi un treillis. Ce treillis complet parce qu'il est fini.

Il nous reste à considérer l'ensemble fini des indiscernabilités muni d'une operation appelée le composé (ou le produit relatif). Pour

[7] Cela s'accorde avec une idée de J.L.Destouches. Selon lui la logique des énoncés expérimentaux est adéquate à la logique intuitionniste. Voir : Destouches J.L., Sur la mécanique classique et intuitionnisme // Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, ser. A, vol. LIV, n. 1, 1951. Voir aussi : Heyting A., Intuitionism. An introduction, Amsterdam, 1956.

[8] Voir : Gödel K., Zum intuitionischen Aussagenkalkül // Berka K., Kreiser L., Logik-Texte, Berlin, 1971, S. 186.

notre modèle cette operation se réduit à la multiplication (ou le produit) des matrices associées aux indiscernabilités correspondants. Mais il doit y discerner au moins deux sous-cas.

2.1. Dans ce sous-cas les résultats de nos mesures ainsi que les valeurs de $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont exprimés en entiers naturels. En l'occurrence nous avons à faire à des indiscernabilités que je nomme « naturelles ». J'ai cherché que pour celles-ci une loi du composé est definie sous forme suivente :

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}\ \mathrm{T}\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} = \boldsymbol{R}_{\varepsilon=(\alpha+\beta)},$$

où « T » designe le produit relatif. Au point de vue purement abstrait, nous pouvons imputer à cette loi les propriétés d'une operation interne sur l'ensemble de toutes des indiscernabilités naturelles entièrement. Par consequent, nous sommes en présence d'une structure algébrique à un operateur. On voit facilement que cette structure munie le composé est plongée isomorphiquement sur l'ensemble des nombres naturels muni l'addition. Autrement dit notre loi du composé induit sur l'ensemble des indiscernabilités naturelles une structure algébrique de demi-groupe (à savoir ***le demie-groupe dénombrable commutatif à élément unité***) [9].

2.2. Au sous-cas où les résultats de les mesures ainsi que les valeurs de $\boldsymbol{\varepsilon}$ appartiennent au demi-axe réel positif (R^+), une loi du composé des indiscernabilités (je l'ai cherché aussi) est définie en général de la manière suivente :

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}\ \mathrm{T}\ \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} = \boldsymbol{R}_{\max(\alpha,\beta)\leq\nu\leq(\alpha+\beta)}.$$

Il est clair que la loi ci-dessus n'est pas la loi interne sur l'ensemble des indiscernabilités réeles : les indicernabilités réeles n'est pas invariant par rapport au composé. Compte tenu de ce fait, il est souhaitable d'étendre l'ensemble de définition des valeurs de $\boldsymbol{\varepsilon}$ jusqu'à l'ensemble des nombres d'intervalles[10]. Alors nous aurons la possibilité d'étudier la structure des indiscernabilités que je nomme « indiscernabilités d'intervalles ».

---

[9] Ici l'élément unité est $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$.

[10] Des nombres d'intervalles voir : Moore R.E., Interval Analysis, N.-Y., 1966 ; Alefeld G., Herzberger J., Introduction to interval computations, N.-Y. — L., 1983.