Л.И.Мчедлишвили

К СЕМАНТИКЕ АПОДИКТИЧЕСКОЙ СИЛЛОГИСТИКИ АРИСТОТЕЛЯ

Abstract. *The aim of this article is to show that Aristotle's apodeictic syllogistic is a fragment of a one-place predicate extension of the propositional modal system* **T**.

На пути логического воссоздания концепции Аристотеля об аподиктических силлогизмах [1, I 8-12] имеются две главные трудности – представление этой концепции в виде единой формальной системы и ее семантическое осмысление. Первая из них связана с *проблемой аподиктического эктезиса,* вторая – *с проблемой истолкования аподиктических суждений средствами современной модальной логики.*

Доказательство посредством выделения (эктезиса) является одним из аристотелевских методов вывода правильных модусов второй и третьей фигур из модусов первой фигуры. Этот метод применяется Аристотелем как в ассерторической, так и в аподиктической силлогистике; его суть при применении в доказательствах ассерторических модусов состоит в следующем. Если среди посылок вывода или среди их следствий имеется частное высказывание SiP или SoP, то его в дальнейшем в процессе доказательства можно понимать *как данность такого нефиксированного термина* M*,* что, во-первых, M является частью субъекта S частного высказывания и, во-вторых, всякому M присущ предикат P частного высказывания или, соответственно, никакому M не присущ P, т.е. вводятся (вспомогательные) допущения MaS и MaP или, соответственно, MaS и MeP. Слово "нефиксированный" в этом контексте указывает на то, что никакие другие особенности M, кроме отмеченных, нам неизвестны и не подразумеваются и поэтому отождествлять M с каким-либо термином, встречающимся в рассматриваемом выводе, нельзя. И далее, при выводе тезиса вместо данного частного высказывания можно использовать эти допущения; т.е. если с помощью этих допущений получается заключение, которое не содержит M, то можно освободиться от них и считать, что данное заключение выводится из первоначальных посылок.

В ассерторической силлогистике на возможность применения метода эктезиса Аристотель ссылается только как на альтернативную [1, I 6, 28a 23-27, b14, b21-22] и в суммирующей главе [1, I 7] он вообще не упоминается. И в самом деле, в ассерторической силлогистике при доказательстве несовершенных модусов он лишь дублирует другие методы вывода. Это послужило одним из оснований оценки этого метода как малозначительного в аристотелевской силлогистике как системе [5, с.114]. Однако малозначительность метода не может служить основанием для его исключения из системы – в адекватной формальной реконструкции содержательной логической теории должны быть воспроизводимы все методы, используемые в этой теории.

Как было убедительно показано Я. Лукасевичем [5, с.105-115], а позже Г. Патцигом [15, с.156-168], в эктетическом методе доказательства неявно, но существенно задействованы свойства квантора существования, язык же силлогистики, как ассерторической, так и модальной, – простой бескванторный язык. И факт, что в известных формальных представлениях ассерторической силлогистики в числе средств вывода не находим ничего такого, что можно осмыслить как реконструкцию аристотелевского метода доказательства посредством эктезиса, возможно объясняется безуспешностью попыток описать его на простом силлогистическом языке без явного использования кванторов.

Однако неудачи не имели принципиального характера; доказательство посредством эктезиса из силлогистических посылок все-таки можно целиком представить на бескванторном языке силлогистики. Оно является вариацией доказательства с применением правила удаления квантора существования, и можно предположить, что Аристотель в эктетических доказательствах применял аналоги этого правила, которые, если принимается постулат о непустоте терминов, можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{(\mathrm{MaS} \wedge \mathrm{MaP}) \supset F}{\mathrm{SiP} \supset F} \qquad\qquad \frac{(\mathrm{MaS} \wedge \mathrm{MeP}) \supset F}{\mathrm{SoP} \supset F}$$

(*правило i-удаления*), (*правило o-удаления*),

где F – силлогистическая формула, которая не содержит переменную M (эти правила, их разновидности для других систем ассерторической силлогистики, а также правила аподиктического эктезиса впервые были предложены нами в 1983 г. на Тбилисском Симпозиуме "Логика Аристотеля", см. [4]).

Хотя в ассерторической силлогистике при доказательстве модусов применения метода эктезиса можно избежать, но если будем иметь в виду заключенные в этом методе дедуктивные возможности вообще, то его оценка как малозначительного, как будет видно из формулировки системы ассерторической силлогистики **EA**, оказывается неверной.

Формулами **EA** являются выражения вида SxP (атомарные формулы) и их истинностно-функциональные комбинации, где S и P – переменные из счетно-бесконечного списка переменных для терминов, а x – одна из силлогистических констант – a, e, i или o. Аксиомными схемами и правилами вывода системы **EA** являются:

a0. Все подстановочные случаи классических тавтологий,
a1. $\sim(SaP \wedge SeP)$,
a2. $SaP \vee SoP$, r1. modus ponens,
a3 $SeP \vee SiP$, r2. *i*-удаление,
a4 $(MeP \wedge SaM) \supset SeP$; r3. *o*-удаление.

EA и формальная система ассерторической силлогистики Я.Лукасевича [5, с.140], представленная в виде системы **C4** В.А.Смирнова [11], как множества теорем совпадают, однако правила эктезиса в системе Лукасевича, хотя они являются допустимыми (их присоединение к дедуктивному базису **C4** не увеличивает класса доказуемых формул), не производны: в **C4** невозможно воспроизвести доказательства посредством эктезиса.

Традиционное понимание ассерторической силлогистики можно уточнить следующим образом. Упорядоченная пара <D,V> называется *интерпретацией языка* **EA**, если и только если D – непустое множество, а V – функция, приписывающая каждой переменной M произвольное непустое подмножество D, т.е. $\varnothing \neq V(M) \subseteq D$. В каждой из интерпретаций всякая формула F языка **EA** получает одно из двух истинностных значений $V(F)$, определяемое индуктивно по построению формулы, при этом базисными пунктами определения являются:

b1. $V(SaP) = И \Leftrightarrow V(S) \subseteq V(P)$,
b2. $V(SeP) = И \Leftrightarrow V(S) \cap V(P) = \varnothing$,
b3. $V(SiP) = И \Leftrightarrow V(S) \cap V(P) \neq \varnothing$,
b4. $V(SoP) = И \Leftrightarrow V(S) \not\subseteq V(P)$.

Индуктивные пункты определения задаются в соответствии с классическими таблицами истинности. Имеет место теорема семантической адекватности: для всякой формулы F языка **EA**, *$\vdash F$ в* **EA***, если и только если F является* **EA***-общезначимой*.

Можно заметить, что понятие интерпретации языка **EA**, если не принимать во внимание ограничение V непустыми значениями терминов, совпадает с понятием интерпретации одноместного **УИП**, а правые части базисных пунктов b1–b4 являются условиями истинности в той же интерпретации следующих формул **УИП** (предпологается, что множество переменных терминов в языке **ЕА** и множество символов для одноместных предикатов в языке **УИП** совпадают):

(t1) $\forall x\ (Sx \supset Px)$, (t3) $\exists x\ (Sx \wedge Px)$,
(t2) $\forall x\ (Sx \supset \sim Px)$, (t4) $\exists x\ (Sx \wedge \sim Px)$,

соответственно. Очевидно, что класс общезначимых в **ЕА** формул не изменится, если снять ограничение, наложенное на V, и формулу *F* языка **ЕА** считать **ЕА**-*общезначимой,* если и только если в каждой интерпретации <D,V>

$$V\ ((P_1iP_1 \wedge \ldots \wedge P_niP_n) \supset F) = И,$$

где $P_1,\ldots, P_n$ – все входящие в *F* переменные. Отсюда следует, что формула *F выводит ся в* **ЕА**, *если и т олько если в* **УИП** *выводима формула* $t((P_1iP_1 \wedge \ldots \wedge P_niP_n) \supset F)$, которая называется *переводом F в* **УИП** и получается из формулы $(P_1iP_1 \wedge \ldots \wedge P_niP_n) \supset F$ заменой ее атомарных подформул SaP, SeP, SiP, SoP формулами **УИП** (t1)–(t4), соответственно, и которую можно записать как

$$(\exists xP_1x \wedge \ldots \wedge \exists xP_nx) \supset t(F).$$

ЕА является адекватной формальной реконструкцией ассерторической силлогистики Аристотеля в следующем смысле: язык **ЕА** не содержит кванторов; в **ЕА** выводим (не выводим) формальный аналог каждого утверждения явно принимаемого (отбрасываемого) Аристотелем в ассерторической силлогистике; и наконец, в **ЕА** формально воспроизводим каждый из трех методов, используемых Аристотелем в ассерторической силлогистике для сведения несовершенных корректных модусов к совершенным модусам первой фигуры.

Метод эктезиса применяется также в аподиктической силлогистике, а именно при доказательстве корректных, по Аристотелю, модусов Baroco и Bocardo с обеими аподиктическими посылками и аподиктическим заключением, т.е. модусов $Ba^Lro^Lco^L$ и $Bo^Lca^Lrdo^L$ [1, I 8, 30a 8-13]. Однако эктезис, т.е. введение на основе частного аподиктического высказывания вспомогательных допущений, которые в дальнейшем элиминируются, не совпадает с эктезисом, при котором исходное частное высказывание является ассерторическим. Анализ указанного места из "Первой аналитики" [8], [10] показал, что при аподиктическом эктезисе одно из вспомогательных допущений должно быть аподиктическим утверждением; правила аподиктического эктезиса можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{\begin{array}{c}(MaS \wedge Ma^{L}P) \supset F \\ (Ma^{L}S \wedge MaP) \supset F\end{array}}{Si^{L}P \supset F}$$
(*правило* i^{L}*-удаления*),

$$\frac{(MaS \wedge Me^{L}P) \supset F}{So^{L}P \supset F}$$
(*правило* o^{L}*-удаления*),

где F – силлогистическая формула, не содержащая переменную M.

Имеется и существенная разница. В аподиктической силлогистике метод эктезиса не дублируется другими методами и вывод модусов $Ba^{L}ro^{L}co^{L}$ и $Bo^{L}ca^{L}rdo^{L}$ с применением этого метода Аристотелем предлагается как единственно возможная версия их доказательства; в самом деле, прямой метод посредством обращения не пригоден по тем же соображениям, по каким он не может применяться для доказательства ассерторических Baroco и Bocardo, а метод reductio ad impossibile не проходит потому, что высказывание, контрадикторное предполагаемому заключению $So^{L}P$, является утверждением об унилатеральной возможности "Все S возможно суть P", которое в сочетании с любой из посылок доказываемого модуса не дает ни совершенного модуса первой фигуры, ни модуса, доказанного ранее. Эта ситуация еще сильнее убеждает нас в справедливости требования воспроизводимости в формальном представлении аподиктической силлогистики всех методов вывода, применяемых Аристотелем при сведении модусов второй и третьей фигур к модусам первой фигуры.

Однако обнаруживается трудность: методом эктезиса можно доказать и более сильные модусы $Baro^{L}co^{L}$ и $Bo^{L}cardo^{L}$, в которых общеутвердительная посылка является ассерторической и которые отвергаются Аристотелем как некорректные [1, 10, 11]. Эту возможность заметил уже Александр Афродизийский. И по-видимому, можно заключить, что *в аподиктической силлогистике Аристотеля невозможно совместить допустимость процедуры эктезиса (в частности, принятие правила* o^{L}*-удаления) с отбрасыванием указанных модусов и, следовательно, невозможно представить аподиктическую силлогистику в виде единой аксиоматической теории.* Фактически так и получилось: в предложенных в какой-то мере адекватных формальных реконструкциях аподиктической силлогистики Аристотеля либо невоспроизводим метод рассуждения с процедурой эктезиса и невыводимы модусы $Baro^{L}co^{L}$ и $Bo^{L}cardo^{L}$ [14], [2], либо этот метод воспроизводим, но одновременно доказываются забракованные Аристотелем модусы $Baro^{L}co^{L}$ и $Bo^{L}cardo^{L}$ [8], [10], [6]. Эти формальные представления дополняют друг друга и тем самым отражают непоследовательность интуитивных соображений, на которые опирался греческий философ. Рассматриваемая ниже система аподиктической силлогистики **LEA** принадлежит к реконструкциям второго рода; впервые она сформулирована в работах [8], [10].

В **LEA** расширяется понятие формулы, однако только за счет расширения класса атомарных формул: в выражениях вида SxP x теперь может быть также аподиктической константой – a^L, e^L, i^L или o^L.

Дедуктивный базис системы аподиктической силлогистики **LEA** является расширением дедуктивного базиса системы **EA** следующими аксиомными схемами и правилами вывода:

a5. $Sa^LP \supset SaP$,	a9. $(Ma^LP \wedge SaM) \supset Sa^LP$,
a6. $Se^LP \supset SeP$,	a10. $(Me^LP \wedge SaM) \supset Se^LP$,
a7. $Se^LP \supset Pe^LS$,	a11. $(Ma^LP \wedge SiM) \supset Si^LP$,
a8. $Si^LP \supset Pi^LS$,	a12. $(Me^LP \wedge SiM) \supset So^LP$,
r4. i^L-удаление,	r5. o^L-удаление.

Наша цель – семантический анализ системы **LEA**. После безуспешных попыток найти адекватный перевод формул аподиктической силлогистики на язык модальной логики и представить аподиктическую силлогистику Аристотеля в качестве фрагмента более широкой логической теории – какой-либо системы современной формальной модальной логики [12], [5], [16] появилось сомнение в возможности успешного решения этой проблемы вообще. Н.Решер это сомнение подкрепил обзором некоторого, по его мнению, исчерпывающего множества возможных переводов аподиктических атомарных формул на язык модальной логики одноместных предикатов и показал (с помощью компьютера), что ни один из этих 2520 (!) переводов не отображает адекватно все особенности аподиктической силлогистики Аристотеля. Тогда некоторые исследователи пришли к заключению, что для аподиктической силлогистики Аристотеля следует искать лишь "неформальную" семантику. Одна весьма впечатляющая версия такой семантики была разработана С. Мак-Коллом на основе идей Решера [14]. В своем анализе мы продолжаем линию А. Беккера – поиск перевода, "погружающего" аподиктическую силлогистику в модальную логику.

С другим направлением семантических исследований аподиктической силлогистики Аристотеля встречаемся в работах М.Бежанишвили [2], Е.К.Войшвилло [3] и В.И.Маркина [6] (к ним относятся и наши работы [8], [10]). В них хотя построены системы "формальной" семантики, однако они слишком специфичны – каждая из них в большей или меньшей мере разработана для случая аристотелевской аподиктической силлогистики и поэтому каждая из них в той же мере является концепцией *ad hoc*. Другая общая черта: в определении интерпретации аподиктического языка в них используются *кванторы с переменными для терминов*, т.е. с предикатными переменными. В своем анализе мы стараемся избежать этих черт.

При поисках адекватного перевода аподиктических формул на язык модальной предикатной логики предполагалось, что формулы ассерторической силлогистики переводятся на язык немодальной логики предикатов, например, функцией *t*, определенной выше. *Однако ассерторическая силлогистика допускает и интенсиональную трактовку.* Пусть *F* – формула **EA**, а tr(*F*) – формула модальной логики предикатов, которая получается из *F* заменой атомарных подформул вида SaP, SeP, SiP и SoP формулами

(tr1) $\forall x \Box(Sx \supset Px)$, (tr3) $\exists x \Diamond(Sx \wedge Px)$,
(tr2) $\forall x \Box(Sx \supset \sim Px)$, (tr4) $\exists x \Diamond(Sx \wedge \sim Px)$.

Можно показать, что *F выводима в* **EA***, если и только если*

$$\mathrm{tr}\,((P_1 i P_1 \wedge \ldots \wedge P_n i P_n) \supset F),$$

т.е. формула

$$(\exists x \Diamond P_1 x \wedge \ldots \wedge \exists x \Diamond P_n x) \supset \mathrm{tr}(F),$$

называемая переводом F на язык модального **УИП***, выводима в любом модальном* **УИП***,* которое является предикатным расширением нормального модального пропозиционального исчисления без или с формулой Баркан, при этом P_1, ..., P_n – все переменные, входящие в *F*. Некоторые места из "Первой аналитики" (например, I 15, 34 b7-19) показывают, что Аристотель был склонен понимать смысл ассерторических суждений именно так. Для нашего анализа модальное истолкование ассерторических суждений является исходным.

Упорядоченная четверка $\langle W,R,D,V \rangle$ называется *интерпретацией языка* **LEA***,* если и только если $\langle W,R \rangle$ – рефлексивный фрейм, D – непустое множество (предметов), а V – такая функция, что для любой переменной P языка **LEA** $V(P) \subseteq D \times W$. Произвольная формула *F* в $\langle W,R,D,V \rangle$ при каждом $w \in W$ имеет одно из двух истинностных значений V(*F*,w), которое определяется индуктивно по логической длине *F* следующим образом ($x \in D$, $w,v,u \in W$). Базисные пункты определения:

c1. $V(SaP,w) = И \Leftrightarrow \forall x \forall v((wRv \;\&\; (x,v) \in V(S)) \Rightarrow (x,v) \in V(P))$;
c2. $V(SeP,w) = И \Leftrightarrow \forall x \forall v((wRv \;\&\; (x,v) \in V(S)) \Rightarrow (x,v) \notin V(P))$;
c3. $V(SiP,w) = И \Leftrightarrow \exists x \exists v(wRv \;\&\; (x,v) \in V(S) \;\&\; (x,v) \in V(P))$;
c4. $V(SoP,w) = И \Leftrightarrow \exists x \exists v(wRv \;\&\; (x,v) \in V(S) \;\&\; (x,v) \notin V(P))$;
c5. $V(Sa^L P,w) = И \Leftrightarrow \forall x \forall v((wRv \;\&\; (x,v) \in V(S)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall u(vRu \Rightarrow (x,u) \in V(P)))$;

c6. $V(Se^{L}P,w) = И \Leftrightarrow \forall x((\exists v(wRv \;\&\; (x,v)\in V(S)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall u(wRu \Rightarrow (x,u)\notin V(P)));$
c7.$V(Si^{L}P,w) = И \Leftrightarrow$
$\exists x\ ((\exists v(wRv \;\&\; (x,v)\in V(S) \;\&\; \forall u(vRu \Rightarrow (x,u) \in V(P))) \vee$
$\vee\ \exists v(wRv \;\&\; (x,v)\in V(P) \;\&\; \forall u(vRu \Rightarrow (x,u)\in V(S))));$
c8. $V(So^{L}P,w) = И \Leftrightarrow \exists x(\exists v(wRv \;\&\; (x,v)\in V(S)) \;\&$
$\&\ \forall u(wRu \Rightarrow (x,u)\notin V(P))).$

Индуктивные пункты формулируются в соответствии с таблицами истинности для пропозициональных связок).

Формула F языка **LEA** называется **LEA**-*общезначимой* (**LEA**-*выполнимой*), если и только если в каждой (хотя бы в одной) интерпретации <W,R,D,V> при каждом (хотя бы при одном) $w\in W$

$$V((P_1iP_1 \wedge ... \wedge P_niP_n) \supset F,\ w) = И,\ \ (V((P_1iP_1 \wedge ... \wedge P_niP_n \wedge F),w) = И),$$

где $P_1,..., P_n$ – все входящие в F переменные термины.

Заметим, что понятие интерпретации языка **LEA** совпадает с понятием модели языка одноместного **T + BF** (одноместное **УИП** + модальная система **T** + формула Баркан) [13, 243-244] и в базисных пунктах определения $V(F,w)$ правые части равносильностей являются условиями истинности в той же модели <W,R,D,V> при том же $w\in W$ формул **T** + **BF**: (tr1)–(tr4) и

(tr5) $\forall x\ \Box(Sx \supset \Box Px)$,
(tr6) $\forall x\ (\Diamond Sx \supset \Box{\sim}Px)$,
(tr7) $\exists x\ (\Diamond(Sx \wedge \Box Px) \vee \Diamond(\Box Sx \wedge Px))$,
(tr8) $\exists x\ \Diamond(Sx \wedge \Box{\sim}Px)$,

соответственно (предполагается, что множество переменных в языке **LEA** и множество символов для одноместных предикатов в языке **T** + **BF** совпадают).

Пусть F – формула **LEA**, а $Tr(F)$ – формула **T** + **BF**, которая получается из F заменой атомарных подформул SaP, SeP, SiP, SoP, $Sa^{L}P$, $Se^{L}P$, $Si^{L}P$ и $So^{L}P$ формулами (tr1)–(tr8) соответственно.

Формулу $tr((P_1iP_1 \wedge ... \wedge P_niP_n) \supset F)$, т.е. формулу $(\exists x\ \Diamond P_1x \wedge ... \wedge \exists x\ \Diamond P_nx) \supset tr(F)$, где $P_1,\ ...\ ,P_n$ – все входящие в F переменные, будем называть *переводом F в* **T** *+* **BF** и сокращенно записывать как $E(F) \supset tr(F)$.

Для любой интерпретации <W,R,D,V> языка **LEA**, произвольной точки $w\in W$ и формулы F языка **LEA** $V(F,w) = V(t(F),w)$ и, следовательно, F **LEA**-*общезначима если и только если общезначим перевод F в* **T** *+* **BF**. Это утверждение (утверждение 1) является очевидным следствием вышеуказанного замечания и определения функции перевода tr.

Перевод в **T** *+* **BF** *каждой выводимой в* **LEA** *формулы G выводим в* **T** *+* **BF** (утверждение 2).

Для доказательства воспользуемся индукцией по длине вывода G в **LEA**. Если G отличная от a1 аксиома системы **LEA**, то в **T** + **BF** выводится более сильная формула tr(G); если же G есть a1, то доказуемо в **T** + **BF**, что ее перевод эквивалентен формуле $\exists x\Diamond Sx \supset \exists x\Diamond Sx$. Не сложно показать также, что если переводы посылок какого-либо из правил вывода r1–r5 выводимы в **T** + **BF**, то в ней выводится и перевод заключения этого правила. В качестве примера рассмотрим правила r2 и r4.

(r2): пусть в **T** + **BF** выводится перевод посылки правила r2: $(MaS \wedge MaP) \supset F$, т.е. выводится формула

$$[\exists x\Diamond Mx \wedge \exists x\Diamond Sx \wedge \exists x\Diamond Px \wedge E(F)] \supset$$
$$\supset [(\forall x\Box(Mx \supset Sx) \wedge \forall x\Box(Mx \supset Px)) \supset tr(F)],$$

и при этом M не содержится в F; тогда в **T** + **BF** выводится также ее частный случай:

$$[\exists x\Diamond(Sx \wedge Px) \wedge \exists x\Diamond Sx \wedge \exists x\Diamond Px \wedge E(F)] \supset$$
$$\supset [(\forall x\Box((Sx \wedge Px) \supset Sx) \wedge \forall x\Box((Sx \wedge Px)) \supset Px) \supset tr(F)].$$

Но $\forall x\Box((Sx \wedge Px) \supset Sx)$ и $\forall x\Box((Sx \wedge Px) \supset Px)$ выводимы в **T** + **BF** и, следовательно, в ней выводится и формула

$$[\exists x\Diamond Sx \wedge \exists x\Diamond Px \wedge E(F)] \supset [\exists x\Diamond(Sx \wedge Px) \supset tr(F)],$$

являющаяся переводом в **T** + **BF** заключения правила r2 – $SiP \supset F$.

(r4): пусть в **T** + **BF** выводится перевод посылок правила r4: $(MaS \wedge Ma^LP) \supset F$ и $(Ma^LS \wedge MaP) \supset F$, т.е. выводятся формулы:

$$[\exists x\Diamond Mx \wedge \exists x\Diamond Sx \wedge \exists x\Diamond Px \wedge E(F)] \supset$$
$$\supset [(\forall x\Box(Mx \supset Sx) \wedge \forall x\Box(Mx \supset \Box Px)) \supset tr(F)],$$
$$[\exists x\Diamond Mx \wedge \exists x\Diamond Sx \wedge \exists x\Diamond Px \wedge E(F)] \supset$$
$$\supset [(\forall x\Box(Mx \supset \Box Sx) \wedge \forall x\Box(Mx \supset Px)) \supset tr(F)]$$

и при этом M не содержится в F; тогда в **T** + **BF** выводятся также их частные случаи с подформулой $(Sx\wedge\Box Px)$ на место Mx для первой формулы и с подформулой $(\Box Sx\wedge Px)$ на место Mx для второй формулы; рассуждая так же, как в случае r2, получаем, что в **T** + **BF** выводятся формулы:

$$[\exists x\Diamond Sx \wedge \exists x\Diamond Px \wedge E(F)] \supset [\exists x\Diamond(Sx \wedge \Box Px) \supset tr(F)],$$
$$[\exists x\Diamond Sx \wedge \exists x\Diamond Px \wedge E(F)] \supset [\exists x\Diamond(\Box Sx \wedge Px) \supset tr(F)];$$

но тогда в **T** + **BF** выводится также формула

$$[\exists x\Diamond Sx \wedge \exists x\Diamond Px \wedge E(F)] \supset [\exists x(\Diamond(Sx\wedge\Box Px) \vee \Diamond(\Box Sx\wedge Px)) \supset tr(F)],$$

являющаяся переводом заключения правила r4 – $Si^LP \supset F$.

Из утверждений 1 и 2 в силу пригодности **T** + **BF** [13, 249] следует пригодность системы **LEA** – *каждая выводимая в* **LEA** *формула* **LEA***-общезначима* (утверждение 3).

Стандартное преобразование формул **LEA** [8], [10].

Пусть F – произвольная формула **LEA**. (s1) преобразуем *F* в дизъюнктивную нормальную форму в терминах атомарных формул, входящих в *F*. В каждой конъюнкции, входящей в качестве дизъюнкта в полученную на предыдущем шаге преобразования формулу, производим следующие изменения: (s2) каждый ее член вида ~SxP, где x – ассерторическая константа, заменяем на атомарную формулу, контрадикторную формуле SxP; (s3) каждый ее член вида SiP, SoP, $\mathrm{Si^LP}$ или $\mathrm{So^LP}$ заменяем на формулу MaS $\wedge$ MaP, MaS $\wedge$ MeP, (MaS $\wedge$ $\mathrm{Ma^LP}$) $\vee$ ($\mathrm{Ma^LS}$ $\wedge$ MaP) и MaS $\wedge$ $\mathrm{Me^LS}$, соответственно, где M – общий термин, не встречающийся ранее в преобразовании (в третьем случае одновременно производим дистрибуцию, вынося знак $\vee$ из области действия знака $\wedge$); (s4) производим замыкание без повторения по следующим схемам:

4.1 MaM,	4.7 (MeP $\wedge$ SaM) $\supset$ SeP,
4.2 $\mathrm{Sa^LP} \supset$ SaP,	4.8 ($\mathrm{Ma^LP} \wedge$ SaM) $\supset \mathrm{Sa^LP}$,
4.3 $\mathrm{Se^LP} \supset$ SeP,	4.9 ($\mathrm{Me^LP} \wedge$ SaM) $\supset \mathrm{Se^LP}$,
4.4 SeP $\supset$ PeS,	4.10 ($\sim\mathrm{Si^LP} \wedge$ SaM) $\supset \sim\mathrm{Ma^LP}$,
4.5 $\mathrm{Se^LP} \supset \mathrm{Pe^LS}$,	4.11 ($\sim\mathrm{Si^LP} \wedge$ MaP) $\supset \sim\mathrm{Ma^LS}$,
4.6 (MaP $\wedge$ SaM) $\supset$ SaP,	4.12 ($\sim\mathrm{So^LP} \wedge$ MaS) $\supset \sim\mathrm{Me^LP}$

(применение схемы 4.1 ограничено общими терминами, входящими в конъюнкцию). Преобразование завершено.

Формула *F**, полученная в результате стандартного преобразования формулы *F*, является дизъюнкцией конъюнкций атомарных формул и их отрицаний (однако легко заметить, что эти конъюнкции не содержат ассерторических атомарных формул со знаком отрицания и частных атомарных формул без знака отрицания). Конъюнкция, содержащаяся в *F** в качестве дизъюнкта, называется *несовместимой*, если и только если она содержит члены хотя бы одной из следующих пар формул: (SaP, SeP), ($\mathrm{Sa^LP}$, $\sim\mathrm{Sa^LP}$), ($\mathrm{Se^LP}$, $\sim\mathrm{Se^LP}$).

Можно доказать следующие *утверждения*:

(4) Если конъюнкция *K* несовместима, то ~*K* выводима в **LEA**. Если формула *G* получена из формулы *H* в процессе стандартного преобразования, в результате однократного применения одного из пунктов (s1)–(s4), то (5) если в **LEA** |– ~*G*, то в **LEA** |– ~*H* и (6) если *G* – **LEA**-выполнима, то **LEA**-выполнима и *H*. (7) Если конъюнкция *K*, содержащаяся в *F** в качестве дизъюнкта, совместима, то она **LEA**-выполнима.

Доказательства утверждений (4)–(6) не представляют трудности. Поэтому докажем лишь утверждение 7.

Пост роение: пусть M_1, ..., M_p; A_1, ..., A_k и E_1, ..., E_m соответственно являются списками всех терминов и атомарных формул вида Sa^LP и Se^LP, содержащихся в *K* со знаком отрицания. Положим: D° – множество, состоящее из произвольных p+k+m элементов, которые будем обозначать числительными 1,2, ..., p+k+m.

Определим совокупность W° множеств утверждений вида $n \in M_i$, где n=1, ..., p+k+m и i=1, ..., p. W° содержит начальный элемент w_o; все другие элементы W° порождаются из уже порожденных элементов W° определенными правилами. Элементы W° могут быть связаны бинарным отношением "следует за", которое определяется вместе с W°, при этом w_o и каждое множество, следующее за w_o, удовлетворяют условиям:

(*a) Если SaP входит в *K* и w содержит утверждение $n \in S$, то w содержит также утверждение $n \in P$.

(*a^L) Если Sa^LP входит в *K* и w содержит утверждение $n \in S$, то w и любой другой элемент W°, следующий за w, содержит утверждение $n \in P$.

w1) w_o содержит каждое утверждение вида $i \in M_i$.

w2) Для каждой A_h (h = 1, ..., k) Wϵ содержит элементы wah1 и wah2 такие, что wah1 следует за w_o, а wah2 – за wah1 и, при этом, утверждение $p+h \in S(A_h)$ - субъект атомарной формулы A_h.

w3) Для каждой E_j(j = 1, ..., m) Wϵ содержит элементы wej1 и wej2, следующие за w_o и содержащие утверждения $p+k+j \in S(E_j)$ и $p+k+j \in P(E_j)$, соответственно, где $S(E_j)$ и $P(E_j)$ – соответственно субъект и предикат атомарной формулы E_j.

w4) Для каждой формулы $\sim Si^LP$, входящей в *K*, если w_o или какое-нибудь w, следующее за w_o, для какого-нибудь $n \in D°$ содержит утверждение $n \in S$ или $n \in P$, то W° содержит множество wiL, которое следует за w_o, или, соответственно за w, и при этом содержит все утверждения, входящие в w_o(w), за исключением утверждений вида $n \in M$ для всякого M такого, что MaP (соответственно, MaS) содержится в *K*.

w5) Для каждой формулы $\sim So^LP$ из *K*, если w_o или какое-нибудь w, следующее за w_o, для какого-нибудь $n \in D°$ содержит утверждение $n \in S$, то W° содержит также множество wol, которое следует за w_o или, соответственно, за w и при этом содержит все утверждения вида $n \in M$ для каждого M такого, что PaM входит в *K*.

Определим бинарное отношение R° на множестве W° и функцию V°: Для всяких w, v∈D° положим: wR°v, если и только если w = v, либо v следует за w в построении.

V°: V°(M_i) = {(n,w): утверждение n∈M_i принадлежит w∈W°} и V°(P) = ∅, если P не входит в список M_1, ..., M_p.

Четверка <W°, R°, D°, V°> является интерпретацией языка **LEA** и в этой интерпретации V°(*A*,w_o) = И для каждого *A*, входящего в *K* в качестве члена конъюнкции; но тогда V°(*K*,w_o) = И и, следовательно, *K* **LEA**-выполнима. Из выполнимости *K* в силу утверждения (6) следует **LEA**-выполнимость формулы *F*.

Отсюда же очень легко следует *теорема полноты системы* **LEA***: если формула F не выводима в* **LEA***, то она не* **LEA***-общезначима* (утверждение 8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристотель* Первая аналитика // Аристотель. Сочинения. М, 1978. Т.2.
2. *Бежанишвили М.Н.* "Возможные миры" и аподиктическая силлогистика Аристотеля [4, с.112-128].
3. *Войшвилло Е.К.* Модальная силлогистика с содержательной точки зрения [4, с.121-141].
4. Логика Аристотеля. Материалы симпозиума (16-17 ноября 1983, г.Тбилиси). Тбилиси, 1985.
5. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М, 1959.
6. *Маркин В.И.* Семантический анализ аподиктической силлогистики Аристотеля [4, с.141-154].
7. *Мчедлишвили Л.И.* Эктезис в силлогистике Аристотеля // Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики. М., 1984. С.119-129.
8. *Мчедлишвили Л.И.* Интерпретация аподиктической силлогистики Аристотеля // Там же. С.110-119.
9. *Мчедлишвили Л.И.* Реконструкция метода эктезиса и системы позитивной силлогистики [4, с.21-26].
10. *Мчедлишвили Л.И.* Аподиктическая силлогистика Аристотеля и отношение "обозначает суть бытия" [4, с.154-168].
11. *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчислении предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.
12. *Becker A.* Die aristotelische Theorie der Möglischkeisschlüsse. Berlin, 1933.
13. *Hughes G.E., Cresswell M.J.* A New Introduction to Modal Logic. London–New York, 1996.
14. *McCall S.* Aristotle's Modal Syllogisms. Amsterdam, 1963.
15. *Patzig G.* Aristotle's Theory of the Syllogism. Dordrecht,1968.

16. *Rescher N.* Aristotle's Theory of Modal Syllogisms and its Interpretation // The Critical Approach: Essays in Honour of Karl Popper (ed. by M.Bunge). 1963, Sect.II.