А.В.Чагров

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕОРЕМАХ О ДЕДУКЦИИ В НОРМАЛЬНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ[1]

Abstract. *Questions about effective variants of deduction theorem for normal modal logics are discussed. Some proof of an* external *deduction theorem for minimal normal modal logic* **K** – a formula ψ is deducible from φ in **K** iff the formula $\Box^*\varphi \to \psi$ belongs to the dynamic logic – *is given.*

Ниже везде речь идет об исчислениях гильбертовского типа. В частности, всякая нормальная модальная логика задается следующим образом. Полагаем, что в качестве схем аксиом и правил вывода берутся: какой-нибудь набор схем аксиом, обеспечивающий полноту классического исчисления высказываний с единственным правилом вывода *modus ponens*, модальная схема аксиом $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$, быть может, еще какие-либо схемы аксиом и ровно два правила вывода – *modus ponens* и правило Геделя $\varphi/\Box\varphi$. Разумеется, всегда, говоря о схемах аксиом, мы подразумеваем, что они задаются над соответствующим языком – модальным в случае модальных логик, безмодальным в случае классической логики и т.д. Еще одно соглашение, обычно принимаемое «по умолчанию»: вместо «дополнительных схем аксиом» говорят о «дополнительных аксиомах» и в соответствии с этим пишут, к примеру, вместо схемы $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$, где α – произвольная формула, формулу $\Box p \to \Box\Box p$, считая, что в нее можно вместо переменной p подставлять произвольные формулы.

Обычная теорема о дедукции для классического исчисления высказываний (для имеющегося здесь в виду определения классического исчисления в предыдущем абзаце нужно опустить все упоминания про модальную и «еще какие-либо» схемы и правило Геделя) позволяет сводить вопрос о производности правила вывода к выводимости некоторой формулы: правило вывода $\varphi_1, \ldots, \varphi_n / \psi$ производно (т.е. из гипотез $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ можно вывести ψ) в классическом исчислении высказываний тогда и только тогда, когда в нем выводима формула $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\ldots(\varphi_n \to \psi)\ldots))$. Таким образом, поскольку классическая логика разрешима, то разрешима и проблема производности в ней правил вывода,

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-19706.

причем алгоритм выяснения производности правил вывода по сложности таков же, как и для выяснения выводимости.

Похожа ситуация и во многих стандартных нормальных модальных логиках. Так, если нормальная модальная логика L содержит **K4**, которая получается из минимальной нормальной модальной логики **K** добавлением аксиомы $\Box p \to \Box\Box p$, то для нее теорема о дедукции выглядит следующим образом:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_L \varphi \wedge \Box\varphi \to \psi.$$

(В дальнейшем можно считать, что $\Gamma = \varnothing$, поскольку для наших целей этого достаточно. Скажем, при рассмотрении проблемы производности правил вывода мы, ввиду возможности соединения формул в конъюнкцию, вполне можем обойтись однопосылочными правилами.) И так же, как и для классической логики, разрешимость самой логики **K4** с помощью этой теоремы о дедукции позволяет установить разрешимость и проблемы производности в **K4** правил вывода (без изменения порядка сложности алгоритма). Отметим ключевую роль здесь того факта, что в правой части эквивалентности стоит формула, *фиксированным образом* полученная из формул из левой части. Точнее, если обозначить $\chi(p,q) = p \wedge \Box p \to q$, то теорему о дедукции для логики L, расширяющей **K4**, можно переписать так:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_L \chi(\varphi,\psi).$$

В общем случае можно было бы рассматривать вопрос о теореме о дедукции для логики L как вопрос о существовании формулы $\chi(p,q)$ с указанным свойством. Этот вопрос в свое время получил неожиданный и тем не менее естественный ответ (см. об этом в [2] и/или [8]): такая формула $\chi(p,q)$ для нормальной модальной логики L существует тогда и только тогда, когда логике L принадлежит какая-нибудь формула вида $p \wedge \Box p \wedge \Box\Box p \wedge \ldots \wedge \Box^n p \to \Box^{n+1} p$, причем тогда можно полагать, что $\chi(p,q) = p \wedge \Box p \wedge \Box\Box p \wedge \ldots \wedge \Box^n p \to q$.

А как быть в том случае, когда такой фиксированной формулы $\chi(p,q)$ нет? Ответ не столь уж оптимистичен. Конечно, для всякой нормальной модальной логики L справедлива теорема о дедукции в следующей форме:

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow \exists n\, \Gamma \vdash_L \varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^n\varphi \to \psi,$$

однако квантор существования здесь весьма (невольный каламбур) существенен: *a priori* нет никаких эффективных методов подтверждения существования или отсутствия требуемого n. Например, автором в [3] (см. раздел 16.7) построена разрешимая нормальная модальная логика, для которой проблема производности правил вывода неразрешима.

С другой стороны, для стандартных нормальных модальных логик удается упомянутый квантор существования эффективизировать, установив верхнюю границу для его параметра в зависимости от размеров участвующих в утверждении о выводимости формул, см. [3]. Приведем точную формулировку эффективной теоремы о дедукции для **K**:

$$\Gamma,\varphi \vdash_L \psi \Leftrightarrow \exists n\ (n \leq 2^{|\mathbf{Sub}\varphi \cup \mathbf{Sub}\psi|}\ \&\ \Gamma \vdash_L \varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^n\varphi \to \psi),$$

где **Sub**φ и **Sub**ψ – множества подформул формул φ и ψ, соответственно, а $|$**Sub**$\varphi \cup$ **Sub**$\psi|$ – количество всех этих подформул. В результате мы вновь получаем эффективный способ распознавать производность правил вывода в рассматриваемой логике. Правда, в отличие от ситуации, когда существовала фиксированная формула $\chi(p,q)$ (см. выше) из-за экспоненты в формулировке эффективной теоремы о дедукции для **K** сложность алгоритма, распознающего производность в **K** правил вывода, оказывается существенно выше сложности алгоритма, выясняющего принадлежность формулы логике **K**. Более того, эту экспоненциальную оценку, по-видимому, невозможно понизить существенно ввиду того, что проблема производности правил вывода в **K** является ***EXPTIME***-полной (см. [7]) в то время как проблема выводимости в **K** «всего лишь» ***PSPACE***-полна (см. [5]). Аналогична ситуация с этими вопросами и в других логиках, скажем, в **T** = **K** + $\Box p \to p$, в **D** = **K** + $\Box p \to \Diamond p$.

Варианты теоремы о дедукции, о которых шла речь до сих пор, уместно называть *внутренними теоремами о дедукции*: в самой рассматриваемой системе существует возможность говорить о выводимости из гипотез. Теперь обратимся к иной возможности обсуждать в рамках формальных систем выводимости из гипотез в других системах – к типу утверждений, которые можно было бы назвать *внешними теоремами о дедукции*.

Прежде всего обратим внимание на то, что при выводе из гипотез у нас нет никаких ограничений на размеры совокупности гипотез: множество гипотез может быть даже бесконечным. Конечно, реально в выводе мы *не можем использовать все гипотезы* из бесконечной совокупности, но *можем использовать сколь угодно много*. Поясним это.

При использовании одного лишь правила *modus ponens* для любой рассматриваемой логики выводимость формулы ψ из гипотезы φ равносильна выводимости импликации $\varphi \to \psi$. Поэтому приводившиеся выше теоремы о дедукции можно интерпретировать как утверждение об элиминации правила Геделя при подходящем изменении совокупности гипотез. Допустим, нам нужно вывести с помощью правила *modus ponens* и правила Геделя из гипотезы φ формулу ψ. Это равносильно тому, чтобы вывести формулу ψ из бесконечного множества гипотез $\{\varphi, \Box\varphi, \Box\Box\varphi, \Box\Box\Box\varphi, \dots\}$ уже без применения правила Геделя[2]. И если бы у нас были формульные средства записи бесконечной конъюнкции в формулах, то мы могли бы записать последний факт в виде выводимости соответствующей импликации. В самих нормальных модальных логиках таких средств нет!

Пора вспомнить, что содержательные бесконечные конъюнкции вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \Box\Box\Box\varphi \wedge \dots$ удавалось формализовывать средствами логик с конечноместными пропозициональными связками. А именно такая задача решалась при описании итерации в динамических логиках. Впервые о возможности использования динамических логик для описания вывода из гипотез в нормальных модальных логиках автор услышал от М.Крахта в августе 1994 г., но до сих пор не встречал в литературе формулировок (и доказательств[3]) утверждений, подобных приводимой ниже теореме.

Воспользуемся решением этой задачи описания итерации, содержащимся в [1] (или в более ранней работе [6]). При этом нам будет достаточен фрагмент динамической логики, в котором всего одна программа (действие) и ее (его) итерация. В соответствии с этим опустим все ненужные нам здесь детали, что, в частности, позволит нам, слегка изменив обозначения, сделать их менее громоздкими.

Логика $\mathbf{K}^*$ – это нормальная бимодальная логика, ее модальностями являются $\Box$ (обычная необходимость) и $\Box^*$ (подразумеваемый смысл: $\Box^*\varphi$ означает то же, что и бесконечная конъюнкция $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \Box\Box\Box\varphi \wedge\dots$). Семантика Крипке для $\mathbf{K}^*$ определяется как и для обычных нормальных модальных логик, но с указанием, что формула вида $\Box^*\varphi$ истинна в мире a данной шкалы при данной оценке, если формула φ истинна во всяком мире, достижимом из a за произвольное конечное число шагов (в част-

2 Чтобы сохранить конечность понятийного аппарата выводимости, можно факт выводимости из этого бесконечного множества формулировать так: «формула ψ выводится из подходящего конечного подмножества множества гипотез $\{\varphi, \Box\varphi, \Box\Box\varphi, \Box\Box\Box\varphi, \dots\}$». Здесь «подходящего» по существу и есть тот самый квантор существования, который участвует в формулировке общей теоремы о дедукции для нормальных модальных логик.

3 Это не оговорка. Часто бывает, что доказательство дает больше, чем требует доказываемое утверждение.

ности, и за 0 шагов, т.е. в самом мире a). Аксиоматизация логики $\mathbf{K}^*$ нам сейчас не важна, но для полноты картины приведем некоторый ее вариант: в качестве схем аксиом берутся те же схемы, что и для $\mathbf{K}$ (в языке, обогащенном модальностью $\Box^*$), а также схемы $\Box^*p \leftrightarrow p \wedge \Box\Box^*p$, $p \to (\Box^* (p \to \Box p) \to \Box^*p)$, в качестве правил вывода берутся *modus ponens* и правила Геделя для обеих модальностей. В упомянутых сочинениях показано, в частности, что логика $\mathbf{K}^*$ полна относительно корневых конечных шкал Крипке[4], а потому и просто полна по Крипке, и, кроме того, разрешима.

Нужную нам связь $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}^*$ устанавливает

ТЕОРЕМА. *Для всяких формул φ и ψ, не содержащих модальности $\Box^*$, справедливо:*

$$\varphi \vdash_{\mathbf{K}} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}^* \vdash \Box^*\varphi \to \psi.$$

Утверждение этой теоремы и предлагается расценивать как внешнюю теорему о дедукции для логики $\mathbf{K}$. Ввиду разрешимости $\mathbf{K}^*$ эта теорема является эффективной и, в частности, позволяет распознавать производность в $\mathbf{K}$ правил вывода.

Итак, докажем сформулированную теорему.

Предположим, что $\varphi \vdash_{\mathbf{K}} \psi$. Тогда по теореме о дедукции для нормальных модальных логик найдется такое n, что логике $\mathbf{K}$ принадлежит формула $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^n\varphi \to \psi$, а потому и формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^m\varphi \to \psi$ при всех $m \geq n$. Допустим теперь противное доказываемому, т.е. что формула $\Box^*\varphi \to \psi$ не принадлежит $\mathbf{K}^*$. В соответствии с полнотой $\mathbf{K}^*$ относительно конечных шкал Крипке, найдется такая шкала, в корне которой при некоторой оценке истинна формула $\Box^*\varphi$, но опровергается ψ. Ввиду истинности в корне $\Box^*\varphi$ мы получаем, что формула φ истинна во всех точках шкалы, а значит, в корне шкалы истинны все формулы вида $\Box^m\varphi$, т.е. мы получили, что в корне опровергаются все формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^m\varphi \to \psi$, и потому они не могут принадлежать $\mathbf{K}^*$. Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно, т.е. на самом деле формула $\Box^*\varphi \to \psi$ принадлежит $\mathbf{K}^*$.

Теперь предположим, что ψ не выводится из φ в $\mathbf{K}$, т.е. логике $\mathbf{K}$ не принадлежит ни одна из формул вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^n\varphi \to \psi$, и покажем, что формула $\Box^*\varphi \to \psi$ не принадлежит

---

[4] Напомним, что мир шкалы называется ее корнем, если из него всякий другой мир этой шкалы достижим за конечное число шагов по отношению достижимости. Шкал с корнями (корневых шкал) всегда достаточно при рассмотрении полных, по Крипке, логик, причем можно считать, что опровержимые формулы опровергаются именно в корнях подходящих шкал.

$\mathbf{K}^*$. Для этого воспользуемся известной полнотой **K** относительно конечных интранзитивных деревьев[5].

Пусть $p_0,\ldots, p_k$ – все переменные, входящие в формулы φ и ψ. Рассмотрим класс моделей C' для модального языка с этими переменными, основанными на конечных интранзитивных деревьях, которые в этом классе не имеют p-морфных образов (или редуктов в терминологии [3]). Обозначим d_n модальную глубину формулы $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^n\varphi \rightarrow \psi$. Для всякого n ($n \in \omega$) будем обозначать C_n класс моделей из C', опровергающих $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^n\varphi \rightarrow \psi$ в своих корнях и имеющих глубину, не превосходящую d_n. Ясно, что все классы C_n не пусты и конечны (это легко доказывается индукцией по глубине). Определим бинарное отношение S на множестве $C = \cup_{n\in\omega}C_n$: для $M' \in C_n$ и $M'' \in C_{n+1}$ полагаем, что $M'\mathrm{S}M''$, если M' и M'' изоморфны или M' является p-морфным образом модели, получаемой из M'' удалением миров, достижимых из ее корня более чем за d_n шагов. Ввиду конечности всех классов вида C_n всякая модель в C имеет лишь конечное множество S-последователей. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: класс C конечен. Тогда существует некоторая модель M в C, в корне которой опровергаются все формулы вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^n\varphi \rightarrow \psi$. Ясно, что тогда в этом же корне опровергается и формула $\Box^*\varphi \rightarrow \psi$, т.е. она не принадлежит $\mathbf{K}^*$.

Случай 2: класс C бесконечен. Тогда по лемме Кенига мы имеем бесконечную S-возрастающую последовательность $M_1\mathrm{S}M_2\mathrm{S}M_3\mathrm{S}\ldots$ моделей из C_n. Нужную нам модель хотелось бы получить как «предел» этой последовательности. Однако этому мешает тот факт, что элементы этой последовательности непосредственно не связаны друг с другом своей «геометрией»: если $M_i\mathrm{S}M_j$, то вполне может оказаться, что M_j не является «продолжением» M_i. Чтобы устранить этот дефект, сделаем эти модели в определенном смысле однородными. Для этого для каждого i заменяем в модели M_i каждый мир вместе с порождаемой им моделью счетным множеством копий: сначала так поступаем с самыми верхними мирами (мирами глубины 0) – заменяем каждый такой мир на счетную совокупность миров с той же оценкой переменных, полагая, что все они достижимы из того же мира, что и в исходной модели, затем в получившейся модели каждую подмодель,

---

[5] Напомним, что шкала с корнем является иррефлексивным интранзитивным деревом, если в ней для любых двух миров имеется не более одного способа попасть из одного мира в другой по отношению достижимости, т.е. если $x\mathrm{R}a_1\mathrm{R}a_2\ldots a_k\mathrm{R}y$ и $x\mathrm{R}b_1\mathrm{R}b_2\ldots b_l\mathrm{R}y$, то $k = l$ и $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, … , $a_k = b_k$. Всякая интранзитивная шкала, конечно же, иррефлексивна.

порождаемую миром глубины 1, заменяем на счетную совокупность изоморфных ей подмоделей, полагая, что их корни достижимы из того же мира, что и в предыдущей модели, затем аналогично поступаем с подмоделями, порождаемыми мирами глубины 2, и т.д. В результате получаем последовательность моделей N_1, N_2, N_3, … (N_i получена из M_i). Поскольку наши преобразования моделей были обратными *p*-морфизмами, модель M_i является *p*-морфным образом N_i, а значит в мирах N_i истинны в точности те же формулы, что и в их прообразах при копировании из M_i. Вторым достоинством полученной последовательности является то, что N_{i+1} получается из N_i присоединением каких-то верхних миров, т.е. N_{i+1} – продолжение N_i. Если теперь взять модель *N* как объединение («предел») всех моделей N_i, то в ее корне будут опровергаться все формулы вида $\varphi \wedge \Box\varphi \wedge \Box\Box\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^i\varphi \to \psi$, т.е. опровергается ψ и истинны все формулы вида $\Box^i\varphi$. Последнее означает, что формула φ истинна во всех мирах модели *N*, а потому в корне *N* истинна формула $\Box^*\varphi$. В результате мы получаем опровержение в корне *N* формулы $\Box^*\varphi \to \psi$, т.е. вновь получили факт, опровергающий принадлежность этой формулы $\mathbf{K}^*$.

Таким образом, теорема доказана.

Итак, мы получили точное формульное выражение того факта, что из бесконечного множества гипотез с помощью лишь правила *modus ponens* выводима некоторая формула. Недостатком приведенного доказательства, точнее – его доказательства, является то, что здесь речь идет только о логике $\mathbf{K}$ и специфика ее семантики используется существенно. Можно предположить, однако, что утверждение доказанной теоремы останется справедливым для любой нормальной модальной логики и ее бимодального напарника, получаемого так же, как мы из $\mathbf{K}$ получили $\mathbf{K}^*$. С другой стороны, семантика $\mathbf{K}^*$ показывает, что мы поступали довольно естественным образом. Однако остались вопросы: является ли $\mathbf{K}^*$ минимальной бимодальной логикой, удовлетворяющей формулировке теоремы, есть ли иные подходы к получению указанного вида.

Что касается упомянутой минимальной бимодальной логики, то $\mathbf{K}^*$ ею не является. С учетом доказанного выше свойства $\mathbf{K}^*$ можно показать, что минимальной бимодальной логикой, для которой справедлив аналог нашей теоремы, является логика, определяемая как $\mathbf{K}^*$, но вместо последних двух схем аксиом $\mathbf{K}^*$ следует взять бесконечное множество схем $\{\Box^*\varphi \to \psi : \varphi \vdash_{\mathbf{K}} \psi\}$. Эта логика, в частности, не является конечно-аксиоматизируемой. Неминимальность $\mathbf{K}^*$ получается также из нижеследующего.

В [4] изучались возможности повышения выразительности модального языка при введении дополнительной модальности, семантический смысл которой – «истинность во всех мирах». Скажем, если L – некоторая нормальная модальная логика с модальностью $\Box$, то логика L^u получается из нее добавлением новой модальности $\Box^u$ с правилом Геделя для нее, схем аксиом $\Box^u(p \to q)\to (\Box^u p\to \Box^u q)$, $\Box^u p \to p$, $\Box^u p \to \Box^u\Box^u p$, $p \to \Box^u\neg\Box^u\neg p$ (т.е. $\Box^u$ является **S5**-необходимостью) и схемы $\Box^u p \to \Box p$, выражающей «универсальность» $\Box^u$. То, что это иной по сравнению с динамическим способ описания всеобщей необходимости, следует из того, что, например, $\mathbf{K}^*$ и $\mathbf{K}^u$ не содержатся друг в друге как бимодальные логики (считая их языки совпадающими и отождествляя символы $\Box^u$ и $\Box^*$). Несложно доказать (см. лемму 113 в [8]), что для любой нормальной модальной логики L и любых формул φ и φ и ψ, не содержащих модальности $\Box^u$, справедливо:

$$\varphi \text{ „ }_L \psi \quad \Leftrightarrow \quad L^u \text{ „ } \Box^u\varphi \to \psi.$$

Ясно, что при отождествлении символов $\Box^u$ и $\Box^*$ мы получаем, что для $\mathbf{K}^* \cap \mathbf{K}^u$ также справедлива доказанная теорема, причем ввиду несравнимости $\mathbf{K}^*$ и $\mathbf{K}^u$ их пересечение строго содержится в каждой из них.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сегерберг К.* «После» и «во время» в динамической логике // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М.: Наука, 1984.
2. *Blok W., Pigozzi D.* On the structure of varieties with equationally definable principal congruences. I // Algebra Universalis. 1982. Vol. 15. P. 195-227.
3. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. Oxford University Press, 1997.
4. *Goranko V., Passy S.* Using the universal modality: gains and question // Journal of Logic and Computation. 1992. Vol. 2 P. 5-30.
5. *Ladner R.E.* The computational complexity of provability in systems of modal logic // SIAM Journal on Computing. 1977. Vol. 6. P. 467-480.
6. *Segerberg K.* A completeness theorem in the modal logic of programs // Universal Algebra and Application. Warsaw: PWN, 1982. P. 31-46.
7. *Spaan E.* Complexity of Modal Logics. PhD thesis. Department of Mathematics and Computer Science, University of Amsterdam, 1993.
8. *Zakharyaschev M., Wolter F., Chagrov A.* Advanced Modal Logic // Gabbay Dov (eds.), New Handbook of Philosophical Logic, 1998.