Сидоренко Е.А.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ

Abstract. *The main aim of the paper is to formulate the deduction theorem which would be valid for any logical theory T closed by MP.*

The using of MP in a consequence $B_1, ..., B_m$ of inference B from hypotheses Γ in a theory T is said to be normalized iff for each member of the consequence B_i ($i \le m$), obtained from B_k and B_l ($k,l \le i$) by MP, the following conditions are satisfied: (a) if B_k is the major premise of MP and has a form $B_l \rightarrow B_i$, then it precedes the minor one B_l; (b) there is no any member B_k ($l \ge k \ge i$) of the consequence between B_l and B_i except members which are result of MP with the same minor premise B_l; (c) B_l doesn't depend from any hypotheses preceding the major premise B_k.

Definition. *A normalized inference of B from hypotheses $\Gamma = \{A_1,...,A_n\}$ ($n \ge 0$) (symbolically: $A_1,..., A_n$,, B) in a theory (calculus) T is said to be such a finite consequence of propositions (formulae) $B_1, ..., B_m$ ($m \ge 1$) which satisfies the following conditions:*
(1) The last member of the consequence B_m is coincided with B, and for any B_i ($1 \le i \le m$): (a) B_i is one of the hypotheses Γ; or (b) B_i is a theorem of T; (c) B_i is obtained from two of previous members of the consequence by MP under its normalized using; or (d) B_i is a conjunction of two of previous members of the consequence (by rule of adjunction: RA). (2) The formula B_m depends from each member of the consequence $B_1, ..., B_m$.

A consequence $B_1, ..., B_m$ is said to be normalized one iff it fulfils the definition. Any inference B from hypotheses Γ may be normalized.

Let $B_1, ..., B_m$ be a normalized consequence of inference B from hypotheses Γ in a theory T. A hypothesis B_i is said to be blocked for deduction iff there is at least one of the following blocking conditions: (b1) B_i is the first hypothesis of consequence and it be not used as minor premise; (b2) after step B_i the rule RA is used; (b3) after step B_i there is a result of MP, where the minor premise is a T-theorem and the major one depends from hypotheses; (b4) after step B_i there is a result of MP, which itself is used as minor premise of MP where major premise precedes all hypotheses from which the minor one depends.

Let's Γ_b be a list of the all the blocked for deduction hypotheses, and $A_1,..., A_n$ be a list of all hypotheses unblocked for deduction standing at the same order in which they occur in the consequence. The expression $\Gamma_b, \uparrow A_1,..., A_n$,, B is a normalized writing of the normalized inference B from Γ.

Deduction theorem. *If the consequence of formulae $B_1, ..., B_m$ is a normalized inference B from Γ in a D-theory T and $\Gamma_b, \uparrow A_1,..., A_n$,, B is the corresponding normalized writing of Γ ,, B, then any statement $\Gamma_b, \uparrow A_1,..., A_{i-1}$,, $A_i \rightarrow .... \rightarrow .A_n \rightarrow B$ ($1 \le i \le n$) is valid in T.*

Adequacy theorem. *A statement* Γ„ $A \to B$ *is valid in a D-theory T iff there exist a normalized consequence of inference B from hypotheses* Γ *and A and it is corresponded by* $\Gamma, \uparrow A$„ B.

1. Стандартные и нормализованные выводы

В [1] мною было предложено определение нормализованного вывода (см. далее *D2*) из гипотез в некоторой абстрактной логической теории (исчислении) T, которое обладало следующими свойствами. Во-первых, оно обеспечивало в любой теории T вывод из любых гипотез Γ тех же самых следствий, что и при обычном стандартном определении вывода (оно приводится ниже как *D1*). И, во-вторых, позволило дать единую формулировку теоремы дедукции для всех названных *D-теориями* пропозициональных исчислений, в которых имели силу следующие принципы: $A \to A$; $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$; $(A \to B) \to B$, где A - теорема T.

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, что не меняя определения логического вывода, которое дано в [1] (ниже мы, как и в указанной работе, обозначим его как *D2* и будем называть *нормализованным*), можно дать формулировку теоремы дедукции, которая будет справедлива *для всех* логических исчислений, замкнутых относительно правила *MP*.

Стандартным определением (логического) вывода из гипотез будем называть следующее:

D1. *Логическим выводом высказывания* (*формулы*) *B из гипотез* $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ ($n \geq 0$) (символически: Γ„ B) *в теории* (*исчислении*) *T называется конечная последовательность высказываний* (*формул*) $B_1, ..., B_m$ ($m \geq 1$) *такая, что последний член последовательности* B_m *совпадает с B, и для всякого* B_i ($1 \leq i \leq m$) *выполняется одно из следующих условий*:

(а) B_i *есть одна из гипотез* Γ; *или*

(б) B_i *- теорема*[1] *теории (исчисления) T*; *или*

(в) B_i *получается из двух предшествующих членов последовательности по правилу MP (modus ponens)*; *или*

(г) B_i *представляет собой конъюнкцию двух предшествующих членов последовательности (по правилу адъюнкции: RA).*

Примечания: (i) Если в теории T не имеет силы правило адъюнкции, то пункт (*г*) должен быть опущен; (ii) B_i рассматривается в

[1] Ссылка на теоремы позволяет ограничиться только двумя правилами вывода MP и правилом адъюнкции, не используя, в частности, правила подстановки и вообще никаких правил вывода от A к B, для которых в теории не имеет силы $A \to B$.

последовательности $B_1, ..., B_m$ как гипотеза или как теорема соответственно только тогда, когда B_i включено в последовательность именно в этом качестве.

1.1. Мы говорим, что *член* B_i *последовательности вывода* $B_1, ..., B_m$ *зависит от члена последовательности* B_k исключительно в случаях: (1) B_i совпадает с B_k, т.е., каждый член последовательности зависит от себя самого, или (2) B_k является одним из членов последовательности, из которых B_i получено по одному из правил вывода, или (3) B_i зависит от B_j, и B_j зависит от B_k (отношение зависимости транзитивно).

Установить, от каких членов последовательности $B_1, ..., B_m$ зависит тот или иной ее член B_i, очевидно можно в результате следующей простой процедуры. Сначала отмечаются те шаги вывода, на основании которых B_i получено непосредственно. Если таковые имеются (а они могут отсутствовать, когда B_i включено в последовательность как теорема или гипотеза и зависит только от себя самого), то отмечаются последовательно, пока процедура не закончится, шаги, на основании которых получены уже отмеченные члены последовательности. B_i зависит только от тех членов последовательности, которые окажутся отмеченными.

1.2. Будем говорить, что *использование правила MP в последовательности вывода* $B_1, ..., B_m$ *формулы B из гипотез Г в теории T является нормализованным*, если и только если для каждого члена последовательности B_i ($i \leq m$), полученного из двух предшествующих членов последовательности B_k и B_l по правилу *MP*, выполнены следующие условия:

(a) если B_k - большая посылка *MP*, т.е. имеет вид $B_l \rightarrow B_i$, то она предшествует в последовательности вывода меньшей посылке B_l;

(b) между членами последовательности вывода B_l и B_i (т.е. между меньшей посылкой и заключением *MP*) не находится никакой другой член последовательности B_k ($l \geq k \geq i$), если только B_k не получается по *MP* с той же малой посылкой B_l;

(c) меньшая посылка B_c не зависит ни от какой из гипотез, которая предшествует большей посылке $B_l \rightarrow B_i$.

D2. *Нормализованным логическим выводом высказывания* (*формулы*) *B из гипотез* $Г = \{A_1, ..., A_n\}$ ($n \geq 0$) *в теории* (*исчислении*) *T называется конечная последовательность высказываний* (*формул*) $B_1, ..., B_m$, ($m \geq 1$), *которая является* ***стандартным*** *выводом Г*„ *B в силу D1 и удовлетворяет следующим двум условиям*: (1) *Правило MP (modus ponens)используется только в*

нормализованном *виде.* (2) *Формула* B_m *зависит от каждого члена последовательности* $B_1, ..., B_m$.

1.3. *D2* несмотря на его отличия от определения *D1* не изменяет класса следствий, получаемых из тех же гипотез. Условие (2) не может ограничить числа следствий, которые можно получать в соответствии с *D1*, так как запрещает лишь явное включение в последовательность тех формул, без которых при получении следствий можно обойтись.

Обратимся теперь к условию (1). Пусть мы имеем вывод в смысле D1. И пусть последовательность вывода имеет вид $B_1, ..., B_m$. Допустим, что в выводе имеет место ненормализованное использование *MP*. Посылки, к которым было применено правило, обозначим как $B_l \rightarrow B_i$ и B_l. Соответственно, заключением будет B_i.

Начнем с требования нормализованности *MP*, которое обозначено как (b). Обратимся, если таковые имеются, к первому в выводе нарушению (b). При таком нарушении между меньшей посылкой B_l и заключением B_i стоят одна или несколько формул последовательности $B_{k1}, ..., B_{km}$, каждая из которых получена на иных основаниях, чем применение *MP*, меньшей посылкой которого является B_l. Нормализованность применения *MP* относительно (b) достигается за счет перестановки всех перечисленных формул $B_{k1}, ..., B_{km}$ в том же порядке сразу вслед за B_i. После этого осуществляются необходимые изменения в анализе (в нумерации шагов вывода, в записи оснований для каждого шага). После этих преобразований последовательность останется выводом в смысле D1.

После устранения в выводе всех нарушений условия (b) переходим к требованию (a). Если (a) нарушено без нарушения (c), то меньшая посылка B_l, представляет собой в этом случае теорему. Чтобы устранить ненормализованность, надо поставить эту же теорему после большей посылки $B_l \rightarrow B_i$ перед заключением B_i. Шаг B_l, если он теперь не нужен в выводе, устранить. Осуществить необходимые изменения в анализе.

Теперь рассмотрим нарушения, связанные с требованием (c). Если такие нарушения есть, обратимся к первому из них. Пусть B_l зависит от некоторой гипотезы (или гипотез), которые предшествуют $B_l \rightarrow B_i$.

Выпишем все те члены последовательности, от которых зависит B_l, в порядке их вхождения, кончая самой малой посылкой B_l. Получившийся в результате такой процедуры список формул включим в старую последовательность на место малой посылки, если она была ниже большей, и включим сразу после большей в противном случае[2]. В преобразованной последовательности удалим те повторяющиеся члены, устранение которых не влечет нарушения нормализации, и осуществим необходимые изменения в анализе. Поступим аналогичным образом со всеми другими нарушающими (с) ненормализованными применениями *MP*. В результате получим нормализованный вывод с теми же гипотезами и заключением, что и исходный вывод.

Указав процедуру нормализации выводов, мы фактически доказали следующую универсальную для любого исчисления метатеорему:

MT1. *В любой теории T классы следствий из данных гипотез, получаемые в силу D1 и в силу D2, в точности совпадают.*

Требование, которое мы выдвигали при построении определения нормализованного логического вывода, выполнено. Различие между *D1* и *D2* состоит только в том, что не всякая конечная последовательность $B_1, \dots, B_m$, которая является выводом B из Γ в смысле *D1*, является нормализованным выводом B из Γ в смысле *D2*. При этом всякий нормализованный вывод является выводом в соответствии с *D1*, и всякий вывод B из Γ в смысле *D1* может быть нормализован.

2. Теорема дедукции для D-теорий

2.1. Пусть последовательность $B_1, \dots, B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории *T*. Выделим в этой последовательности такой ее член B_k с наименьшим индексом, после которого в выводе к членам последовательности, которые зависят от посылок, не применялось правило адъюнкции *RA*. Пусть теперь $A_1, \dots, A_n$ есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве посылок, начиная с шага B_k.

2.2. Пусть далее Γ_a - список всех тех посылок из Γ, которые были использованы в выводе до шага B_k. И, наконец, пусть Γ_o - список тех посылок из Γ, которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка посылок Γ_a, Γ_o и $A_1, \dots, A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

[2] Сама малая посылка B_l в этом случае остается пока на месте. Можно ли будет ее вычеркнуть, зависит от того, не повлечет ли такое вычеркивание несоответствий с определением нормализованного вывода и вывода вообще.

2.3. Выражение $\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ будем называть *нормализованной записью* утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ, имеющего вид $B_1, ..., B_m$. Записи $\Gamma_a, \downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ и $\{\Gamma_o\}, \downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ говорят о пустоте соответствующего списка посылок. Запись $C_1,..., C_k, \downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ показывает, что после посылок $C_1,..., C_k$ в выводе использовалось RA. При пустоте обоих списков Γ_o и Γ_a будем начинать нормализованную запись со стрелки $\downarrow A_1,..., A_n \vdash B$, показывая тем самым, что ни к одной из посылок не применялось в выводе правило RA. Запись $C_1,..., C_k \downarrow \vdash B$ означает, что гипотез, после которых в выводе не применялось правило RA, нет. Наконец, обычная запись (без стрелки) $A_1,..., A_n \vdash B$ говорит только о том, что из указанных посылок можно вывести B, но не утверждается, что запись вывода нормализована.

MT2. (*Теорема дедукции для D-теорий*). *Если последовательность $B_1, ..., B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой D-теории T, и $\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1,..., A_n \vdash B$ есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу всякое утверждение:*

$$\{\Gamma_o\}, \Gamma_a, \downarrow A_1,..., A_{i-1} \vdash A_i \to .... \to .A_n \to B \ (1 \leq i \leq n) .$$ [3]

3. Теорема дедукции для всех систем

Формулировка *универсальной теоремы дедукции* требует дополнительных терминологических соглашений.

3.1. Пусть последовательность $B_1, ..., B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T. Будем говорить, что формула последовательности B_i, являющаяся гипотезой, ***блокирована для дедукции***, если и только если имеет место по крайней мере одно из следующих ***блокирующих условий***:

(b1) если B_i является первой по счету гипотезой, входящей в последовательность, и не использована в выводе в качестве большей посылки.

(b2) после шага B_i в выводе к зависящим от гипотез формулам было применено правило адъюнкции RA;

---

[3] Доказательство этой теоремы и более детальное изложение всего материала даны в [6]. Ниже имеется строгое доказательство универсальной теоремы дедукции MT3, из которой видна справедливость MT2.

(b3) после шага B_i имеет место заключение по *MP* при том, что в качестве малой посылки выступает теорема теории, а в качестве большей - зависящая от гипотез формула.

(b4) после шага B_i имеет место заключение по *MP*, в качестве малой посылки которого выступает зависящая от гипотез формула A, а большей посылкой служит член последовательности, предшествующий всем тем гипотезам, от которых зависит A;

3.2. Пусть последовательность $B_1, ..., B_m$ есть нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T. Выделим в этой последовательности такую гипотезу B_k с наименьшим индексом, которая не блокирована для дедукции. Пусть теперь $A_1, ..., A_n$ есть все те члены последовательности, не обязательно различающиеся, которые в указанном порядке входят в нее в качестве гипотез, начиная с шага B_k включительно.

Пусть далее Γ_b - список всех тех (блокированных) гипотез из Γ, которые были использованы в выводе до шага B_k. И, наконец, пусть Γ_o - список тех гипотез из Γ, которые не использовались в выводе вообще.

Мы имеем, таким образом, три списка гипотез Γ_b, Γ_o и $A_1,..., A_n$, которые в своей совокупности исчерпывают весь список Γ и каждый из которых в конкретном случае может быть пустым.

3.3. Выражение $\{\Gamma_o\}, \Gamma_b, \uparrow A_1,..., A_n \vdash B$ будем называть нормализованной *записью* утверждения $\Gamma \vdash B$ для нормализованного вывода B из Γ, имеющего вид $B_1, ..., B_m$. Список Γ_o будем опускать. Запись $\uparrow A_1, ..., A_n \vdash B$ в отличие от записи $\Gamma_b, \uparrow A_1, ..., A_n \vdash B$ говорит о пустоте Γ_b, и, значит, о том, что ни одна из гипотез не блокирована для вывода. В свою очередь запись $\Gamma_b, \uparrow \vdash B$ говорит, что все использованные в выводе гипотезы (при данном построении вывода) блокированы для дедукции. Наконец, обычные записи $\Gamma_b, A_1, ..., A_n \vdash B$ и $A_1, ..., A_n \vdash B$ говорят о том, что из указанных гипотез можно вывести B, но не утверждается, что запись вывода нормализована.

МТ3. (*Универсальная теорема дедукции*). *Если последовательность* $B_1, ..., B_m$ есть *нормализованный вывод формулы B из гипотез Γ в некоторой теории T*, и $\Gamma_b, \uparrow A_1,..., A_n \vdash B$ $(n \geq 1)$ *есть соответствующая этому выводу нормализованная запись утверждения $\Gamma \vdash B$, то в T имеет силу утверждение:*

$$\Gamma_b, \uparrow A_1,..., A_{i-1} \vdash A_i \to .... \to . A_n \to B \quad (1 \leq i \leq n).$$

Доказательство. Пусть в некоторой теории T (возможно, пустой) существует нормализованный вывод $B_1, ..., B_m$ формулы B из гипотез Γ, которому соответствует нормализованное утверждение $\Gamma_b \uparrow A_1,..., A_n,, \ B$. Надо показать, что в этом случае верно всякое утверждение:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1,..., A_{i-1},, \ A_i \to ....\to .A_n \to B \ (1 \le i \le n)$$ [4].

Доказательство будем вести по исчерпывающим случаям. Согласно принятым требованиям к нормализованным утверждениям в последовательности $B_1, ..., B_m$ после появления гипотезы A_1 никакие ограничения, блокирующие гипотезы, силы не имеют. Рассмотрим ту часть последовательности (назовем ее подпоследовательностью G_{lm}), которая начинается с шага B_l, на котором в последовательность включена гипотеза A_n, и кончается последним шагом B_m, на котором мы имеем формулу B. Покажем, что эта подпоследовательность всегда состоит только из двух членов B_{m-1} и B_m, совпадающих с A_n и B соответственно.

Убедимся сначала, что подпоследовательность G_{lm} не может состоять всего из одного члена, т.е. что B_m не может совпасть с гипотезой A_n. Это ясно из того, что A_n в таком случае была бы единственной гипотезой, совпадая с A_1 при пустом списке неблокированных гипотез, от которых зависит совпадающее с этой гипотезой заключение B_m. Весь вывод состоит из единственного шага B_m, где m=1. Но тогда B_m в силу блокирующего ограничения b1 не может входить в последовательность как гипотеза, поскольку указанное ограничение требует, чтобы первая гипотеза последовательности была использована как меньшая посылка.

Гипотеза A_n во всех случаях может быть только меньшей посылкой. Если бы она была большей посылкой, то после нее должна была бы находиться меньшая. Если бы при этом меньшая была теоремой, то было бы нарушено блокирующее ограничение b3. А если бы меньшая зависела от гипотез, то было бы нарушено условие (с) нормализованного использования *MP*.

Чтобы доказать, что между формулами B_l (она же A_n) и B_m не может находиться ни одна промежуточная формула последовательности B_{l+1}, убедимся, что после B_l невозможно включить в последовательность никакую формулу B_{l+1}, отличную от последней формулы B_m. Исследуем все возможные случаи.

<u>Случай 1</u>. Допустим, что B_{l+1} является теоремой и используется как меньшая посылка *MP*. Большая посылка при этом от гипотез зависеть не может, так как это нарушило бы b3. Если же большая посылка от гипотез не зависит, являясь теоремой, то результатом *MP* будет опять-таки теорема. При этом в нарушение требований нормализованного вывода формула B_m не

[4] Коррективы, которые надо внести в доказательство МТ3 при пустоте Γ_b, видны из формулировки самой теоремы.

будет зависеть от B_{l+1}. Таким образом, теоремой и меньшей посылкой B_{l+1} быть не может. Не может B_{l+1} быть также теоремой и большей посылкой. Действительно, если меньшей посылкой является теорема, то от B_{l+1} не будет зависеть B_m, а если меньшей посылкой будет зависящая от гипотез формула, то это нарушит требование (c) нормализованного использования *MP*.

Случай 2. B_{l+1} зависит от гипотез. Включить B_{l+1} в последовательность вывода можно было бы в этом случае исключительно за счет применения *MP*. При этом малой посылкой могла бы быть только гипотеза A_n, так как в противном случае было бы нарушено условие (b) нормализованного использования *MP*, согласно которому не должно быть никаких членов последовательности между меньшей посылкой и заключением. Чтобы B_m зависело от B_{l+1}, последнее должно быть использовано как одна из посылок *MP*. Большей посылкой B_{l+1} быть не может, потому что после нее нельзя включать ни формул, зависимых от гипотез (условие (c)), ни теорем (b3).

Остается рассмотреть последнюю возможность, при которой B_{l+1} является меньшей посылкой. Это означает, что в последовательности вывода имеются предшествующие B_l формулы $A_n \to B_{l+1}$ и $B_{l+1} \to B_{l+2}$, где B_{l+2} формула, от которой зависит B_m (возможно совпадая с ней) и которая получается по *MP* из $B_{l+1} \to B_{l+2}$ и B_{l+1}. Теперь если две указанные импликации $A_n \to B_{l+1}$ и $B_{l+1} \to B_{l+2}$ входят в вывод в указанной последовательности, то оказывается нарушенным условие (c), так как B_{l+1} зависит от $A_n \to B_{l+1}$. Если порядок иной, то нарушенным оказывается блокирующее ограничение b4. Таким образом, случай 2, как и случай 1, оказывается невозможным.

Следовательно, A_n всегда находится на шаге B_{m-1}. В силу наших ограничений на *MP* формула A_n может быть только малой посылкой этого правила, в результате применения которого получено B_m. Это значит, что в качестве большей посылки мог быть только член последовательности имеющий вид $A_n \to B$. Но если формула $A_n \to B$ входит в последовательность вывода до гипотезы A_n, то значит она является выводимой из $\Gamma_a, A_1, ..., A_{n-1}$. Заметим сразу, что $A_n \to B$ не может не зависеть ото всех остальных гипотез $\Gamma_a, A_1, ..., A_{n-1}$, так как в противном случае не выполнено было бы требование о зависимости заключения B (которое получается из $A_n \to B$ и A_n в один шаг) от всех гипотез. Таким образом, возможность по крайней мере однократного применения теоремы дедукции доказана.

Мы же должны доказать теперь верность более сильного утверждения:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_{i-1} \,,\!, \quad A_i \to \ldots \to . A_n \to B \ (1 \le i \le n) .$$

Нам надо показать, что нормализованная последовательность вывода $B_1, \ldots, B_m$ формулы B из $\Gamma_b, A_1, \ldots, A_n$ может быть преобразована в нормализованную последовательность $C_1, \ldots, C_r$, которой будет соответствовать:

$$\Gamma_b, \uparrow A_1, \ldots, A_{n-1} \,,\!, \quad A_n \to B .$$

При доказательстве того, что принцип дедукции применим к последней гипотезе A_n, мы видели, что формула $A_n \to B$ или сама предшествовала гипотезе A_n, или ее можно было получить из предшествующих гипотезе формул с помощью имеющихся в T теорем. В первом случае требуемый нормализованный вывод $C_1, \ldots, C_r$, обеспечивающий вывод $A_{n-1} \to . A_n \to B$ из $\Gamma_b, A_1, \ldots, A_{n-2}$, мы получим, ограничив последовательность шагом, на котором получено $A_n \to B$. Во втором - поставив на место A_n заключительную формулу $A_n \to B$ и включив в вывод соответствующие теоремы.

Так мы можем поступать после каждого применения принципа дедукции.

Нам остается показать, что МТ3 адекватна любой теории T в смысле следующей метатеоремы:

МТ4. (*Теорема адекватности*). *Утверждение* $\Gamma \,,\!, \quad A \to B$ *верно во всякой теории* T, *если и только если существует нормализованная последовательность* G *вывода* B *из гипотез* Γ *и* A, *которой соответствует нормализованное утверждение* $\Gamma, \uparrow A \,,\!, \quad B$.

Действительно, раз существует вывод $A \to B$ из Γ, его всегда можно нормализовать (МТ1). Конечной формулой последовательности нормализованного вывода будет $A \to B$. Добавив к этой последовательности две формулы: A (как гипотезу) и B (как результат *MP*), мы получим нормализованный вывод B из Γ и A, а значит требуемое $\Gamma, \uparrow A \,,\!, \quad B$. Обратное утверждение получается на основании МТ3. Таким образом, МТ4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сидоренко Е.А.* Нормализованные выводы и обобщение теоремы дедукции // Логические исследования, М.: Наука, 1998. Вып. 5. С. 101-118.
2. *Сидоренко Е.А.* О различных понятиях вывода из гипотез // Модальные и релевантные логики. М.: ИФ АН СССР, 1982.
3. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // М.: Наука, 1972.
4. *Смирнов В.А.* Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 54-68.
5. *Сидоренко Е.А.* Теорема дедукции для классических и неклассических

исчислений // Логические исследования. М.: Наука, 1993. Вып. 2. С. 128-138.
6. *Сидоренко Е.А.* Релевантная логика (Предпосылки, исчисления, семантика). М., 2000.