М.Н.Бежанишвили

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЙ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ ХАО ВАНА

Abstract. *The paper deals with the Hao Wang calculi of partial predicates* PP *and* EP. *It is shown that an analogue of the Craig interpolation theorem holds in* PP *and* EP.

Введение

Свою знаменитую интерполяционную теорему У.Крэйг доказал для классического исчисления предикатов [1]. Она гласит, что (a) для всякой классически доказуемой импликативной формулы $A \supset C$, если ⊨ и C имеют общие предикатные буквы, то существует такая формула ⊨, содержащая лишь те предикатные буквы, которые входят одновременно и в A и в ⊢, что классически доказуемы также формулы $A \supset B$ и $B \supset C$. Кроме того, (b) если A и C не имеют общих предикатных букв и $A \supset C$ доказуема, тогда доказуемы $\neg A$ или C. К.Шютте показал, что интерполяционная теорема справедлива также для интуиционистского исчисления предикатов [2]. Е.Расева установила аналоги этой теоремы для m-значных исчислений предикатов Э.Поста [3], а Л.Максимова дала полную характеристику как всех суперинтуиционистских пропозициональных логик, так и нормальных модальных пропозициональных логик, расширяющих S4, для которых справедлива теорема Крэйга [4,5]. Ссылки на работы, исследующие версии интерполяционной теоремы для других систем, можно найти в указанных выше статьях.

В настоящей работе рассматриваются исчисления частичных предикатов Хао Вана и для них устанавливается справедливость аналогов интерполяционной теоремы Крейга.

Исчисление частичных предикатов Хао Вана

В классическом исчислении предикатов **CP** и обычной теории множеств мы имеем дело только с полностью определенными предикатами и множествами. Естественным обобщением такого подхода Хао Ван считает привлечение к рассмотрению также частично определенных предикатов и множеств. Одной из возможных реализаций подобного обобщенного подхода является его исчисление частичных предикатов **PP** (см.[6]), которое Хао Ван считал хорошей основой для альтернативного способа устранения антиномий логики без введения типовых ограничений.

Алфавит PP содержит логические связки для отрицания, дизъюнкции и импликации Хао Вана: $\neg, \vee$ и $\rightarrow$, квантор существования $\exists$, неограниченные множества **Ind**: индивидных переменных, **Fun**: $n-$арных функциональных букв $(n \geq 0)$, **Prd**: $n-$арных предикатных букв $(n \geq 0)$. Знаки конъюнкции и квантора всеобщности $\wedge$ и $\forall$ вводятся с помощью обычных определений (алфавит **PP** может также содержать конкретные функциональные и предикатные знаки).

Термы (**Trm**) и атомарные формулы (**Atm**) определяются обычно.

Формулы (**Frm**) образуют такое наименьшее множество, что $\mathbf{Atm} \subseteq \mathbf{Frm}$ и если $x \in \mathbf{Ind}$, а A и B **-** не содержащие знака $\rightarrow$ формулы, то $\neg A,\ A \vee B,\ A \rightarrow B,\ \exists x A \in \mathbf{Frm}$. Заметим, что, согласно этому определению, ни одна формула не содержит итерации знака $\rightarrow$.

Интерпретация PP. $\neg$ и $\vee$ удовлетворяют трехзначным таблицам Лукасевича. $\Psi(\exists x A(x)) = t$ тогда и только тогда, когда $\Psi(A(x)) = t$ хотя бы для одного значения x; $\Psi(\exists x A(x)) = u$ тогда и только тогда, когда $\Psi(A(x)) \neq t$ ни для какого значения x и $\Psi(A(x)) = u$ хотя бы для одного значения x; $\Psi(\exists x A(x)) = f$ тогда и только тогда, когда $\Psi(A(x)) = f$ для всех значений x. Наконец, $\Psi(A \rightarrow B) = t$ тогда и только тогда, когда для всякого означивания Ψ всякий раз, когда $\Psi(A) = t$, имеем также $\Psi(B) = t$.

Отметим, что ни одна не содержащая знака $\to$ формула не является общезначимой.

Формулу будем называть контрадикцией, если она ни при каком означивании не принимает значения t.

Аксиомы PP имеют вид $A \to B$, где A и B - такие бескванторные формулы, что для всякого означивания Ψ, если $\Psi(A) = t$, то $\Psi(B) = t$.

Правила вывода PP

для введения кванторов:

$$\frac{A \to B(y)}{A \to \forall x B(x)}, \quad \frac{A \to B(s)}{A \to \exists x B(x)}, \quad \frac{B(y) \to A}{\exists x B(x) \to A}, \quad \frac{B(s) \to A}{\forall x B(x) \to A},$$

где $A, B \in$ **Frm**, $x, y \in$ **Ind**, $s \in$ **Trm** и y не входит свободно в A;

для сокращения сторон $\to$:

$$\frac{A \wedge A \wedge B \to C}{A \wedge B \to C}, \quad \frac{A \to B \vee B \vee C}{A \to B \vee C},$$

где $A, B, C \in$ **Frm**;

для протаскивания кванторов:

пусть $A, B, C, D \in$ **Frm**, $x \in$ **Ind** и x не входит свободно в B, а $C \equiv D$ означает, что замена подформулы C на D или D на C в любую теорему **PP** вновь дает нам теорему **PP**; тогда имеем:

$$\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x), \quad \neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x),$$

$$\exists x(A(x) \vee B) \equiv \exists x A(x) \vee B,$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \equiv \exists x A(x) \wedge B, \quad \forall x(A(x) \vee B) \equiv \forall x A(x) \vee B,$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \equiv \forall x A(x) \wedge B.$$

Хао Ван показал что **PP** является корректным и полным (т.е. для всякого Ψ, из $\Psi(A) = t$ следует $\Psi(B) = t$ тогда и только тогда, когда $A \to B$ является теоремой **PP**). Он также установил, что сечение является допустимым правилом **PP** и исследовал соотношение **PP** с **CP**. Кроме того, Хао Ван построил альтернативное по отношению к **PP** исчисление **EP**, которое отличается от **PP** лишь толкованием импликации: $\Psi(A \to B) = t$ в **EP** тогда и только тогда, когда для всякого означивания Ψ из $\Psi(A) = t$ следует $\Psi(B) = t$ и из $\Psi(A) = u$ следует

$\Psi(B) \neq f$ (язык, интерпретация, с только что указанным единственным отличием, и правила вывода для **EP** те же самые, что и для **PP**, а ограничительное условие аксиом **EP** соответствует интерпретации знака $\rightarrow$ в **EP**).

А.Роуз сформулировал независимую и полную систему аксиом для пропозиционального фрагмента **PP** и установил необходимое и достаточное условие доказуемости бескванторных формул в **PP** (ср. [7]).

Критерий Роуза для PP. Будем говорить, что бескванторная формула $A \rightarrow B$ удовлетворяет критерию Роуза, если для каждого такого дизъюнктивного члена C дизъюнктивной нормальной формы формулы A, который в качестве конъюнктивных членов не содержит ни одну атомарную формулу вместе с ее отрицанием, существует такой дизъюнктивный член D дизъюнктивной нормальной формы формулы B, что множество конъюнктивных членов D является подмножеством множества конъюнктивных членов C.

Аналоги теоремы Крейга для PP и EP

Пусть A - не содержащая знака $\rightarrow$ формула в предваренной нормальной форме, а Qy - такой квантор всеобщности (существования) префикса A, которому предшествуют n вхождений кванторов существования (всеобщности) $Qx_{i_1},\ldots,Qx_{i_n}$ $(n \geq 0)$. Тогда $[A^{\exists}]_{f_p^n}$ $([A^{\forall}]_{f_p^n})$ обозначает формулу получаемую из A вычеркиванием Qy и заменой всех связанных этим квантором всеобщности (существования) вхождений $s \to p$ в A термом $f_p^n(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$, где f_p^n - первый в алфавитном порядке $n-$арный функциональный знак, не входящий в A (при $n = 0$, все связанные квантором Qy вхождения переменной y меняются первой в алфавитном порядке констатой f_p^0, не входящей в A).

Если префикс предваренной формулы A не содержит квантора всеобщности (существования) Qy, тогда $[A^{\exists}]_{f_p^n}$ ($[A^{\forall}]_{f_p^n}$) просто совпадает с A.

Далее полагаем, что

$$[A^Q]_{f_{p_1}^{n_1}\dots f_{p_{k+1}}^{n_{k+1}}} = [[A^Q]_{f_{p_1}^{n_1}\dots f_{p_k}^{n_k}}]_{f_{p_{k+1}}^{n_{k+1}}}.$$

$[A^{\forall}]_{f_{p_1}^{m_1}\dots f_{p_k}^{m_k}} \to [B^{\exists}]_{g_{q_1}^{n_1}\dots g_{q_l}^{n_l}}$ будем называть результатом $\Pi\Sigma$-преобразования формулы $A \to B$, если ее левая сторона не содержит вхождений квантора существования, а правая сторона – вхождений квантора всеобщности. Если, к тому же, A и B - предваренные нормальные формулы, то результат $\Pi\Sigma$-преобразования $A \to B$ будем обозначать формулой $\Pi A' \to \Sigma B'$, где A' и B' - бескванторные части A и B, соответственно.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующими легко устанавливаемыми свойствами **PP (EP)**:

(1) Ни одна не содержащая знака $\to$ формула не является доказуемой в **PP (EP)**.

(2) Для любых A и B, $(A \wedge \neg A) \to B$ доказуема в **PP**.

(3) Если A и B - пропозициональные буквы и A отлична от B, то $(A \wedge \neg A) \to B$ не доказуема в **EP**.

(4) Если $A \to B$ и $B \to C$ доказуемы в **PP (EP)**, то $A \to C$ также доказуема в **PP (EP)**.

(5) Для любых $A \in \mathbf{Frm}$, $x \in \mathbf{Ind}$ $s \in \mathbf{Trm}$, формулы $\forall x A(x) \to A(s)$ и $A(s) \to \exists x A(x)$ доказуемы в **PP (EP)**.

(6) Навешивание кванторов всеобщности или существования над обеими сторонами доказуемой в **PP (EP)** формулы $A \to B$ вновь дает доказуемую в **PP (EP)** формулу (только порядок кванторов в обеих сторонах $\to$ должен быть одним и тем же).

(7) Если A и B - бескванторные формулы, а $A^{\#}$ и $B^{\#}$ - их дизъюнктивные нормальные формы, соответственно, то $A \to B$ доказуема в **PP (EP)** тогда и только тогда когда $A^{\#} \to B^{\#}$ доказуема в **PP (EP)**.

(8) Если A° и B° - предваренные нормальные формы формул A и B, соответственно, то $A \to B$ доказуема в **PP (EP)** тогда и только тогда, когда $A^{\circ} \to B^{\circ}$ доказуема в **PP (EP)**.

Исходя из (8), (5), (4) и (6), мы легко установим (ср., например, [9]) еще одно свойство

(9) Формула $A \to B$ доказуема в **PP (EP)** тогда и только тогда, когда $\Pi A' \to \Sigma B'$ доказуема в **PP (EP)**.

Для всякого $n>0$ мы каждому результату $\Pi\Sigma$-преобразования $\Pi A' \to \Sigma B'$ формулы $A \to B$ соотнесем множество термов $\mathbf{E}_n$**,** которое будем называть универсумом Эрбрана n-ой степени: $\mathbf{E}_1$ содержит все свободные индивидные переменные, входящие в формулу $\Pi A' \to \Sigma B'$, а в случае, когда последняя формула не содержит свободных индивидных переменных, $\mathbf{E}_1 = \{x\}$, где x - первая в алфавитном порядке индивидная переменная, не входящая в формулу $\Pi A' \to \Sigma B'$; $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n \cup \{h^m(s_1,...,s_m) : h^m \in \mathbf{Fun}$, входящая в $\Pi A' \to \Sigma B'$, $m \geq 0$, $s_1,...,s_m \in \mathbf{E}_n\}$, другими словами, $\mathbf{E}_{n+1}$ содержит все термы, принадлежащие $\mathbf{E}_n$**,** все константы формулы $\Pi A' \to \Sigma B'$, а также все образованные с помощью входящих в $\Pi A' \to \Sigma B'$ функциональных знаков термы, всевозможными аргументами которых являются элементы $\mathbf{E}_n$**.**

Заметим, что для всякой формулы A и всякого $n>0$ число термов, принадлежащих $\mathbf{E}_n$, конечно, так как любая формула является конечной последовательностью знаков и, следовательно, может содержать лишь конечное число термов (а конечные комбинации конечных множеств всегда дают конечные множества).

Теперь следующим образом определим раскрытие $\Re[A]$ n-ой степени формулы A ($n>0$):

$\Re[A] = A, \quad A \in \mathbf{Atm},$

$\Re[\neg A] = \neg\Re[A]$**,**

$\Re[A \vee B] = \Re[A] \vee \Re[B]$**,**

$\Re[A \to B] = \Re[A] \to \Re[B]$,

$\Re[\exists x A(x)] = \Re[A(s_1)] \vee ... \vee \Re[A(s_q)]$, где $s_1,...,s_q$ все термы, принадлежащие универсуму Эрбрана n-ой степени $\mathbf{E}_n$.

Из определений $\wedge$ и $\forall$ прямо следует, что

$\Re[A \wedge B] = \Re[A] \wedge \Re[B]$ и $\Re[\forall x A(x)] = \Re[A(s_1)] \wedge ... \wedge \Re[A(s_q)]$, где $s_1,...,s_q$ - все термы, принадлежащие $\mathbf{E}_n$ (ср. [8] и [9]). В дальнейшем мы будем интересоваться лишь раскрытиями n-ой степени формул вида: $\Pi A \to \Sigma B$. Из определения следует, что $\Re[\Pi A \to \Sigma B]$ является бескванторной формулой.

Следующие ниже утверждения мы будем явно формулировать только для исчисления **PP**.

Критерий Эрбрана-Роуза для PP. Будем говорить, что формула $A \to B$, где A и B - предваренные формулы, удовлетворяет критерию n-ой степени Эрбрана-Роуза, если критерию Роуза для **PP** удовлетворяет раскрытие n-ой степени формулы $\Pi A' \to \Sigma B'$, которая получается из $A \to B$ в результате ее $\Pi\Sigma$-преобразования, а A' и B' - бескванторные части A и B, соответственно.

Лемма 1. Бескванторная формула вида $A \to B$ является доказуемой в **PP** тогда и только тогда, когда она удовлетворяет критерию Роуза (ср. [7]).

Доказательство. Если бескванторная формула $A \to B$ удовлетворяет критерию Роуза, нетрудно убедиться, что для всякого означивания Ψ, всякий раз, когда $\Psi(A) = t$, то и $\Psi(B) = t$, т.е. $A \to B$ является аксиомой и, следовательно, она доказуема в **PP**.

А если $A \to B$ не удовлетворяет критерию Роуза, мы сможем так выбрать значения термов и предикатных букв, чтобы все атомарные формулы, входящие без знака отрицания в дизъюнктивные члены дизъюнктивной нормальной формы $A^{\#}$ формулы A в качестве конъюнктивных членов, получили значение t, а все атомарные формулы, входящие в дизъюнктивные члены $A^{\#}$ со знаком отрицания, получили значение f. Но так как каждый дизъюнктивный член дизъюнктивной нормальной формы $B^{\#}$ формулы B в таком случае в качестве конъюнктивных членов содержит атомарные формулы или отрицания атомарных формул, которые не входят в $A^{\#}$, им можно будет придать значение u и тогда формула $A \to B$ окажется ложной. ■

Лемма 2. Если раскрытие $\Re[\Pi A' \to \Sigma B']$ n–ой степени формулы $\Pi A' \to \Sigma B'$ удовлетворяет критерию Роуза для **PP**, то формула $\Pi A' \to \Sigma B'$ доказуема в **PP**.

Доказательство. Если условие леммы выполняется, то согласно лемме 1, $\Re[\Pi A' \to \Sigma B']$ является аксиомой и поэтому доказуема в **PP**. Но тогда мы сможем навесить надлежащие кванторы на стороны бескванторной формулы $\Re[\Pi A' \to \Sigma B']$, которая имеет вид

$$\Re[[\forall x_2 ... \forall x_w A(s_1, x_2, ...,]_{f_{p_1}^{m_1} ... f_{p_k}^{m_k}}] \wedge ... \wedge \Re[[\forall x_2 ... \forall x_w A(s_r, x_2, ..., x_w)]_{f_{p_1}^{m_1} ... f_{p_k}^{m_k}}] \to$$

$$\Re[[\exists y_2 ... \exists y_v B(s_1, y_2, ..., y_v)]_{g_{q_1}^{n_1} ... g_{q_l}^{n_l}}] \vee ... \vee \Re[[\exists y_2 ... \exists y_v B(s_r, y_2 ..., y_v)]_{g_{q_1}^{n_1} ... g_{q_l}^{n_l}}]$$

где $s_1, ..., s_r \in \mathbf{E}_n$, и соответствующим образом протащить их во внутрь с помощью правил для введения и протаскивания кванторов, а затем, пользуясь правилами для сокращения сторон $\to$, постепенно устранить все возникшие ненужные повторяемые конъюнктивные и дизъюнктивные члены. Таким образом на определенном шаге мы выведем формулу

$$[\forall x_2 ... \forall x_w A(s_1, x_2, ...,]_{f_{p_1}^{m_1} ... f_{p_k}^{m_k}} \wedge ... \wedge [\forall x_2 ... \forall x_w A(s_r, x_2, ..., x_w)]_{f_{p_1}^{m_1} ... f_{p_k}^{m_k}} \to$$

$$[\exists y_2 ... \exists y_v B(s_1, y_2, ..., y_v)]_{g_{q_1}^{n_1} ... g_{q_l}^{n_l}} \vee ... \vee [\exists y_2 ... \exists y_v B(s_r, y_2 ..., y_v)]_{g_{q_1}^{n_1} ... g_{q_l}^{n_l}}$$

и, проделав то же самое с ней, сперва получим

$$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_w A(x_1, x_2, ..., y_v) \wedge ... \wedge \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_w A(x_1, x_2, ..., x_w) \to$$

$$\exists y_1 \exists y_2 ... \exists y_v B(y_1, y_2, ..., y_v) \vee ... \vee \exists y_1 \exists y_2 ... \exists y_v B(y_1, y_2 ..., y_v),$$

а затем, устранив все повторения, выведем желаемую формулу

$$\forall x_1 ... \forall x_w A(x_1, ..., x_w) \to \exists y_1 ... \exists y_v B(y_1, ..., y_v),$$

т.е. $\Pi A' \to \Sigma B'$. ■

Теорема 1. Формула $A \to B$ доказуема в **PP** тогда и только тогда, когда существует такое число $n \geq 1$, что $A \to B$

удовлетворяет критерию n-ой степени Эрбрана-Роуза (теорема Эрбрана для **PP**).

Доказательство. Справедливость импликации справа налево прямо следует из предыдущей леммы. Для получения обратной импликации, заметим, что аксиомы **PP** общезначимы, а правила вывода, как легко можно убедиться, сохраняют общезначимость. Следовательно, если $A \to B$ доказуема в **PP**, то она общезначима. Поэтому достаточно показать, что если формула $A \to B$ не удовлетворяет критерию Эрбрана-Роуза ни для какого $n \geq 1$, то она не общезначима. Согласно свойству (9), мы без ограничения общности можем предположить, что $A \to B$ имеет вид $\Pi A' \to \Sigma B'$.

Итак, пусть формула $A \to B$ имеет вид $\Pi A' \to \Sigma B'$ и она не удовлетворяет критерию Эрбрана-Роуза ни для какого $n \geq 1$. Но тогда ее раскрытие $\Re[\Pi A' \to \Sigma B']$ n-ой степени ни для какого $n \geq 1$ не будет удовлетворять критерию Роуза.

Рассмотрим универсумы Эрбрана n-ой степени $(n \geq 1)$ для нашей формулы $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n, \ldots$ и попытаемся опровергнуть $\Pi A' \to \Sigma B'$ в их объединении $\mathbf{E} = \bigcup_{i \in \omega} \mathbf{E}_i$. Очевидно, что $\mathbf{E}$ счетно (т.к. оно является бесконечным объединением конечных множеств) или конечно.

Условимся также, что для всякого $n \geq 1$ $(\Re[\Pi A' \to \Sigma B'])^{\#}$ обозначает дизъюнктивную нормальную форму раскрытия n-ой степени формулы $\Pi A' \to \Sigma B'$.

Теперь, каждой свободной индивидной переменной x соотнесем значение $x \in \mathbf{E}$, каждому функциональному знаку f^m функцию $\mathbf{f^m}$, отображающую m-ки термов $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}$ из $\mathbf{E}$ в термы вида $f^m(s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}) \in \mathbf{E}$, и каждой предикатной букве P^m - предикат $\mathbf{P^m}$, принимающий значение t для m-ки термов $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}$ из $\mathbf{E}$, если для некоторого $n \geq 1$ $P^m(s_{i_1}, \ldots, s_{i_m})$ входит в раскрытие $(\Re[\Pi A'])^{\#}$ n-ой степени без знака отрицания, принимает значение f, если $P^m(s_{i_1}, \ldots, s_{i_m})$ входит в раскрытие

$(\Re[\Pi A'])^{\#}$ n-ой степени со знаком отрицания, и, наконец, принимает значение u, если для некоторого n $P^m(s_{i_1},...,s_{i_m})$ входит в раскрытие $(\Re[\Sigma B'])^{\#}$ n-ой степени со знаком отрицания или без него, но ни для какого n $P^m(s_{i_1},...,s_{i_m})$ не является конъюнктивным членом дизъюнктивного члена раскрытия $(\Re[\Pi A'])^{\#}$ n-ой степени.

Индуцируя такое означивание на все формулы, мы сможем построить контрмодель для формулы $\Pi A' \to \Sigma B'$ и доказать, что она опровержима в ней. ■

Следствие. Для любой доказуемой в **PP** предваренной формулы вида $\Pi A \to \Sigma B$ существует такая доказуемая в **PP** бескванторная формула (являющаяся на самом деле ее аксиомой), из которой можно вывести $\Pi A \to \Sigma B$, пользуясь только лишь свойствами (4), (5), (6) исчисления **PP,** а также правилами для протаскивания кванторов и сокращения сторон $\to$.

Доказательство. Если $\Pi A \to \Sigma B$ доказуема в **PP**, тогда, согласно теореме 1, существует такое число $n \geq 1$, что раскрытие $\Re[\Pi A \to \Sigma B]$ n-ой степени формулы $\Pi A \to \Sigma B$ является аксиомой **PP**. А из нее способом доказательства леммы 2 мы легко сможем вывести $\Pi A \to \Sigma B$, пользуясь лишь свойствами (4), (5), (6) **PP** и правилами для протаскивания кванторов и сокращения сторон импликации Хао Вана. ■

Теорема 2. Для всякой доказуемой в **PP** формулы $A \to C$ (a) если A и C имеют по крайней мере одну общую предикатную букву, то существует формула B, содержащая лишь те предикатные буквы, которые входят одновременно в A и C, такая, что в **PP** доказуемы формулы $A \to B$ и $B \to C$; (b) если же A и C не содержат общих предикатных букв и в **PP** доказуема $A \to C$, то A является контрадикцией (интерполяционная теорема для **PP**).

Доказательство. (a) Сначала рассмотрим случай когда A и C - бескванторные формулы. В силу свойства (7) мы без ограничения общности можем предположить, что они являются дизъюнктивными нормальными формулами. Пусть A имеет вид

$\bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$, а C - вид $\bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=1}^{l_i} R_{ij}$, где все P_{ij} и R_{ij} являются атомарными формулами или отрицаниями атомарных формул. По условию теоремы формула $A \to C$, т.е. $\bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij} \to \bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=1}^{l_i} R_{ij}$, доказуема в **PP**, но тогда, согласно лемме 1, формула $\bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij} \to \bigcup_{i=1}^{k}\bigcap_{j=1}^{l_i} R_{ij}$ удовлетворяет критерию Роуза и поэтому для каждого дизъюнктивного члена $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ $(1 \le i \le m)$ формулы A, который в качестве конъюнктивных членов не содержит ни одной атомарной формулы вместе с ее отрицанием, существует дизъюнктивный член $\bigcap_{j=1}^{l_i} R_{ij}$ $(1 \le i \le k)$ формулы C, такой, что множество его конъюнктивных членов является подмножеством множества конъюнктивных членов дизъюнктивного члена $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ $(1 \le i \le m)$ формулы A. Теперь в качестве B мы можем выбрать формулу, получаемую из A, если из каждого дизъюнктивного члена $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ формулы A вычеркнем все такие его конъюнктивные члены P_{ij}, которые содержат не входящую в C предикатную букву, за исключением случая, когда $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ в качестве конъюнктивных членов не содержит атомарной формулы и ее отрицания с не входящей в C предикатной буквой. Если же $\bigcap_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ содержит атомарную формулу и ее отрицание с не входящей в C предикатной буквой, то последнюю мы можем заменить в них на любую предикатную букву, входящую в C. Нетрудно проверить, что формулы $A \to B$ и $B \to C$ будут удовлетворять критерию Роуза. Поэтому, согласно лемме 1, они доказуемы в **PP**.

Для рассмотрения общего случая, в силу свойства (9), мы без ограничения общности можем предположить, что формула $A \to C$ имеет вид $\Pi A' \to \Sigma C'$, где A' и C' - бескванторные части A и C, соответственно. По условию теоремы формула $A \to C$, т.е. $\Pi A' \to \Sigma C'$ доказуема в **PP**. Но тогда согласно следствию теоремы Эрбрана, существует вывод формулы $\Pi A' \to \Sigma C'$ из некоторой бескванторной доказуемой формулы $D \to F$, в котором используются только лишь вышеуказанные свойства (4), (5), (6) и правила для протаскивания кванторов и сокращения сторон $\to$. При этом D есть некоторое раскрытие $\Re[\Pi A']$ формулы $\Pi A'$, а F - раскрытие $\Re[\Sigma C']$ формулы $\Sigma C'$. Согласно утверждению нашей теоремы, которую мы уже доказали для бескванторных формул, существует формула E, содержащая лишь те предикатные буквы, которые входят одновременно в D и F, такая, что в **PP** доказуемы формулы $D \to E$ и $E \to F$. Но тогда, с помощью свойства (9), а также правил для протаскивания кванторов и сокращения сторон $\to$, мы сможем вывести формулу $\Pi A' \to \Pi E$, а с помощью свойств (4), (5), (6) и правил для протаскивания кванторов и сокращения сторон $\to$, - формулу $\Pi E \to \Sigma C'$. Ясно, что ΠE будет содержать лишь те предикатные буквы, которые входят одновременно в $\Pi A'$ и $\Sigma C'$. Поэтому она и сможет выполнять роль интерполянты B.

(b) Если бескванторные формулы A и C не имеют общих предикатных букв, то очевидно, что формула $A \to C$ может удовлетворять критерию Роуза для **PP** (и, следовательно, быть доказуемой в **PP**) в том и только в том случае, когда A является контрадикцией. Для случая же, когда A является кванторной формулой, справедливость нашего утверждения при любом C устанавливается с помощью правил для введения кванторов. ■

Учитывая особенности **EP** и надлежащим образом трансформируя критерий Роуза для **EP**, аналогичным способом можно показать, что утверждение (a) интерполяционной теоремы имеет силу и для **EP**, а утверждение (b) будет справедливо для

EP лишь в том случае, если A является контрадикцией, а C - классической тавтологией.

Литература

1. *Craig W.* Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorems, Journal of Symbolic Logic, **22** (1957), 250-268.
2. *Schutte K.* Der Interpolationssatz der intuitionistischen *Prädikatenlogik*, Mathematische Annalen, **148** (1962), 192-200.
3. *Rasiowa H.* The Craig interpolation theorem for m-valued predicate calculi, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, **20** (1972), 341-346.
4. *Максимова Л.Л.* Теорема Крэйга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия алгебр // Алгебра и логика, **16**, N6 (1977), 643-681.
5. *Максимова Л.Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика, **18**, N5 (1979), 556-586.
6. *Wang H.* The calculus of partial predicates and its extension to set theory I, Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **7** (1961), 283-288.
7. *Rose A.* A formalization of the propositional calculus corresponding to Wang's calculus of partial predicates // Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **9** (1963), 177-198.
8. *Herbrand J.* Recherches sur la theorie de la demonstration // Travaux de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III sciences mathematiques et physique, no. **33** (1930), 128 pp. (английский перевод: Investigations in proof theory, с комментариями и исправлением одной леммы см. в Herbrand, Logical Writings, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1971, 44-202).
9. *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagen der Mathematik II // Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1970 (рус. пер.: Основания математики II. Наука, Москва, 1982).