Лео Эсакиа

СИНОПСИС ТЕОРИИ ФРОНТОНОВ

Abstract. *We describe an augmentation of Intuitonistic propositional Logic by a modal operator admiting provability interpretation (Box-as-Proof modality). We do not intend to give a systematic survey, but were a short selection of attractive (algebraic, relational, topological and categorical) features of the modalized Heyting Calculus. We discuss also an enrichment of the Heyting Calculus by temporal modalities Always and Before, extending the expressive power of the Calculus.*

К сожалению, автору не удалось избежать эскизности изложения, в силу чего нижеследующий текст воспринимается как синопсис. Кроме того, заранее следует признаться, что представленный материал может быть, не без основания, признан не более чем “дифирамбом” двум специальным системам интуиционистской модальной логики.

Нам представляется, что настоящим интуиционистским “компаньоном” классической модальной системы $K4$ является исчисление Гейтинга HC, обогащенное модальным оператором $\Box$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

(a) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$;

(b) $p \to \Box p$;

(c) $\Box p \to (q \vee (q \to p))$.

Полученное исчисление мы будем называть *модализированным исчислением Гейтинга* mHC и склонны считать базисной интуиционистской модальной логикой, по крайней мере, для исследований доказуемостной направленности. Постулирование формулы

(d) $(\Box p \to p) \to p$ (“принцип Леба”)

в качестве дополнительной аксиомы приводит к известной *доказуемостно-интуиционистской* логике Кузнецова-Муравицкого (KM) (см. [1],[2]), в которой модальность $\Box$, являясь “посланцем” классики, выражает предикат доказуемости классической (не интуиционистской!) арифметики Пеано. Заметим, что почти во всех известных автору “стандартных” интуиционистских модальных системах постулат (c) не встречается; постулат (b) – не типичен, а потулат (d) еще более оттеняет “нестандартность” выбранной базисной системы mHC и ее расширения KM, что позволяет провести условную “демаркационную линию” между mHC и стандартными интуиционистскими модальными логиками. Здесь же уместно вспомнить, что аксиомы классической модальной системы $K4$ (и тем самым ее интуиционистского компаньона mHC) "выражают" при доказуемостной интерпретации модальности $\Box$ известные условия Гильберта-Бернайса для предиката доказуемости, а дополнительное постулирование принципа Леба

$$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$$

дает нам классическую систему доказуемостной логики Геделя-Леба GL, имеющую (как впрочем и KM) адекватную арифметическую интерпретацию [3].

Отметим также замечательный изоморфизм между решетками расширений логики KM и расширений системы GL, установленный Кузнецовым и Муравицким. Это важное соответствие между KM и GL "проходит" через модальную систему Гжегорчика Grz, которую можно считать модернизацией соответствующих "классических" систем $S4$ и $K4$, полученной применением современной версии аристотелевского Принципа Абсолюта (здесь же отметим, что подробная информация об этих модальных системах, включающая как синтаксические, так и семантические аспекты, в частности упоминаемое ниже понятие дескриптивного фрейма, содержится в обширном руководстве [4]). Как известно, при семантическом рассмотрении систем Grz и GL (причислим к ним и KM) решающую роль в моделях Крипке играют максимальные (привилегированные "абсолютные") точки. Здесь мы с удовольствием процитируем замечательного голландского ученого Эверета Бета [5]. На странице 9, под рубрикой "Аристотелевский Принцип Абсолюта", Бет пишет:

"*A considerable number of arguments in speculative philosophy are based on a certain principle, which is, in most cases, tacitly assumed. This principle has been applied with remarkable virtuosity by Aristotle, and will be called the Principle of the Absolute. It can be stated as follows:* Suppose *we have entities* u *and* v, *and let* u *have to* v *the relation* F *; then there is an entity* f, *which has the following property: for any entity* x *which is distinct from* f, *we have* (I) x *has the relation* F *to* f, *and* (II) f *has not the relation* F *to* x. *The entity* f *will be called the* absolute entity *corresponding to the relation* F ".

Несколькими строками ниже приведены типичные применения зтого принципа:

"(1) Let $F(x, y)$ be the phrase: x *takes its origin from* y; then f will be the principle ($\grave{\alpha}\rho\chi\eta'$) in the sense of pre-Socratic philosophy. (2) Let $F(x, y)$ be the phrase: x *is moved by* y; then f will be the *Prime Mover* in the sence of Aristotle. (3) Let $F(x, y)$ be the phrase: x *is desired for the sake of* y; then f will be the *summum bonum* in the sense of Aristotle".

Несколько ниже (стр.12) Бет замечает:

"It is interesting to note that Plato's Theory of Ideas can be derived from the Principle of the Absolute"

и, наконец (стр.14):

"Modern logic has no difficulty in showing that Plato's Principle of the Idea, if handled adequately, does not, intrinsically, give rise to any logical difficulties. As a matter of fact, the (weak) $\varepsilon -$axiom which was introduced by Hilbert can be interpreted as a new version of this principle".

Вспомним, что если $A(x)$ формула со свободной переменной x, то $\varepsilon_x A$ "изображает *привилегированный* объект, обладающий этим свойством; в противном случае $\varepsilon_x A$ изображает предмет, о котором ничего нельзя сказать" [6, стр. 36].

Если мы хотим "сохранить" соответствие (см.выше) между доказуемостными системами KM, Grz, GL и на предикатном уровне, то нам придется ввести некоторую поправку к обычному исчислению предикатов Гейтинга QHC, а именно *модифицированное* интуиционистское исчисление $Q^{+}HC$ [7] получается из обычного QHC постулированием следующей усиленной версии правила обобщения:

$$(+) \quad \vdash (p(a) \to \forall x p(x)) \to p(a) / \vdash \forall x p(x)$$

Для оправдания этой поправки воспользуемся, следуя Бету, современной версией Принципа Абсолюта. Заметим, что стандартное правило обобщения

$$\vdash p(a) / \vdash \forall x p(x)$$

позволяет нам получить универсальное утверждение $\forall x p(x)$, коль скоро установлено $p(a)$ для произвольного (но привилегированного?) объекта (=Arbitrary Object, см. [8]). Мы "слегка" ослабляем посылку правила $p(a)$, заменяя ее на (классически равносильную ей) формулу

$$(p(a) \to \forall x p(x)) \to p(a)$$

наделяя тем самым объект a некоторыми чертами "абсолюта" или, в нашем случае, "пандемичности": коль скоро объект a обретет свойство p, наступает "пандемия" и *все* объекты обретают то же свойство. Заметим, что при переходе к стандартному кванторному расширению QKM доказуемостно-интуиционистской логики KM нам приходится считаться с поправкой (+), поскольку, как нетрудно убедиться, она становится производным правилом в QKM (как, впрочем, и в ее "безмодальном", чисто интуиционистском фрагменте). "Спустимся", однако, на пропозициональный уровень к нашим “нестандартным” системам интуиционистской модальной логики.

Нам представляется, что модализированное исчисление Гейтинга mHC (и в не меньшей степени KM) интересно не только с точки зрения доказуемостной интерпретации, но и своими связями с

●) “интуиционистской” прототетикой Лесневского;

●) топологией: разреженные пространства Кантора, понятия предельной и изолированной точек;

●) категорной логикой: топосы, классификатор (= объект истинностных значений) которых (внутренне образуя алгебру Гейтинга), как выясняется, всегда снабжен модальностью □ mHC – типа;

●) интуиционисткой темпоральной логикой “Always & Before”, обладающей богатыми выразительными средствами;

●) некоторыми аспектами гёделева погружения интуиционистской логики в классическую модальную логику и ее “обращения”, так называемой FF (= Flagg-Friedman) – трансляцией;

●) понятием “новизны” связок в интуиционистской логике в смысле Новикова.

Хочется надеется, что комментарии к этим пунктам (хотя и эскизные) позволят ощутить привлекательность и полезность такого “нестандартного” варианта интуиционистской модальной логики.

Вспомним, что *расширенное* пропозициональное исчисление Рассела (см. [9, § 28]) допускает помимо средств обычного классического пропозиционального исчисления квантификацию по пропозициональным переменным. Интуиционистская версия этого исчисления, именуемая пропозициональным исчислением Гейтинга II порядка H^2C (впрочем, как и интуиционистская версия Прототетики Лесневского), была предметом пристального рассмотрения, начиная с 50-х годов (Schütte-50, Löb-76, Prawitz-70, Gabbay-74, Sobolev-77, Kreisel-81, Troelstra-81, etc) вплоть до наших дней (Pitts-92, Kramer-97, Skvortsov-97, Polacik-98). Ввиду определимости модального оператора □ системы mHC средствами H^2C (и, тем более, интуиционистской Прототетики) можно отождествить наше исчисление Гейтинга mHC с определенным *фрагментом* исчисления Гейтинга II порядка и, следовательно, воспринимать модальность □ как оператор, “внутренне” присущий интуиционистскому исчислению.

Алгебраические и топологические модели

Определение 1. Алгебру Гейтинга H, снабженную мультипликативным оператором $\Box$, подчиненным условиям:

(1) $p \leq \Box p$;

(2) $\Box p \leq q \vee (q \to p) \qquad (p, q \in H)$,

назовем *топологической алгеброй Гейтинга* (или, ради краткости, *префронтоном*); класс префронтонов tHA образует алгебраическую семантику исчисления mHC. Подмногообразие *фронтонов* FR, выделяемое "тождеством Лёба":

$$\Box p \to p \leq p,$$

соответсвует доказуемостно-интуиционистскому исчислению KM. Здесь же отметим, что исчисление KM финитно-аппроксимируемо [10] и допускает секвенциальную формулировку без правила сечения [11]. Из предложенной в работе [12] формулировки систем mHC и KM в виде исчислений таблиц Бета (= Tableau Calculus) следует их разрешимость и свойство древовидности моделей.

Вспомним, что топологическое пространство X является $T_{1/2}$ – пространством, если любая его точка x (точнее, синглетон $\{x\}$) является пересечением подходящих открытого и замкнутого множеств.

Пусть X $T_{1/2}$ – пространство, тогда алгебра Гейтинга всех его открытых множеств $H(X)$ с оператором $\Box$, дуальным к операции, сопоставляющей множеству A множество $\lim A$ всех его *предельных* точек, образует топологическую алгебру Гейтинга; заметим, что этот пример типичен: каждая топологическая алгебра Гейтинга вложима в такую алгебру Гейтинга $H(X)$ для подходящего $T_{1/2}$ – пространства X.

Пространство X называется *разреженным* (Кантор), если оно не имеет непустых плотных подмножеств; известно, что каждый ординал является разреженным пространством в своей внутренней, интервальной топологии. Топологическая алгебра Гейтинга над пространством X является *фронтоном*, если и только если пространство X *разрежено*; особо отметим, что фронтон $H(\alpha)$ над любым ординалом α ($\omega^{\omega} \leq \alpha$) является *адекватной* алгебраической моделью исчисления KM.

В произвольном топосе (т.е. в категорном универсуме интуиционистской математики) классификатор (= объект истиностных значений) Ω, внутренне образуя алгебру Гейтинга, является предфронтоном, что позволяет интерпретировать в топосе, кроме обычных интуиционистских связок и кванторов, также и *модальный оператор* $\Box$. Топосы, классификатор которых является фронтоном, так называемые *разреженные топосы* [13], являются категорными моделями кванторного расширения QKM доказуемостно-интуиционистской логики KM .

Вернемся к многообразию префронтонов tHA. Скажем, что переменная p, входящая в полином f, *боксирована*, если все вхождения переменной p в f находятся в сфере действия оператора $\Box$. Пусть $(H,\vee,\wedge,\to,\bot,\Box)$ – префронтон и $f(p)$ – полином, содержащий переменную p; скажем, как обычно, что полином обладает *неподвижной точкой*, если найдется элемент $a \in H$ такой, что $f(a) = a$. Важную характеристику фронтонов выражает

Утверждение 1. Префронтон $(H,\Box)$ является фронтоном, если и только если каждый *боксированный* полином обладает неподвижной точкой в H .

Нетрудно убедиться, что любая алгебра Гейтинга H может быть “превращена” в префронтон: снабдим алгебру H тривиальным оператором $\Box$, положив $\Box a = 1$ для любого $a \in H$. Однако иначе обстоит дело с фронтонами!

Скажем, что алгебра Гейтинга H является *фронтальной*, если существует оператор $\Box\colon H \to H$ такой, что $(H,\Box)$ – фронтон.

Для любого элемента a алгебры Гейтинга H рассмотрим семейство $F_a = \{b \in H : b \to a \le b\}$; несложно убедиться, что F_a образует фильтр алгебры H. Внутреннюю характеристику фронтонов выражает

Утверждение 2. Алгебра Гейтинга H является фронтоном, если и только если каждый фильтр F_a ($a \in H$) – главный.

Все конечные алгебры Гейтинга, все алгебры Гейтинга над фундированными фреймами Крипке, все топологические алгебры Гейтинга, полученные из разреженных пространств (и, следовательно, из ординалов!) являются фронтальными. Однако существуют и *не* фронтальные алгебры! Заметим, что хотя лестница Ригера-Нишимуры (= свободная циклическая алгебра Гейтинга) является фронтальной (каждый фильтр F_a – главный), существуют свободные, конечно-порожденные *не*-фронтальные алгебры Гейтинга. Тем не менее *каждая* промежуточная (= суперинтуиционистская) логика характеризуется своими фронтальными алгебрами. Точнее, алгебраическая переформулировка замечательного результата Кузнецова [1] лежит в основе

Утверждения 3. Каждое многообразие алгебр Гейтинга порождается своими фронтальными алгебрами.

Пользуюсь случаем выразить благодарность моему коллеге и другу, профессору Алексею Муравицкому за “электронные” дискусии на эту тему.

Реляционная семантика - транзиты

Фрейм Крипке $(W,<)$ назовем *транзитом*, если отношение $<$ является

(a) транзитивным и

(b) его рефлексивное замыкание $\leq$ (т.е. $x \leq y \iff x = y$ или $x < y$) является частичным порядком.

Таким образом, любой транзит "автоматически" порождает обычный интуиционистский фрейм Крипке $(W,\leq)$, причем отношение достижимости $<$ отличается от $\leq$ лишь отсутствием рефлексивных "петель" в некоторых точках множества W. В определении форсинга $\vDash$ отметим два характерных случая:

$$x \vDash p \to q \quad iff \quad (\forall y)(x \leq y \quad \& \quad y \vdash p \quad \Rightarrow \quad y \vDash q);$$
$$x \vDash \Box p \qquad iff \quad (\forall y)(x < y \quad \Rightarrow \quad y \vDash p).$$

Модифицированное исчисление Гейтинга mHC характеризуется классом транзитов (и даже классом *иррефлексивных* транзитов, т.е. таких, в которых отношение $<$ – иррефлексивно). Доказуемостно-интуиционистская логика KM дополнительно требует *фундированности* транзитов (т.е. обрыва возрастающих цепей).

Пусть $(W,<)$ – транзит, A – произвольный конус (т.е. $x \in A$ и $x \leq y$ влекут $(+)$); действие модального оператора $\Box$ на A может быть описано следующим образом:

$$\Box A = A \cup \max(W - A),$$

где знак "–" обозначает теоретико-множественную операцию разности двух множеств, а $\max B$ обозначает множество всех *максимальных точек* множества B, т.е. $x \in \max B$, если не существует точки $y \in B$ такой, что $x < y$.

Таким образом, каждому конусу A оператор $\Box$ "пристраивает" в качестве "архитектурного" фронтона множество максимальных точек его дополнения. Такое "поведение" модального оператора инспирировало нашу "фронтальную" терминологию.

Заметим, что в фундированных транзитах для любого собственного конуса A множество $\max(W-A)$ не пусто и $\Box A$ является "законченным" (не частичным) фронтоном конуса A.

Несколько слов о канонических (= дескриптивных) фреймах. Пусть $(H,\Box)$ – произвольный префронтон, а $(W,\subseteq)$ – дескриптивный фрейм алгебры Гейтинга H, т.е. W – множество всех простых фильтров алгебры H, упорядоченное отношением включения $\subseteq$. Опираясь на аксиомы mHC, несложно убедиться, что дополнительное отношение $<$, индуцированное на W модальным оператором $\Box$, а именно отношение

$$x < y \iff (\forall p \in H)(\Box p \in x \quad \Rightarrow \quad p \in y)$$

удовлетворяет следующим условиям:

(1) Если $x < y$, то $x \subseteq y$ и

(2) Если $x \subset y$ (т.е. $x \subseteq y$ и $x \neq y$), то $x < y$,

(3) Рефлексивное замыкание отношения $<$ совпадает с отношением включения $\subseteq$.

Таким образом, в канонических фреймах "модальное" отношение достижимости $<$ получается из отношения включения $\subseteq$ удалением петель с некоторых точек из W.

Темпоральная интуиционистская логика

Будем считать, как обычно, что оператор $\Diamond$ на решетке Гейтинга H *сопряжен* с оператором $\Box$, если для любых элементов $a, b \in H$:

$$\Diamond a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \Box b$$

и заметим, что существование сопряженного влечет его единственность. Примем следующее

Определение 2. Алгебру Гейтинга $(H, \Box, \Diamond)$, снабженную операторами $\Box, \Diamond$, назовем *завершенным* префронтоном, если $(H, \Box)$ – префронтон и оперетор $\Diamond$ сопряжен с $\Box$.

В соответствующих обогащенных исчислениях (пометим их звездочками: mHC^* и KM^*) сопряженные операторы $\Box$ ("Always") и $\Diamond$ ("Before") имеют явный "привкус" темпоральных (временных) связок. Скажем, при "темпоральном прочтении" семантики Крипке $(W, <, \models)$ определение форсинга $\models$ выглядит следующим образом:

(1) $x \models \Box p \quad iff \quad (\forall y)(x < y \quad \Rightarrow \quad y \models p)$, т.е. в дальнейшем всегда будет $p \quad (Always(p))$; для сопряженного оператора имеем:

(2) $x \models \Diamond p \quad iff \quad (\exists y)(y < x \quad \& \quad y \models p)$, т.е. уже имеется прецедент $p \quad (Before(p))$.

Темпоральное обогащение mHC^* системы mHC, являющееся некоторой разновидностью интуиционистской временной логики, характеризуется древовидными моделями Крипке и, тем самым, исчисление mHC^* (впрочем, как и KM^*) обладает *свойством древовидности* (="the tree model property"); воспользуемся цитатой:

"Q: But why do you say that the tree model property is more important than the finite model property?

A: The tree model gives us powerful tools for proving decidability results and for constructing efficient decision procedure" [14, p. 96].

В связи с компьютерными применениями классических темпоральных логик с операторами, отсылающими к "прошлому", отметим работу [15], в которой подчеркнуто богатство выразительных средств таких логических систем. Мы же ограничимся несколькими замечаниями. В исчислениях mHC^{*} и KM^{*} выразимы некоторые полезные свойства как самих точек (стадий) семантики Крипке, так и глобальные свойства, связанные, например, с "пропозициональной" выразительностью в этих исчислениях принципа *возвратной индукции* в варианте "метода бесконечного спуска" [16, стр. 175]:

$$\vdash p \to \Diamond p \,/\, \vdash \neg p.$$

Точка $x \in W$ дескриптивной модели Крипке $(W, <, \models)$ называется *p-критической*, если на стадии x формула p *не* форсируется, однако $(\forall y)(x < y \;\Rightarrow\; y \models p)$; скажем, что точка x (= простой фильтр или, если угодно, простая интуиционистская теория) является *критической*, если она p-критическая для некоторой пропозициональной формулы p.

"Сопряженным" свойством является свойство *креативности* [17]. Скажем, что точка $x \in W$ p-креативна, если $x \models p$, однако ни на какой более ранней стадии y (т.е. $y < x$) формула p *не* форсировалась. Таким образом, точка *x*-креативна, если на стадии x был установлен по крайней мере один новый факт. В терминах сопряженной модальности $\Diamond$ это выражается следующим образом: точка *x*-креативна, если на стадии x не только установлена некоторая формула p (т.е. $x \models p$), но и обнаружена ее *беспрецедентность* (т.е. неверно, что $x \models \Diamond p$).

В общем случае, не все точки модели являются критическими или креативными. Так, например, креативность линейно упорядоченной модели влечет ее вполне упорядоченность. Тем не менее, всегда имеется "достаточное количество" критических и креативных точек в дескриптивных моделях W исчисления KM^{*}: множество W_0 - всех критических точек модели W - топологически *всюду плотно* в W и они расположены "порядково представительно", т.е. множество критических точек любого открыто-замкнутого (= формульного) множества *конфинально* лежит в нем.

Как известно, глделево погружение интуиционистской пропозициональной логики в классическую модальную логику было расширено на логику предикатов (Rasiowa-Sikorski – 53) и в дальнейшем была показана погружаемость интуиционистской арифметики (Goodman, 84), интуиционистских теории типов и теории множеств (Scedrov, 85) в соответствующие классические модальные теории. Далее, был обнаружен *единый* метод доказательства погружаемости (Flagg, Friedman, 86), основанный на теореме Фунаяма. В трансляции FF используется "релятивизация" негативной интерпретации, допускающая преобразование формулы p не только в $((p \to \perp) \to \perp)$ $(= \neg\neg p$, “сдвоенная кочерга”), но и в формулу $(p \to s) \to s$ с произвольным параметром s вместо $\perp$. Таким образом, трансляция FF основана на главных нуклонах $w_s(p) = (p \to s) \to s$ (Fourmann, Scott – 79). Любопытно, что в случае доказуемостно-интуиционистской логики KM в FF преобразовании нуклон $w_s(p)$ можно заменить на “условную” импликацию $\Box s \to p$, понимая преобразование FF как замену “безусловного” высказывания p на “условное” $\Box s \to p$: “ p следует из установленного факта s ”.

В заключение, отослав за подробностями к интересному исследованию проблемы Новикова [18], заметим, что примером *полной по Новикову* логики с “новой интуиционистской связкой” является расширение доказуемостно-интуиционистской логики KM, полученное постулированием формулы

$$\Box\Box p \to ((p \to q) \vee (q \to p))$$

в качестве дополнительной аксиомы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов А.* О доказуемостно-интуиционистском пропозициональном исчислении // ДАН СССР, 1985. 283. N1. С. 27-29.
2. *Муравит ский А.* Соответствие расширений доказуемостно-интуиционистской логики расширениям логики доказуемости // Там же. 1985. 281. N4. С. 789-793.
3. *Solovay R.* Provability interpretation of modal logic // Israel Journal of Mathematics, 1976. 25. P. 287-304.
4. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic // Oxford University Press, 1998.
5. *Beth E.* The Foundations of Mathematics // North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1959.
6. *Бурбаки Н.* Теория Множеств. М., 1965.
7. *Esakia L.* Quantification in intuitionistic logic with provability smack. // BSL, 1998. 27. N½. P. 26-28.
8. *Fine K.* Reasoning with Arbitrary Objects. Basil Blackwell – Oxford, 1985.
9. *Черч А.* Введение в математическую логику. М., 1960.
10. *Муравит ский А.* О финитной аппроксимируемости исчисления I^{Δ} и немоделируемости некоторых его расширений // Математические Заметки, 1981. 29, N6, С. P. 907-916.
11. *Дардж ания Г.* Секвенциальный вариант модальной системы I^{Δ} // VII Всесоюзная Конференция по Математической Логике (Тезисы Докладов), Новосибирск, 1984, С. 54.
12. *Gabelaia D.* Tableau Systems for modalized Heyting calculus // The Prepublication Series in Logic and Foundations of Mathematics, Tbilisi, 99-05. 1999.

13. *Esakia L., Jibladze M., Pataraia D.* Scattered toposes // Annals of Pure and Applied Logic, 1999. to appear.
14. *Gradel E.* Why are modal logics so robustly decidable? // Bulletin of EATCS, 1999. N68. P. 90-103.
15. *Laroussinie F., Sohnoebelen Ph.* A hierarchy of temporal logics with past” // Theoretical Computer Science, 1995. 148. N2. P. 303-324.
16. *Клини С.* Введение в метаматематику. М.: 1957.
17. *Эсакиа Л.* “Креативные и критические точки в интуиционистских моделях Крипке и сопряженные модальности”. // Смирновские Чтения, 2 Международная Конференция, Москва, ИФ РАН, 1999, С. 78-82.
18. *Yashin A.* New solution to Novikov’s problem for intuitionistic connectives. // Journal of Logic. Comput., 1998. 8. N5. P. 637-664.