В.М.Попов

СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ АКСИОМАТИЗАЦИЯ КВАЗИМИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ[1]

Abstract. *A sequential axiomatization for the set of all formulas which are dedusible in Smirnov's quasi-minimal calculus is presented.*

Предлагается секвенциальная аксиоматизация множества всех формул, доказуемых в квазиминимальном исчислении В.А.Смирнова [1].

Назовем HQ-языком любой первопорядковый язык со стандартным синтаксисом, удовлетворяющий следующим условиям: 1) множество всех индивидных переменных этого языка есть объединение двух счетно-бесконечных непересекающихся множеств – множества всех связанных индивидных переменных этого языка и множества всех свободных индивидных переменных этого языка, 2) множеству всех логических символов этого языка принадлежат в точности следующие символы: $\forall$ и $\exists$ (кванторы), &, $\vee$, $\supset$ (двуместные логические связки), $\neg$ (одноместная логическая связка), *f* (нульместная логическая связка).

В дальнейшем пусть L – фиксированный HQ-язык. Буквы A, B и C условимся использовать как переменные для формул языка L, буквы Γ, Δ, Σ и Θ – как переменные для конечных (включая пустую) последовательностей формул языка L, букву x – как переменную для связанных индивидных переменных языка L, букву w – как переменную для свободных переменных языка L, букву t – как переменную для термов языка L, а запись F_t^w – как обозначение операции правильной подстановки в формулу языка L терма t вместо свободной индивидной переменной w (в частности, F_x^w обозначает операцию правильной подстановки в формулу языка L связанной индивидной переменной x вместо свободной индивидной переменной w), условимся также называть формулы языка L просто формулами и примем обычные соглашения об опускании скобок в формулах.

Исчисление HQ[2] над L, являющееся исчислением гильбертовского типа, определим, следуя [1]. Аксиомные схемы исчисления HQ есть в точности следующие схемы формул:

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-19706.

[2] Поскольку язык L, в котором строятся формулы этого исчисления, зафиксирован, указание на L в аббревиатуре этого исчисления отсутствует.

1. $A \supset A$,
2. $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$,
3. $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$,
4. $(A \supset (A \supset B)) \supset (A \supset B)$,
5. $A \& B \supset A$,
6. $A \& B \supset B$,
7. $((C \supset A) \& (C \supset B)) \supset (C \supset (A \& B))$,
8. $A \supset A \vee B$,
9. $B \supset A \vee B$,
10. $(A \supset C)\& (B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$,
11. $\neg A \supset (A \supset f)$,
12. $(A \supset f) \supset \neg A$,
13. $\forall x F_x^w\ A \supset F_t^w\ A$,
14. $\forall x F_x^w\ (C \supset A) \supset (C \supset \forall x F_x^w\ A)$ (в этой схеме формула C не содержит вхождений w),
15. $F_t^w\ A \supset \exists x F_x^w A$,
16. $\forall x F_x^w\ (A \supset C) \supset (\exists x F_x^w\ A \supset C)$ (в этой схеме формула C не содержит вхождений w),
17. $(A \supset B) \supset (C \supset (A \supset B))$,
18. $((A \supset B) \supset A) \supset A$.

Правила вывода исчисления HQ есть в точности следующие три правила:

$$\frac{A, A \supset B}{B}, \quad \frac{A}{\forall x F_x^w A}, \quad \frac{A, B}{A \& B}$$

Доказательства в HQ строятся стандартно. Заметим, что исчисление HQ является исчислением с зависимой системой аксиомных схем: можно доказать, используя результаты работы [2], что для любой доказуемой в HQ формулы существует ее доказательство в исчислении, получающееся из HQ «отбрасыванием» двух аксиомных схем 4 и 17.

Определим теперь секвенциальное исчисление GQ[3] над L. Основными секвенциями этого исчисления являются все те и только те секвенции, каждая из которых имеет следующий вид: $A \to A$. Правила вывода (фигуры заключения) исчисления GQ есть в точности следующие правила:

---

[3] См. сноску 2.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \to \Theta}, \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Theta}, \quad \frac{A, A, \Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}, \quad \frac{\Gamma \to \Theta, A, A}{\Gamma \to \Theta, A},$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{A, \Gamma \to \Theta}, \quad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A}, \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Sigma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta},$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B},$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta}, \quad \frac{A, \Gamma \to \Theta}{B \& A, \Gamma \to \Theta}, \quad \frac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \& B},$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, A \vee B}, \quad \frac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, B \vee A}, \quad \frac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta},$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta, f}, \quad \frac{A, \Gamma \to \Theta, f}{\Gamma \to \Theta, \neg A},$$

$$\frac{F_t^w A, \Gamma \to \Theta}{\forall x F_x^w A, \Gamma \to \Theta}, \quad \frac{\Gamma \to \Theta, F_t^w A}{\Gamma \to \Theta, \exists x F_x^w A},$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, \forall x F_x^w A}, \quad \frac{A, \Gamma \to \Theta}{\exists x F_x^w A, \Gamma \to \Theta}$$

(в формулировках двух последних правил w не входит в нижнюю секвенцию),

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A \quad A, \Sigma \to \Theta}{\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Theta} \text{ (правило сечения).}$$

Доказательства в GQ строятся обычным для секвенциальных исчислений образом.

Доказаны следующие теоремы 1 и 2.

Теорема 1 (об устранимости сечения для исчисления GQ). *Для всякой доказуемой в* GQ *секвенции существует такое её доказательство в этом исчислении, которое не содержит применений правила сечения.*

Теорема 2 (об аксиоматизации квазиминимальной логики посредством исчисления GQ). *Формула* A *доказуема в* HQ *т.т.т. секвенция* $\rightarrow$ A *доказуема в* GQ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М.,1972.
2. *Попов В.М.* Два замечания и один вопрос относительно аксиоматизации импликативных логик // Логические исследования. Вып. 2. М., 1993.