С.П.Одинцов

О НЕГАТИВНО ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РАСШИРЕНИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ[1]

Abstract. *We define the relation of negative equivalence on the class of non-trivial extensions of minimal logic as follows. Logics are negatively equivalent if they define the same negative consequence relation or, equivalently, if they have the same class of inconsistent sets of formulas. We point out the least logic in any class of logics with fixed intuitionistic and negative counterparts and prove that each of such logics is closed under the rule* $(\varphi \vee \bot) / \varphi$. *We prove also that negative counterparts of extensions of negative logics can be treated as theirs logics of contradictions.*

Введение

Данная статья продолжает изучение класса расширений минимальной логики **Lj**, которое было начато в работах автора [1-3]. Класс нетривиальных расширений **Lj** является дизъюнктным объединением трех подклассов: класса **Int** промежуточных логик, в которых выполняется закон *ex contradictio quodlibet*; класса **Neg** негативных логик, имеющих вырожденное отрицание в том смысле, что в этих логиках доказуемы все формулы, начинающиеся с отрицаний; наконец, класса **Par** паранепротиворечивых расширений **Lj**, включающего логики, не вошедшие в первые два класса. Каждой паранепротиворечивой логике $\mathbf{L}\in\mathbf{Par}$ естественным образом сопоставляются ее интуиционистский напарник $\mathbf{L_{int}} = \mathbf{L} + \{\bot \supset p\} \in \mathbf{Int}$ и негативный напарник $\mathbf{L_{neg}} = \mathbf{L} + \{\bot\} \in \mathbf{Neg}$ (см. [3]). Оказывается, что $\mathbf{L_{int}}$ – наименьшая промежуточная логика, содержащая **L**, соответственно, $\mathbf{L_{neg}}$ – наименьшая негативная логика, содержащая **L**. Более того, существуют естественные трансляции $\mathbf{L_{int}}$ и $\mathbf{L_{neg}}$ в **L** (см. разд.1 ниже), т.е. напарники могут быть конструктивно определены через логику **L**. Однако паранепротиворечивая логика не определяется полностью своими напарниками. Класс паранепротиворечивых логик, имеющих фиксированные интуиционистский напарник $\mathbf{L1} \in \mathbf{Int}$ и негативный напарник $\mathbf{L2} \in \mathbf{Neg}$, образует интервал $[\mathbf{L1}*\mathbf{L2}, \mathbf{L1}\cap\mathbf{L2}]$ в решетке расширений **Lj**, наибольшая точка которого является просто пересечением логик **L1** и **L2**, а наименьшая – так называемой свобод-

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 99-03-00204.

ной комбинацией логик **L1** и **L2**, определение которой несколько сложнее и будет приведено ниже.

Цель данной статьи – сравнить выводимость и опровержимость в паранепротиворечивых расширениях **Lj** и их интуиционистских напарниках. Прежде всего заметим, что упомянутая выше трансляция интуиционистского напарника $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ в логику $\mathbf{L} \in \mathbf{Par}$ всегда является сильной, т.е. сохраняющей отношение выводимости. Тем самым, отказываясь от *ex contradictio quodlibet,* мы сохраняем возможность моделировать дедуктивный аппарат промежуточных логик. Более того, оказывается, что в ряде случаев паранепротиворечивая логика **L** имеет то же самое негативное отношение выводимости (отношение $X \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi$), или, что эквивалентно в классе расширений минимальной логики, тот же самый класс противоречивых множеств формул, что и её интуиционистский напарник $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$. Мы будем говорить, что в этом случае логики **L** и $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ *негативно эквивалентны.* Представляется естественным считать, что конструктивный смысл понятия противоречия в той или иной дедуктивной системе вполне определяется классом множеств формул, противоречивость которых может быть доказана в данной дедуктивной системе. Соответственно конструктивный смысл отрицания определяется тем, какие формулы опровергаются (выводятся их отрицания) исходя из того или иного множества посылок. В конце концов, отрицание для того и вводится, чтобы иметь возможность опровергать формулы. Таким образом, если две логики негативно эквивалентны, они имеют идентичные, с конструктивной точки зрения, концепции противоречия и отрицания. Мы укажем для любой промежуточной логики $\mathbf{L}\in\mathbf{Int}$ наименьшую паранепротиворечивую логику $\mathbf{L1}\in\mathbf{Par}$, которая негативно эквивалентна **L**. Обсудим также возможность сохранения конструктивных свойств промежуточной логики при переходе к негативно эквивалентной паранепротиворечивой логике, в частности, покажем, что упомянутая выше логика **L1** всегда будет удовлетворять слабому аналогу дизъюнктивного свойства.

Перечисленные выше результаты можно рассматривать как ещё один довод в пользу излюбленного тезиса сторонников паранепротиворечивой логики: «Отказываясь от *ex contradictio quodlibet,* мы, по существу, ничего не теряем, но приобретаем новые возможности». К числу последних можно отнести также возможность рассматривать негативный напарник $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ паранепротиворечивой логики **L** как логику противоречий логики **L**. Это следует из того, что, как будет показано ниже, оператор противоречия $C(\varphi) = \varphi\wedge\neg\varphi$ определяет строгую трансляцию $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ в **L**, т.е. формулы логики $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ ведут себя в точности так же, как образованные с их помощью противоречия в логике **L**.

1. Предварительные замечания

Пусть **Jhn** обозначает класс всех нетривиальных расширений **Lj**. Как было упомянуто во введении, класс **Jhn** представим в виде дизъюнктного объединения трех классов: **Jhn** = **Int** $\cup$ **Neg** $\cup$ **Par**. Каждый из этих классов является интервалом в решетке логик **Jhn**: **Int** = [**Li**, **Lk**], **Neg** = [**Ln**, **Lmn**], **Par** = [**Lj**, **Le**], где **Li** – интуиционистская логика, **Lk** – классическая логика, **Ln** – негативная логика, **Ln** = **Lj** + $\{\bot\}$, **Lmn** – максимальная негативная логика, **Lmn** = **Ln** + $\{((p \supset q) \supset p) \supset p\}$, наконец, **Le** – логика классической опровержимости, **Le** = **Lj** + $\{((p \supset q) \supset p) \supset p\}$.

Упомянутые во введении трансляции интуиционистского и негативного напарников в паранепротиворечивую логику определяются следующим образом.

Предложение 1.1. [3] *Пусть* **L**$\in$**Par**. *Имеют место равенства*

$$\mathbf{L}_{\mathbf{neg}} = \{\varphi \mid \bot \supset \varphi \in \mathbf{L}\} \text{ и } \mathbf{L}_{\mathbf{int}} = \{\varphi \mid I(\varphi) \in \mathbf{L}\},$$

где $I(\varphi(p_1,\dots, p_n)) = \varphi(p_1 \vee \bot,\dots, p_n \vee \bot)$.

Оказывается, трансляция I всегда является строгой.

Предложение 1.2. *Для любых* **L**$\in$**Par** *множеств формул* X *и формулы* φ, *из* X *в логике* $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ *выводима формула* φ *в том и только в том случае, если* $I(X) \vdash_{\mathbf{L}} I(\varphi)$, *где* $I(X) = \{\varphi \mid I(\varphi)\in X\}$.

Данное предложение легко следует из того, что любая формула вида $I(\bot \supset \varphi)$ $(= \bot \supset I(\varphi))$ доказуема в **Lj**.

Для **L1**$\in$**Int**, **L2**$\in$**Neg** обозначим

$$Spec(\mathbf{L1},\mathbf{L2}) = \{\mathbf{L}\in\mathbf{Par} \mid \mathbf{L}_{\mathbf{int}} = \mathbf{L1},\ \mathbf{L}_{\mathbf{neg}} = \mathbf{L2}\},$$

т.е. *Spec*(**L1**,**L2**) – это класс паранепротиворечивых логик с заданными интуиционистским и негативным напарниками. Оказывается, *Spec*(**L1**,**L2**) является интервалом в решетке **Jhn**.

Предложение 1.3. [3] *Пусть* **L1**$\in$**Int**, **L2**$\in$**Neg**. *Тогда* *Spec*(**L1**,**L2**) = [**L1**$*$**L2**, **L1**$\cap$**L2**], *где* **L1**$*$**L2** = **Lj** = $\{ I(\varphi), \bot \supset \psi \mid \varphi\in\mathbf{L1}, \psi\in\mathbf{L2}\}$

Логику **Lg** = **Lj** + $\{\neg\neg(\bot \supset p)\}$ будем называть *логикой Гливенко.* Это наименьшая логика среди логик **L,** удовлетворяющих известной теореме Гливенко: для любой формулы φ, **Lk** $\vdash \varphi$ в том и только в том случае, если **L** $\vdash \neg\neg\varphi$.

Пусть **L1**$\in$**Int**, **L2**$\in$**Neg**. *Релятивизованную логику Гливенко* G(**L1**,**L2**) определим следующим образом: G(**L1**,**L2**) = **L1**$*$**L2** + $\{\neg\neg(\bot \supset p)\}$.

Предложение 1.4. *Для* **L1**$\in$**Int**, **L2**$\in$**Neg** *эквивалентны следующие условия:* 1) **L1** = **Lk**; 2) G(**L1**,**L2**) = **L1**$\cap$**L2**.

Класс j-алгебр (см. [1,2]) задает алгебраическую семантику для минимальной логики. С каждой j-алгеброй **A** связаны гейтингова алгебра $\mathbf{A}^{\perp}$ с носителем $\{a\in\mathbf{A} \mid a \geq \perp\}$, которая является подалгеброй **A**, и негативная алгебра $\mathbf{A}_{\perp}$ с носителем $\{a\in\mathbf{A} \mid a \leq \perp\}$ и операцией импликации $x \supset_{\perp} y = (x \supset y) \wedge \perp$. Заметим, что $\perp$ является единичным элементом в $\mathbf{A}_{\perp}$.

Пусть даны гейтингова алгебра **A**, негативная алгебра **B** и f:**B**$\to$ **A**, полурешеточный гомоморфизм, сохраняющий наибольший элемент и операцию взятия точной нижней грани, т.е. $f(\perp) = 1$, $f(x\wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, $x,y\in\mathbf{B}$. Определим j-алгебру $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$ следующим образом:

$$|\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}| = \{(x,y) \mid x\in\mathbf{A}, y\in\mathbf{B}, x \leq f(y)\},$$

решеточные операции вычисляются покомпонентно, операция импликации задается формулой

$$(x_1, y_1) \supset (x_2, y_2) = ((x_1 \supset x_2) \wedge f(y_1 \supset y_2), y_1 \supset y_2),$$

единичный элемент $1=(1_{\mathbf{A}}, \perp_{\mathbf{B}})$, противоречие $\perp = (\perp_{\mathbf{A}}, \perp_{\mathbf{B}})$. Оказывается, что любая j-алгебра представима в таком виде.

Предложение 1.5. [1] *Пусть* **A** *– произвольная* j*-алгебра. Тогда отображение* f:$\mathbf{A}_{\perp}\to\mathbf{A}^{\perp}$, *заданное формулой* $f(y) = \perp\vee (\perp\supset y)$, *является полурешеточным гомоморфизмом, сохраняющим наибольший элемент и операцию взятия точной нижней грани, а отображение* $\lambda(x) = (x \vee \perp, x \wedge \perp)$ *задает изоморфизм* j*-алгебр* **A** *и* $\mathbf{A}^{\perp}\times_f \mathbf{A}_{\perp}$.

Полученное представление j-алгебр позволяет охарактеризовать семантику различных логик из класса **Par**.

Предложение 1.6. [1] *Пусть* **L1**$\in$**Int**, **L2**$\in$**Neg**, **A** *– гейтингова алгебра,* **B** *– негативная алгебра и* f:**B**$\to$**A** *– полурешеточный гомоморфизм, сохраняющий наибольший элемент и операцию взятия точной нижней грани. Тогда справедливы следующие эквивалентности:*

1) $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B} \models \mathbf{L1}\cap\mathbf{L2}$, *если и только если* $\mathbf{A} \models \mathbf{L1}$, $\mathbf{B} \models \mathbf{L2}$ *и* $\rho f = \{1\}$, *т.е.* $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$ *совпадает с прямым произведением* $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$*;*
2) $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B} \models \mathbf{L1}*\mathbf{L2}$, *если и только если* $\mathbf{A} \models \mathbf{L1}$ *и* $\mathbf{B} \models \mathbf{L2}$*;*
3) $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B} \models \mathbf{L1}\cap\mathbf{L2}$, *если и только если* $\mathbf{A} \models \mathbf{L1}$, $\mathbf{B} \models \mathbf{L2}$ *и* $\rho f \subseteq \nabla(\mathbf{A})$, *где* $\nabla(\mathbf{A})$ *обозначает фильтр плотных элементов гейтинговой алгебры* **A**.

2. Негативно эквивалентные логики

Пусть **L1** и **L2** – логики, расширяющие **Lj**. Говорим, что **L1** и **L2** *негативно эквивалентны*, пишем **L1** $\equiv_{\mathbf{neg}}$ **L2**, если для любых множества формул X и формулы φ выполнена следующая эквивалентность: $X \vdash_{\mathbf{L1}} \neg\varphi$, если и только если $X \vdash_{\mathbf{L2}} \neg\varphi$. Иными словами, логики негативно эквивалентны, если они задают одно и то же негативное отношение выводимости, т.е. отношение выводимости, в котором заключение является негативной формулой.

Как будет видно из следующего предложения, вместо сохранения негативного отношения выводимости можно было бы потребовать сохранение класса противоречивых множеств формул. Однако доказываемая ниже эквивалентность характерна именно для класса логик **Jhn**, так как в минимальной логике и ее расширениях отрицание определяется через противоречие, а константа $\perp$ может быть определена как отрицание тавтологии. Напомним, что множество формул X *противоречиво* в логике **L**$\in$**Jhn**, если $X \vdash_{\mathbf{L}} \perp$.

Предложение 2.1. *Для любых* **L1**,**L2**$\in$**Jhn** *следующие условия эквивалентны:*

1) **L1** $\equiv_{\mathbf{neg}}$ **L2**;
2) *для любого множества формул X X противоречиво в* **L1** *в том и только в том случае, если X противоречиво в* **L2**.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Если $X \vdash_{\mathbf{L1}} \perp$, то $X \vdash_{\mathbf{L1}} \neg\varphi$ для любой φ. Тогда по условию, $X \vdash_{\mathbf{L2}} \neg\varphi$ для любой φ. Возьмем **L2**-тавтологию ψ, тогда $X \vdash_{\mathbf{L2}} \psi, \neg\psi$. Откуда $X \vdash_{\mathbf{L2}} \perp$.

2)$\Rightarrow$1). Пусть $X \vdash_{\mathbf{L1}} \neg\varphi$, тогда $X \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathbf{L1}} \perp$.

По условию, $X \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathbf{L2}} \perp$, следовательно, по теореме дедукции, $X \vdash_{\mathbf{L1}} \varphi \supset \perp$, т.е. $X \vdash_{\mathbf{L2}} \neg\varphi$.

Предложение доказано.

Условие негативной эквивалентности логик может быть переформулировано следующим образом.

Предложение 2.2. *Логики* **L1**,**L2**$\in$**Jhn** *негативно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любой формулы* φ *выполнено следующее условие:*

$$(\mathbf{L1} \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{L2} \vdash \neg\neg\varphi) \text{ и } (\mathbf{L2} \vdash \varphi \Rightarrow \mathbf{L1} \vdash \neg\neg\varphi).$$

Доказательство. Пусть **L1** $\equiv_{\mathbf{neg}}$ **L2**. Если **L1** $\vdash \varphi$, то $\{\neg\varphi\} \vdash_{\mathbf{L1}} \perp$. Следовательно, $\{\neg\varphi\} \vdash_{\mathbf{L2}} \perp$, т.е. **L2** $\vdash \neg\neg\varphi$.

Теперь предположим, что выполнено второе условие доказываемой эквивалентности. Пусть $X \vdash_{\mathbf{L1}} \perp$, т.е. **L1** $\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \supset \perp$ для некоторых $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X$. По условию, **L2** $\vdash \neg\neg\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$,

значит, ввиду **Lj** $\vdash \neg\neg\neg p \equiv \neg p$, получаем **L2** $\vdash \neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)$. Откуда немедленно следует $X \vdash_{\mathbf{L2}} \bot$.
Предложение доказано.

Предложение 2.3. *Пусть* **L1**,**L2**$\in$**Jhn** *и справедливо равенство* **L2** = **L1** + $\{\varphi_1,\ldots,\varphi\}$. *Тогда* **L1** $\equiv_{\mathbf{neg}}$ **L2** *в том и только в том случае, если* $\neg\neg\varphi_1,\ldots, \neg\neg\varphi_n \in$ **L1**.

Доказательство. Рассмотрим только нетривиальную импликацию. Пусть $\neg\neg\varphi_1,\ldots, \neg\neg\varphi_n \in$ **L1**. Возьмём множество формул X такое, что $X \vdash_{\mathbf{L2}} \bot$, тогда $X\cup \{\psi_1,\ldots,\psi_k\} \vdash_{\mathbf{L1}} \bot$, т.е. $X \vdash_{\mathbf{L1}} \neg(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)$, где $\psi_1,\ldots,\psi_k$ — подстановочные частные случаи формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. По условию, **L1** $\vdash \neg\neg\psi_1,\ldots,\neg\neg\psi_k$. Возьмём произвольную модель **A** $\models$ **L1** и **A**-оценку v, тогда элементы $v(\psi_1),\ldots,v(\psi_k)$ плотны в $\mathbf{A}^{\bot}$. Следовательно, элемент $v(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)$ также плотен, поэтому $v(\neg(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)) = \bot_{\mathbf{A}}$.

Пусть формулы $\theta_1,\ldots,\theta_m \in X$ таковы, что **L1** $\vdash (\theta_1\wedge\ldots\wedge\theta_m) \supset \neg(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)$. По доказаному ранее, для любой модели **A** $\models$ **L1** и любой **A**-оценки v, $v(\theta_1\wedge\ldots\wedge\theta_m) \le \bot_{\mathbf{A}}$. Следовательно, **L1** $\vdash (\theta_1\wedge\ldots\wedge\theta_m) \supset \bot$, т.е. $X \vdash_{\mathbf{L1}} \bot$.

Предложение доказано.

Замечание. Любые две негативные логики негативно эквивалентны. Это следует из того, что в любой негативной логике любое множество формул является противоречивым, так как противоречие $\bot$ относится к числу логических тавтологий. Любые две промежуточные логики также негативно эквивалентны, что легко следует из предложения 2.2 и теоремы Гливенко. Если формула φ доказуема в логике **L**$\in$**Int**, то **Lk** $\vdash \varphi$. Значит в **Li**, а следовательно, и в любой промежуточной логике выводимо двойное отрицание этой формулы $\neg\neg\varphi$. Следовательно, в частности, **Lk** $\equiv_{\mathbf{neg}}$ **Li**. Хорошо известно, что отрицание в интуиционистской логике не является конструктивным, из выводимости **Li** $\vdash \neg(\varphi\wedge\psi)$ не следует, что в **Li** выводима одна из формул $\neg\varphi$ или $\neg\psi$. Сделанное выше наблюдение также подчеркивает неконструктивный характер интуиционистского отрицания.

Теперь обсудим такой вопрос. Пусть зафиксированы логики **L1**$\in$**Int**, **L2**$\in$**Neg**. Какие логики **L**$\in$**Par**, имеющие **L1** и **L2** своими интуиционистским и негативным напарниками, будут негативно эквивалентны **L1**? Иными словами, до какой степени можно ослабить закон *ex contradictio quodlibet*, сохранив негативную эквивалентность?

Предложение 2.4. *Пусть* **L1**$\in$**Int**, **L2**$\in$**Neg** *и* **L** $\in$ [**L1**$*$**L2**, **L1**$\cap$**L2**]. *Эквивалентность* **L** $\equiv_{\mathbf{neg}}$ **L1** *справедлива в том и только в том случае, если* G(**L1**,**L2**) $\subseteq$ **L**.

Доказательство. Напомним, что **L1** = **L** + $\{\bot \supset p\}$. По предложению 2.3, **L** $\equiv_{\mathbf{neg}}$ **L1** в том и только в том случае, если **L** $\vdash \neg\neg(\bot \supset p)$. По определению, G(**L1**,**L2**) = **L1**$*$**L2** + $\{\neg\neg(\bot \supset p)\}$. Тем самым, предложение доказано.

Как видно из предложения 1.4, если **L1**=**Lk**, то в интервале [**Lk**$*$**L2**,**Lk**$\cap$**L2**] существует единственная паранепротиворечивая логика негативно эквивалентная **Lk**, именно **Lk**$\cap$**L2**. Заметим, что эта логика аксиоматизируется по модулю наименьшей логики рассматриваемого интервала **Lk**$*$**L2** аксиомой $\bot\vee(\bot\supset p)$, имеющей существенно неконструктивный характер. Если же **L1** $\neq$ **Lk**, то имеется целый интервал логик, [G(**L1**,**L2**), **L1**$\cap$**L2**], негативно эквивалентных промежуточным логикам. Если **L1**=**Li** и **L2**=**Ln**, то G(**L1**,**L2**)=**Lg**. Из семантической характеризации в стиле Крипке логики Гливенко (см. [1]) и хорошо известного семантического критерия для дизъюнктивного свойства (см., например, [4]) легко следует, что логика Гливенко обладает дизъюнктивным свойством.

Предложение 2.5. *Для любых формул* φ *и* ψ, *если* **Lg** $\vdash \varphi\vee\psi$, *т о* **Lg** $\vdash \varphi$ *или* **Lg** $\vdash \psi$.

Это предложение показывает, что можно отказаться от *ex contradictio quodlibet* с сохранением не только класса противоречивых множеств формул, но и конструктивных свойств интуиционистской логики. Однако дизъюнктивное свойство выполняется не для всех релятивизованных логик Гливенко G(**L1**,**L2**). В частности, если **L1**=**Lk**, то G(**Lk**,**L2**)$\vdash \bot \vee (\bot \supset p)$. Если **L1** не удовлетворяет дизъюнктивному свойству и $\varphi\vee\psi$ — соответствующий контрпример, т.е. **L1** $\vdash \varphi\vee\psi$, но φ и ψ не выводимы в **L1**, то формула $I(\varphi\vee\psi)$ $(=I(\varphi)\vee I(\psi))$ будет опровергать дизъюнктивное свойство для логики G(**L1**,**L2**): G(**L1**,**L2**) $\vdash I(\varphi\vee\psi)$, но формулы $I(\varphi)$ и $I(\psi)$ не выводимы в G(**L1**,**L2**). Тем не менее, можно указать достаточно любопытный слабый аналог дизъюнктивного свойства, который выполняется для всех релятивизованных логик Гливенко G(**L1**,**L2**) при **L1**$\neq$**Lk**. При поиске этого свойства мы исходили из того, что оно должно выполняться для всех релятивизованных логик Гливенко, без учета конструктивных свойств их интуиционистских напарников. Это должно быть свойство, которое выполняется во всех промежуточных логиках, но становится нетривиальным в паранепротиворечивых логиках. Таким свойством является замкнутость логики относительно правила вывода $(\varphi \vee \bot)/\varphi$, которое, очевидно, может рассматриваться как слабый аналог дизъюнктивного свойства. Любопытно также, что для любой логики **L**$\in$**Jhn** замкнутость множества её тавтологий относительно правила $(\varphi\vee\bot)\ /\ \varphi$ эквивалентна замкнутости относительно правила дизъюнктивного силлогизма $\neg\varphi,\ \varphi\vee\psi/\psi$.

Предложение 2.6. *Пусть* $\mathbf{Lk} \neq \mathbf{L1} \in \mathbf{Int}$, $\mathbf{L2} \in \mathbf{Neg}$ *и* φ *— формула. Если* $G(\mathbf{L1},\mathbf{L2}) \vdash \varphi \vee \bot$, *то* $G(\mathbf{L1},\mathbf{L2}) \vdash \varphi$.

Доказательство. Пусть $\varphi = \varphi(p_1,\ldots,p_n)$, т.е. все пропозициональные переменные формулы φ входят в список $p_1,\ldots,p_n$. Предположим, что $G(\mathbf{L1},\mathbf{L2}) \vdash \varphi \vee \bot$, но неверно, что $G(\mathbf{L1},\mathbf{L2}) \vdash \varphi$. Откуда следует, в частности, что в $\mathbf{L2}$ также не выводима формула φ. Значит существует негативная алгебра $\mathbf{B}$ и элементы $b_1,\ldots,b_n \in \mathbf{B}$ такие, что $\mathbf{B} \models \mathbf{L2}$ и $\varphi(b_1,\ldots,b_n) \neq \bot$.

По условию $\mathbf{Lk} \neq \mathbf{L1}$, следовательно, существует гейтингова алгебра $\mathbf{A}$ такая, что $\mathbf{A} \models \mathbf{L1}$ и $\nabla(\mathbf{A}) \neq \{1\}$. Возьмём элемент $a \in \nabla(\mathbf{A})$, $a \neq 1$, и рассмотрим j-алгебру $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$, где полурешеточный гомоморфизм $f{:}\mathbf{B}\to\mathbf{A}$ определён следующим образом: $f(\bot) = 1$, $f(x) = a$ при $x \neq \bot$. Тогда для любой пары $(x,y) \in \mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$ имеем $x \leq a$ при $y \neq \bot$. Кроме того, j-алгебра $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$ будет моделью логики $G(\mathbf{L1},\mathbf{L2})$, так как $\rho f = \{a,1\} \subseteq \nabla(\mathbf{A})$. Вычислим значение формулы φ на элементах $(0,b_1),\ldots,(0,b_n) \in \mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$. Принимая во внимание, что отображение $(x,y)\to y$ задает эпиморфизм j-алгебр $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, имеем равенство $\varphi((0,b_1),\ldots,(0,b_n)) = (x,\varphi(b_1,\ldots,b_n))$, причем $x \leq a$, так как $\varphi(b_1,\ldots,b_n) \neq \bot$. Получаем

$$\varphi((0,b_1),\ldots,(0,b_n)) \vee (\bot,\bot) = (x,\bot) \neq (1,\bot),$$

что противоречит предположению $G(\mathbf{L1},\mathbf{L2}) \vdash \varphi\vee\bot$.
Предложение доказано.

3. Логики противоречий

Определим оператор противоречия $C(\varphi) = \varphi \wedge \neg\varphi$. Распространим его на множества формул следующим образом: $C(\varnothing) = \{\bot\}$; $C(X) = \{C(\varphi) \mid \varphi\in X\}$ для $X \neq \varnothing$. Оператор противоречия тривиален в промежуточных логиках, в присутствии *ex contradictio quodlibet* для любой формулы φ имеем $C(\varphi) \equiv \bot$. Отказываясь от *ex contradictio quodlibet*, мы получаем возможность различать противоречия, образованные с помощью различных формул. В частности, если $\mathbf{L}\in\mathbf{Par}$, то $\mathbf{L} \vdash C(\varphi) \equiv \bot$ в том и только в том случае, если $\varphi\in\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$. Более того, оказывается, что с точки зрения дедуктивных свойств формулы в логике $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ ведут себя в точности так же, как образованные с их помощью противоречия в исходной логике $\mathbf{L}$. Точнее, имеет место факт, доказательство которого представляет собой несложное упражнение на выводимость в минимальной логике.

Предложение 3.1. *Пусть* $\mathbf{L}\in\mathbf{Par}$. *Для множества формул* X *и формулы* φ *справедлива эквивалентность: в негативном напарнике* $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ *из* X *выводима формула* φ, *если и только если* $C(X) \vdash_{\mathbf{L}} C(\varphi)$.

Тем самым, мы доказали, что оператор противоречия определяет сильную трансляцию негативного напарника $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ в паранепротиворечивую логику $\mathbf{L}\in\mathbf{Par}$. Это позволяет рассматривать негативный напарник $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ как логику противоречий, ассоциированную с данной паранепротиворечивой логикой **L**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Одинцов С.П.* Алгебраическая семантика и семантика Крипке для расширений минимальной логики // Логические исследования (электронный журнал). 1999. No.1.
2. *Odintsov S.P.* Maximal paraconsistent extension of Johansson logic // Logique et Analyse. *To appear.*
3. *Odintsov S.P.* Class of extensions of minimal logic // *Submitted to* Proceedings of S.Jaskowski Memorial Symposium. Torun, 1998.
4. *Chagrov A.*, *Zakharyaschev M.* The undecidability of disjunction property of propositional logics and other related problems // J. of Symb. Logic. 1999. V.58, No.3. P.967-1003.