

В.Л.Васюков

ИМПЛИКАТИВНЫЕ ЛОГИКИ, ЛАМБЕКОВСКИЕ СИСТЕМЫ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ МУЛЬТИКАТЕГОРИИ¹

Abstract. *In the paper Lambek's type implicative deductive systems and exponential categories for them are considered and some metamathematical theorems are proved (deduction theorem, functional completeness). Then we formulate both sequential implicative deductive systems and exponential multicategories for which the cut elimination theorem is proved. Finally sequential deductive implicative metasystems and dual deductive systems and categories are discussed.*

Описывая возникновение понятия дедуктивной системы К.Дошен [Došen 1996] замечает, что в целом процедура построения гильбертовских формулировок систем обычно сводится к выбору теорем из всех формул данного языка системы, в то время как генценовские формулировки систем, чьей разновидностью являются системы натурального вывода, основываются на формулировании отношения следования между формулами. В простейшей секвенциальной системе секвенции имеют вид $A \vdash B$, где посылка A и заключение B являются формулами. О подобных секвенциях говорится, что они являются единичными по обеим сторонам.

В более общем случае допускается множественность формул, по крайней мере в посылках, по левую сторону от знака \vdash , что соответствует тому факту, что дедуктивный вывод может исходить более чем из одной посылки. Посылки обычно образуют множество, или секвенции, или мультимножества, либо что-нибудь другое.

Секвенция $A \vdash B$ может пониматься как утверждение о том, что существует натурально-дедуктивное доказательство B , исходящее из гипотез, собранных в совокупность A , в то время как в гильбертовской формулировке системы мы доказываем секвенции

¹ Работа выполнена при поддержке РФНФ, грант № 98-03-04220.

вида $I \vdash B$, где пропозициональная константа I замещает пустую совокупность посылок.

На практике в случае секвенциальных формулировок логических систем, мы заинтересованы лишь в существовании доказательств секвенции и не вводим специальной нотации для различения различных доказательств одной и той же секвенции. Это выглядит так, как будто все доказательства одной и той же секвенции эквивалентны. Тем не менее, если исходить из процедуры нормализации или устранения сечения, то хотелось бы иметь возможность приравнять одни доказательства и различить другие. В этом случае было бы удобно записывать рядом с секвенцией некоторый код, указывающий на историю получения ее доказательства. Подобное кодирование стало общепринятым в натуральной дедукции, где типовые лямбда-термы выполняют роль кодов (а кодирование называется "изоморфизмом Карри-Ховарда" или "интерпретацией формул типами"). Если правила секвенциальной системы ссылаются на правила натуральной дедукции, то мы могли бы работать с типовым лямбда кодированием, но ниже мы увидим, что существуют иные (даже для натуральной дедукции) виды кодирования, опирающиеся на теорию категорий.

Коды будут термами, такими, что аксиоматические секвенции кодируются атомными термами, а правила вывода секвенциальной системы отвечают операциям на термах. Это незначительно отличается от общепринятой практики, где правила вывода являются отношениями, не обязательно функционального типа. Однако мы можем заменить подобные нефункциональные правила на совокупность функциональных правил, осуществляющих по отдельности многие задания, приписываемые первоначальному правилу. Как бы там ни было, большинство правил, с которыми мы имеем дело на практике, являются функциональными. В общем случае, операции на термах, отвечающие правилам вывода, являются частными операциями, поскольку правила могут быть применены к секвенциям одного типа, но не другого.

Когда доказательство секвенции может быть преобразовано в другое доказательство той же самой секвенции посредством определенной процедуры, подобно тому, как мы действуем в случае нормализации натуральной дедукции или устранения сечения, то мы приравниваем коды двух доказательств. Чтобы избежать тривиальности, не обязательно требовать, чтобы коды, отвечающие той же самой секвенции, были всегда одинаковы.

Ниже будет сформулировано, следуя Дж. Ламбеку, понятие систем секвенций с кодами, называемых дедуктивными системами. Хотя эти системы являются удобным инструментом логических исследований, но на практике нам требуется несколько иная конструкция, называемая мультикатегорией, которая получается путем наложения некоторых требований (тождеств) на доказательства (коды), что позволяет значительно более эффективно работать с ними.

1. Дедуктивные импликативные системы и экспоненциальные категории

Введем понятие дедуктивной импликативной системы и экспоненциальной теории, как они были изложены в [Vasyukov 1997].

Напомним, что граф состоит из класса стрелок (в теории графов называемых "ориентированными ребрами") и класса объектов (обычно называемых "вершинами", но в различных разделах математики может использоваться и иная терминология) и двух отображений:

$$\text{Начало: } \{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}$$

$$\text{Конец: } \{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}$$

Вместо того чтобы писать $\text{начало}(f) = A$, $\text{конец}(f) = B$, часто пишут $f: A \rightarrow B$ или $f: A \vdash B$. Для логики интерес представляют графы с дополнительной структурой.

Согласно [Lambek Scott 1986, p.47], дедуктивная система представляет собой граф со специальной стрелкой

$$1_A: A \vdash A$$

и бинарной операцией на стрелках (композиции)

$$\frac{f: A \vdash B \quad g: B \vdash C}{gf: A \vdash C}$$

Под объектами дедуктивной системы, как обычно, понимаются формулы, под стрелками — доказательства, и под операциями на стрелках — правила вывода. Мы получаем импликативное исчисление, если допускаем, что существует формула T (= истина) и бинарная операция \supset (= "если,...,то") для образования импликации $A \supset B$ из двух данных формул A и B . Кроме этого, мы вводим следующие два правила вывода:

$$\frac{f: A \vdash B}{\ulcorner f \urcorner: T \vdash A \supset B}$$

$$\frac{g: T \vdash A \supset B}{g^s: A \vdash B}$$

Нетрудно видеть, что наше импликативное исчисление соответствует системе **I** [Карпенко 1993, с.225], ибо:

а) мы имеем аксиому **I** в виде:

$$\ulcorner 1_A \urcorner : T \vdash A \supset A$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{f: T \vdash A \quad g: T \vdash A \supset B}{g^s f: T \vdash B}$$

Категория, согласно [Lambek Scott 1986, p.52], есть дедуктивная система, в которой имеют место следующие уравнения между доказательствами:

$$f 1_A = f, \quad 1_B f = f, \\ (hg)f = h(gf), \text{ для всех } f: A \vdash B, g: B \vdash C, h: C \vdash D$$

Мы определяем *экспоненциальную категорию*, наделяя категорию **A** введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\ulcorner f \urcorner^s = f, \quad \ulcorner g \urcorner^s = g, \\ \text{для всех } f: A \vdash B \text{ и } g: T \vdash C \supset D$$

Таким образом, для данного графа **X** мы можем сконструировать импликативные исчисления **D(X)** и свободную экспоненциальную категорию **F(X)**, порожденную **X**.

Пусть **GRPH** будет категорией графов, чьими объектами являются графы, и каждый морфизм **F: X → Y** есть пара отображений **F: Objects(X) → Objects(Y)** и **F: Arrows(X) → Arrows(Y)**, такая, что **f: X → X'** влечет **F(f): F(X) → F(X')**.

Пусть **EXP** будет категория экспоненциальных категорий, чьими объектами являются экспоненциальные категории, а стрелками — функторы **F: A → B**, сохраняющие экспоненциальную структуру, т.е.

$$F(T) = T, \quad F(A \supset B) = F(A) \supset F(B), \\ F(\ulcorner f \urcorner) = \ulcorner F(f) \urcorner, \quad F(f^s) = F(f)^s.$$

Пусть **U** будет обычным стирающим функтором **EXP → GRPH**. С каждым графом **X** мы можем ассоциировать морфизм графов **H_X: X → UF(X)** следующим образом: **H_X(X) = X** и, если **f: X → Y** есть стрелка в **X**, то **H_X(f) = f** (классы эквивалентности **f** рассматриваются как доказательства в **D(X)**). Мы имеем следующее универсальное свойство:

Предложение 1. Для любой экспоненциальной категории \mathbf{A} и любого морфизма $F: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{U}(\mathbf{A})$ графов существует единственная стрелка $F': \mathbf{F}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{A}$ в EXP такая, что $\mathbf{U}(F')\mathbf{H}_X = F$.

Доказательство. Конструкция F' требует от нас выполнения следующих условий:

$$F'(X) = : F(X), : F'(T) = : F(T), F'(A \supset B) = F'(A) \supset F'(B),$$

$$F'(\ulcorner f \urcorner) = \ulcorner F'(f) \urcorner, F'(f^s) = F'(f)^s.$$

Требуется проверить, что F' определен правильно, т. е. что для всех $f, g: A \vdash B$ в $\mathbf{F}(X)$ $f = g$ влечет $F'(f) = : F'(g)$. Последнее очевидно, поскольку никаких других, кроме нужных нам, тождеств в $\mathbf{F}(X)$ не выполняется. ■

(Здесь и в дальнейшем ■ означает конец доказательства.)

Подобное универсальное свойство означает, что F есть функтор $GRPH \rightarrow EXP$, левосопряженный к \mathbf{U} с сопряжением $\mathbf{H}_X: Id \rightarrow \mathbf{U}F$. Для экспоненциальных категорий можно определить также понятие подстановки доказательств, что определяется следующим предложением:

Предложение 2. Для данной экспоненциальной категории \mathbf{A} , индетерминанта $x: A_0 \vdash A$ над \mathbf{A} и стрелки $a: A_0 \vdash A$ существует единственный функтор $S_x^a: \mathbf{A}[x] \rightarrow \mathbf{A}$, такой, что $S_x^a(x) = a$ и $S_x^a\mathbf{H}_X = 1_{\mathbf{A}}$.

Доказательство основывается на доказательстве более общего случая декартово замкнутых категорий в [Lambek Scott 1989, p.58]. Вначале докажем, что:

для данной категории \mathbf{A} и индетерминанта $x: A_0 \vdash A$ над \mathbf{A} , функтора $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и любой стрелки $b: F(A_0) \vdash F(A)$ в \mathbf{B} имеется единственный функтор $F': \mathbf{A}[x] \rightarrow \mathbf{B}$, такой, что $F(x) = b$ и $F'\mathbf{H}_X = F$.

Каждое доказательство $\varphi(x)$ при допущении x может иметь следующую форму:

$$k, x, \chi(x)\psi(x),$$

где k есть стрелка в \mathbf{A} , т. е. постоянный полином. Решающим шагом является определение $F'(\varphi(x))$. Определим индуктивно:

$$F'(k) = F(k), F'(x) = b, F'(\chi(x)\psi(x)) = F'(\chi(x)) F'(\psi(x)),$$

$$F'(\ulcorner \psi(x) \urcorner) = \ulcorner F'(\psi(x)) \urcorner, F'(\psi(x)^s) = (F'(\psi(x)))^s.$$

Остается лишь показать, что F' определен на полиномах, а не на доказательствах, то есть, что $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$ влечет $F'(\varphi(x)) = F'(\varphi'(x))$.

Если в последнем случае писать $\varphi(x) \equiv \varphi'(x)$, то достаточно

проверить, что \equiv имеет все свойства подстановки и отвечает всем тождествам экспоненциальной категории. Например, чтобы проверить, что $\lceil \varphi(x) \rceil^s \equiv \varphi(x)$, мы вычисляем $\mathbf{F}(\lceil \varphi(x) \rceil^s) = (\mathbf{F}'(\lceil \varphi(x) \rceil^s))^s = (\mathbf{F}'(\lceil \mathbf{F}'(\varphi(x)) \rceil))^s$ и т. д.

Теперь, чтобы получить доказательство нашего предложения, достаточно положить $\mathbf{F} = \mathbf{1}_A$. ■

Наделяя экспоненциальные категории дополнительной структурой, мы одновременно получаем различные категорные импликативные исчисления, соответствующие логическим исчислениям. Так, если мы добавим к нашей системе аксиом новую аксиому, выглядящую следующим образом:

$$\beta_{BC}^A: B \supset C \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C),$$

то получаем импликативное исчисление, соответствующее системе минимальной импликативной логики **IB** [Карпенко 1993, с.230]. Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f: B \vdash C}{1_A \supset f: A \supset B \vdash A \supset C}$$

Для этого достаточно положить

$$1_A \supset f = (\beta_{BC}^A \lceil f \rceil)^s$$

Аксиому **B** мы теперь получаем в следующем виде:

$$\lceil \beta_{BC}^A \rceil: T \vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

Для **IB**-импликативного исчисления, как нетрудно показать, имеет место следующая теорема дедукции:

Теорема 1 (теорема дедукции). *В **IB**-импликативном исчислении с каждым доказательством $\varphi(x_1, \dots, x_m): B \vdash C$ из допущений $x_1: T \vdash A_1, \dots, x_m: T \vdash A_m$ может быть ассоциирована стрелка $1_{A_1} \supset (\dots \supset (1_{A_m} \supset \varphi(x_1, \dots, x_m)))$, не зависящая от x_1, \dots, x_m .*

Доказательство. Будем писать $1_{A_1} \supset \psi(x) = k_{x \in A} \varphi(x)$, где индекс $x \in A$ указывает, что x имеет тип A . Заметим, что для каждого доказательства $\varphi(x): B \vdash C$ допущение $x: T \vdash A$ должно иметь одну из следующих форм:

- (i) $k: B \vdash C$, доказательство **IB**-исчисления;
- (ii) $x: T \vdash A$ с $B = T$ и $C = A$;
- (iii) $\chi(x)\psi(x)$, где $\chi(x) = B \vdash D$, $\psi(x) = D \vdash C$.
- (iv) $1_{A_1} \supset \psi(x)$, где $\psi(x): B \vdash C$.

Во всех случаях $\chi(x)$ и $\psi(x)$ являются более краткими доказательствами, чем $\varphi(x)$, и мы определяем индуктивно:

- (i) $k_{x \in A} k = 1_A \supset k$;
- (ii) $k_{x \in A} x = 1_A \supset x$;
- (iii) $k_{x \in A} (\chi(x)\psi(x)) = 1_A \supset \chi(x)\psi(x)$;
- (iv) $k_{x \in A} 1_{A_1} \supset \psi(x) = 1_A \supset (1_{A_1} \supset \psi(x))$.

Поскольку речь идет об индукции по длине доказательства $\varphi(x)$, то формально можно было бы определить эту длину как 0 в случаях (i) и (ii), как сумму длин $\chi(x)$ и $\psi(x)$ плюс один в случае (iii), и как длину $\psi(x)$ плюс один в случае (iv). ■

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к **IB**-импликативному исчислению аксиомы, являющиеся категорными аналогами аксиом **C**, **W**, **K**:

$$\begin{aligned} \gamma_{BC}^A: A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C) \\ w_{AB}: A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B \\ \kappa_{A^B}: A \vdash B \supset A \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: A \vdash B \supset C}{f^\gamma: B \vdash A \supset C}$$

(достаточно положить $f^\gamma = (\gamma_{BC}^A \overline{f^\neg})^s$)

$$\frac{f: A \vdash A \supset B}{f^w: A \vdash B}$$

(достаточно положить $f^w = (w_{AB} \overline{f^\neg})^s$)

$$\frac{\begin{array}{l} O_A: A \vdash T \\ f: T \vdash A \end{array}}{f^\kappa: B \vdash A}$$

(где $O_A = (\kappa_{AT}^A)^s, f^\kappa = O_B f$).

IBCWK-экспоненциальную категорию мы получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$((1_B \supset \overline{1_B^\neg})^s = f, \quad f^{\gamma\gamma} = f,$$

$$(\overline{f^\neg})^w = f, \text{ где } f: T \vdash C.$$

$$f = O_A, \text{ для всех } f: A \vdash T.$$

Последнее уравнение утверждает, что T является терминальным объектом.

Аналогично комбинаторной полноте для множества комбинаторов $\{B, C, W, K\}$ мы получаем следующую теорему для *IBCWK*-экспоненциальных категорий:

Теорема (функциональная полнота). Для любого полинома $\varphi(x_1, \dots, x_m): B \vdash C$ по индетерминантам $x_i: T \vdash A_1, \dots, x_m: T \vdash A_m$ над *IBCWK*-экспоненциальной категорией по любой дедуктивно ассоциированной стрелке $K_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m} \varphi(x_1, \dots, x_m)$, не зависящей от x_1, \dots, x_m , мы можем получить единственную стрелку f^φ такую, что $f^\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_m)$, где $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Доказательство. Достаточно применить для нашего случая алгоритм, позволяющий решить для любого комбинаторного терма стратифицирован он или нет (см. [Curry 1969], [Hindley 1969]). Однако этот алгоритм несколько сложен, чтобы его можно было описать формально. ■

Подобный результат позволяет теперь построить изоморфизм между типовым лямбда-исчислением и экспоненциальными категориями, т.е. говорить об эквивалентности категорий λ -*CALC* и *EXP*_{IBCWK}, где λ -*CALC* есть категория, чьими объектами являются типовые λ -исчисления, а стрелками - переводы, и *EXP*_{IBCWK} есть категория, чьими объектами являются *IBCWK*-экспоненциальные категории, а стрелками — экспоненциальные функторы.

2. Секвенциальные дедуктивные системы и экспоненциальные мультикатегории

Сформулируем понятие секвенциальной дедуктивной системы, следуя [Lambek 1988]. Секвенциальная дедуктивная система представляет собой мультиграф, состоящий из класса стрелок (называемых также "секвенциями") и класса объектов (иногда называемых "типами") и двух отображений

Начало: $\{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}^*$

Конец: $\{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}$,

где $\{\text{объекты}\}^*$ представляет собой свободный моноид, порожденный классом объектов, его элементами являются последовательности $\Gamma = A_1 \dots A_n$ объектов. Заметим, что n может быть равно нулю и в этом случае Γ представляет собой пустую последовательность. Стрелка $f: \vdash B$ также называется элементом B .

Чтобы получить минимальное секвенциальное дедуктивное исчисление в генценовском стиле (но без структурных правил), введем специальную стрелку

$$1_A: A \vdash A$$

и бинарную операцию на стрелках:

$$\frac{f: \Theta \vdash A \quad g: \Gamma A \Delta \vdash B}{g \langle f \rangle: \Gamma \Theta \Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Мультикатегория есть дедуктивная система, в которой следующие уравнения между доказательствами имеют место:

$$1_A \langle f \rangle = f, \quad g \langle 1_A \rangle = g,$$

$$h \langle g \langle f \rangle \rangle = h \langle g \rangle \langle f \rangle, \quad g' \langle f \rangle \langle f' \rangle = g' \langle f' \rangle \langle f \rangle$$

$$\text{для всех } f: \Lambda \vdash A, g: \Gamma A \Delta \vdash B, g \langle f \rangle: \Gamma \Lambda \Delta \vdash B, h: \Gamma' B \Delta' \vdash C,$$

$$f': \Lambda' \vdash A', g': \Gamma A \Delta A' \vdash C.$$

Импликативное секвенциальное дедуктивное исчисление **GI** мы получаем при введении специальных стрелок

$$\varepsilon_{AB}: A (A \supset B) \vdash B$$

$$i: \vdash T$$

и правил

$$\frac{f: A \Delta \vdash B}{f^\varepsilon: \Delta \vdash A \supset B}$$

$$\frac{f: \Gamma \Delta \vdash C}{f^i: \Gamma T \Delta \vdash C}$$

Как и в случае импликативного дедуктивного исчисления, легко видеть, что наше импликативное секвенциальное дедуктивное исчисление **GI** соответствует системе **I**. Действительно, мы получаем:

а) аксиому **I** в виде:

$$((1_A)^i)^\varepsilon: T \vdash A \supset A$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{f: T \vdash A \quad g: T \vdash A \supset B}{f \langle \varepsilon \langle g \rangle \rangle \langle i \rangle: T \vdash B}$$

Мы определяем *экспоненциальную мультикатегорию*, надевая мультикатегорию **A** введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\varepsilon \langle f^\varepsilon \rangle = f, \quad \text{для всех } f: A \Gamma \vdash B,$$

$$f^i \langle i \rangle = f, \quad \text{для всех } f: \Gamma \Delta \vdash C.$$

В частности, $(\varepsilon_{AB})^\varepsilon = 1_{A \supset B}$, $(i)^i = 1_T$.

С помощью введенных правил нетрудно получить следующее правило:

$$\frac{f: \Delta \vdash A \quad g: \Gamma B \Delta \vdash C}{g\{f\}: \Gamma (A \supset B) \Delta \vdash C} \{-\}$$

Для этого достаточно положить:

$$g\{f\} = g \langle \varepsilon \langle f \rangle \rangle.$$

Если мы теперь введем в нашей системе новую специальную стрелку, выглядящую следующим образом:

$$\beta_{BC}^A: B \supset C \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$$

то получим секвенциальное импликативное исчисление **GIB**, соответствующее системе минимальной импликативной логики **IB** [Карпенко 1993, с.230]. Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f: B \Delta \vdash C}{f^\beta: A (A \supset B) \Delta \vdash C} \text{ (слабая транзитивность).}$$

Для этого достаточно положить

$$f^\beta = \varepsilon \langle \varepsilon \langle \beta \langle f^\varepsilon \rangle \rangle \rangle.$$

Аксиому **B** получаем теперь в виде следующей стрелки:

$$(\beta_{BC}^A)^{\varepsilon^i}: T \vdash (B \supset C) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)).$$

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к секвенциальному импликативному исчислению **GIB** аксиомы, являющиеся категорными аналогами аксиом **C**, **W**, **K**:

$$\begin{aligned} \gamma_{BC}^A: A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C) \\ w_{AB}: A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B \\ \kappa_A^B: A \vdash B \supset A \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: B A \Delta \vdash C}{f^\gamma: A B \Delta \vdash C} \text{ (перестановка)}$$

(достаточно положить $f^\gamma = \varepsilon \langle \varepsilon \langle \gamma \langle f^{\varepsilon\varepsilon} \rangle \rangle \rangle$)

$$\frac{f: A A \Delta \vdash B}{f^w: A \Delta \vdash B} \text{ (сокращение)}$$

(достаточно положить $f^w = \varepsilon \langle w \langle f^{\varepsilon\varepsilon} \rangle \rangle$)

$$\frac{f: \Delta \vdash A}{f^\kappa: B \Delta \vdash A} \text{ (ослабление)}$$

(где $f^\kappa = \varepsilon \langle \kappa \langle f \rangle \rangle$).

GIBCWK-экспоненциальную мультикатегорию получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$\begin{aligned}
g\langle f^\beta \rangle &= (g\langle f \rangle)^\beta, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: B \vdash \Delta; \\
g^\beta \langle f \rangle &= (g\langle f \rangle)^\beta, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: CB \vdash \Delta; \\
f^{\gamma\gamma} &= f, \text{ для всех } f: AB\Delta \vdash C; \\
g\langle f^\gamma \rangle &= (g\langle f \rangle)^\gamma, \text{ для всех } f: AB\Delta \vdash C; g: C\Gamma \vdash D; \\
g^\gamma \langle f \rangle &= (g\langle f \rangle)^\gamma, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: CDB\Gamma \vdash E; \\
(f^{ii})^w \langle i \rangle &= f, \text{ для всех } f: \Delta \vdash C; \\
g\langle f^w \rangle &= (g\langle f \rangle)^w, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: B\Gamma \vdash C; \\
g^w \langle f \rangle &= (g\langle f \rangle)^w, \text{ для всех } f: \Delta \vdash B; g: CCB\Gamma \vdash D; \\
f &= O_A, \text{ где } O_A = i^k \text{ и } f: A \vdash T \text{ (т.е. } T \text{ является терминальным} \\
&\text{объектом);} \\
g\langle f^k \rangle &= (g\langle f \rangle)^k, \text{ для всех } f: A\Delta \vdash B; g: B\Gamma \vdash C; \\
g^k \langle f \rangle &= (g\langle f \rangle)^k, \text{ для всех } f: \Delta \vdash B; g: B\Gamma \vdash C.
\end{aligned}$$

3. Свободные экспоненциальные мультикатегории

Для данного мультиграфа \mathbf{G} мы можем сконструировать импликативные исчисления $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ и свободную экспоненциальную мультикатегорию $\mathbf{F}(\mathbf{G})$, порожденную \mathbf{G} . Объекты этой мультикатегории получаются индуктивно из объектов \mathbf{G} с помощью операции \supset . Ее секвенции получаются из секвенций \mathbf{G} путем присоединения базисных секвенций $1_A, \varepsilon_{AB}, i_A$ и т. д. и формирования новых операций из старых с помощью правил $(-)^{\varepsilon}, (-)^i$ и т.д. Наконец, тождества между сравнимыми секвенциями в $\mathbf{F}(\mathbf{G})$ будут те и только те, которые следуют из тождеств в \mathbf{G} , и мультикатегорные тождества

$$h \langle g \langle f \rangle \rangle = h \langle g \rangle \langle f \rangle, g' \langle f \rangle \langle f' \rangle = g' \langle f'' \rangle \langle f \rangle.$$

Помимо этого добавляются еще тождества

$$\varepsilon \langle f^\varepsilon \rangle = f, (\varepsilon \langle g \rangle)^\varepsilon = g, (g \langle i \rangle)^i = g, f^i \langle i \rangle = f,$$

и т. п., рассмотренные ранее.

Введем теперь понятие мультифунктора, используя следующие определения:

Определение 1. Мультифунктор \mathbf{F} из мультикатегории \mathbf{M} в мультикатегорию \mathbf{M}' представляет собой отображение класса объектов \mathbf{M} в класс объектов \mathbf{M}' вместе с отображением из класса стрелок \mathbf{M} в класс стрелок \mathbf{M}' такое, что если $f: A_1 \dots A_n \vdash B$ есть стрелка в \mathbf{M} , то $\mathbf{F}(f): \mathbf{F}(A_1) \dots \mathbf{F}(A_n) \vdash \mathbf{F}(B)$ есть стрелка в \mathbf{M}' и $\mathbf{F}(1_A) = 1_{\mathbf{F}(A)}$, $\mathbf{F}(g \langle f \rangle) = \mathbf{F}(g) \langle \mathbf{F}(f) \rangle$.

Определение 2. Экспоненциальный мультифунктор \mathbf{F} из экспоненциальной мультикатегории \mathbf{M} в экспоненциальную мультикатегорию

рию M' представляет собой мультифунктор, сохраняющий экспоненциальную структуру, т. е.

$$F(T) = T, F(A \supset B) = F(A) \supset F(B), F(\varepsilon_{AB}) = \varepsilon_{F(A)F(B)}, F(i_A) = i_{F(A)}.$$

Пусть U будет стирающим мультифунктором, тогда мультифунктор $G \rightarrow UF(G)$ будет, как известно, полным и точным [Lambek 1993] (полнота свидетельствует о том, что мультифунктор не порождает никаких новых секвенций по сравнению со старыми, а точность свидетельствует об отсутствии новых тождеств между секвенциями).

Пусть G будет *GIBCWK*-мультикатегорией. Для экспоненциального *GIBCWK*-мультифунктора F (т. е. сохраняющего *BCWK*-структуру G) имеет место следующая теорема:

Теорема 2. (устранение сечения). *Если стрелки $\varepsilon, i, \beta, \gamma, w, k$ заменить на правила $\{-\}, (-)^i, (-)^\beta, (-)^\gamma, (-)^w, (-)^k$, то любая секвенция в $UF(G)$, сконструированная с помощью правил сечения, будет эквивалентна секвенции, сконструированной без применения правила сечения.*

Доказательство. Для доказательства, прежде всего, без потери общности допускаем, что стрелки $f: \Lambda \vdash A$ и $g: \Gamma \Delta \vdash B$ уже были получены без применения правила сечения. Позднее покажем, что $g < f >$ эквивалентна секвенции, в конструирование которой были вовлечены сечения меньшей "степени", причем *степень* сечения $g < f >$ определяется как $d(\Lambda) + d(\Gamma) + d(\Delta) + d(A) + d(B)$, где $d(A)$ есть число вхождений всех импликаций в A и $d(\Gamma) = d(A_1) + \dots + d(A_m)$.

Случаи для импликации рассмотрены в [Lambek 1993, с.193] (Ламбек использует "\" вместо "\supset"). Нам остается рассмотреть случаи для дополнительных правил (слабой транзитивности, перестановки, сокращения и ослабления). Здесь возможно следующее:

1. На последнем шаге конструирования f используется дополнительное правило.
2. На последнем шаге конструирования g используется дополнительное правило.
3. На последнем шаге конструирования и f и g используется дополнительное правило.

В случае *слабой транзитивности* получаем:

(1) Пусть $\Lambda = (A' \supset B') \Delta'$ и $f = f'^\beta$. Если мы имеем дело с $g: \Gamma \Delta \vdash B$, то вначале с помощью i -стрелок приводим g к виду $g: A \Delta \vdash B$. Затем мы получаем:

$$\frac{\frac{f': B'\Delta' \vdash A}{f'{}^\beta: A'(A' \supset B')\Delta' \vdash A} \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f'{}^\beta \rangle: A'(A' \supset B')\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f': B'\Delta' \vdash A \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f' \rangle: B'\Delta'\Delta \vdash B}}{(g \langle f' \rangle)^\beta: A'(A' \supset B')\Delta'\Delta \vdash B},$$

где новое сечение имеет меньшую степень. Более того, легко видеть, что $g \langle f'{}^\beta \rangle = (g \langle f' \rangle)^\beta$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'(A' \supset B')\Delta'$, $g = g'^\beta$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{f: \Delta \vdash A \quad \frac{g': B'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'{}^\beta: A'(A' \supset B')\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{(сечение)} \quad g'{}^\beta \langle f \rangle: A'(A' \supset B')\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{f: \Delta \vdash A \quad g': B'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{(сечение)} \quad \frac{g' \langle f \rangle: B'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}{(g' \langle f \rangle)^\beta: A'(A' \supset B')\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}$$

Более того, легко видеть, что $g'{}^\beta \langle f \rangle = (g' \langle f \rangle)^\beta$ в силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории.

(3) Пусть $\Lambda = (A' \supset B')\Delta'$, $f = f'{}^\beta$, $\Gamma A\Delta = D'(D' \supset C')\Delta'$, $g = g'^\beta$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f': B'\Delta' \vdash A}{f'{}^\beta: A'(A' \supset B')\Delta' \vdash A} \quad \frac{g': C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'{}^\beta: D'(D' \supset C')\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{(сечение)} \quad g'{}^\beta \langle f'{}^\beta \rangle: D'(D' \supset C')\Delta_1 A'(A' \supset B')\Delta'\Delta_2 \vdash B$$

Заменим все это на:

$$\frac{\frac{f': B'\Delta' \vdash A}{f'{}^\beta: A'(A' \supset B')\Delta' \vdash A} \quad g': C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{(сечение)} \quad \frac{g' \langle f'{}^\beta \rangle: C'\Delta_1 A'(A' \supset B')\Delta'\Delta_2 \vdash B}{(g' \langle f'{}^\beta \rangle)^\beta: D'(D' \supset C')\Delta_1 A'(A' \supset B')\Delta'\Delta_2 \vdash B}$$

При этом $g'{}^\beta \langle f'{}^\beta \rangle = (g' \langle f'{}^\beta \rangle)^\beta$ (следует в силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории).

Для перестановки возможны следующие случаи:

(1) Пусть $\Lambda = A'B'\Delta'$ и $f = f'^{\gamma}$. Если мы имеем дело с $g: \Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью i -стрелок приводим g к виду $g: A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\frac{\frac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\gamma}: A'B'\Delta' \vdash A} \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f'^{\gamma} \rangle: A'B'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f': B'A'\Delta' \vdash A \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f' \rangle: B'A'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}}{(g \langle f' \rangle)^{\gamma}: A'B'\Delta'\Delta \vdash B}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g \langle f'^{\gamma} \rangle = (g \langle f' \rangle)^{\gamma}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'B'\Delta'$, $g = g'^{\gamma}$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad \frac{g': A'B'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^{\gamma}: B'A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}}{g'^{\gamma} \langle f \rangle: B'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad g': A'B'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' \langle f \rangle: A'B'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}}{(g' \langle f \rangle)^{\gamma}: B'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\gamma} \langle f \rangle = (g' \langle f \rangle)^{\gamma}$.

(3) Пусть $\Lambda = A'B'\Delta'$, $f = f''$, $A\Delta = C'D'\Delta'$, $g = g''$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{\frac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\gamma}: A'B'\Delta' \vdash A} \quad \frac{\frac{g': D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^{\gamma}: C'D'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}}{g'^{\gamma} \langle f'^{\gamma} \rangle: C'D'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}}$$

Заменим все это на:

$$\frac{\frac{\frac{f': B'A'\Delta' \vdash A}{f'^{\gamma}: A'B'\Delta' \vdash A} \quad g': D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' \langle f'^{\gamma} \rangle: D'C'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}}{(g' \langle f'^{\gamma} \rangle)^{\gamma}: C'D'\Delta_1 A'B'\Delta'\Delta_2 \vdash B}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\gamma} \langle f'^{\gamma} \rangle = (g' \langle f'^{\gamma} \rangle)^{\gamma}$.

Для сокращения получаем:

(1) Пусть $\Lambda = A'A'\Delta'$ и $f = f'^w$. Если мы имеем дело с $g: \Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью i -стрелок приводим g к виду $g: A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\frac{\frac{f': A'A'\Delta' \vdash A}{f'^w: A'\Delta' \vdash A} \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f'^w \rangle: A'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f': A'A'\Delta' \vdash A \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f' \rangle: A\Delta'\Delta \vdash B}}{(g \langle f' \rangle)^w: A'B'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g \langle f'^w \rangle = (g \langle f' \rangle)^w$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'A'\Delta'$, $g = g'^w$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad \frac{g': A'A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^w: A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^w \langle f \rangle: A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f: \Lambda \vdash A \quad g': A'A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' \langle f \rangle: A'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}}{(g' \langle f \rangle)^w: A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^w \langle f \rangle = (g' \langle f \rangle)^w$.

(3) Пусть $\Lambda = A'A'\Delta'$, $f = f'^w$, $\Gamma A\Delta = C'D'\Delta'$, $g = g'^w$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f': A'A'\Delta' \vdash A}{f'^w: A'\Delta' \vdash A} \quad \frac{g': D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^w: C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^w \langle f'^w \rangle: C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\frac{\frac{\frac{f': A'A'\Delta' \vdash A}{f'^w: A'\Delta' \vdash A} \quad g': D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' \langle f'^w \rangle: D'C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B}}{(g' \langle f'^w \rangle)^w: C'\Delta_1 A'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^w \langle f'^w \rangle = (g' \langle f'^w \rangle)^w$.

Для *ослабления* получаем:

(1) Пусть $\Lambda = A'\Delta'$ и $f = f'^{\kappa}$. Если мы имеем дело с $g: \Gamma A\Delta \vdash B$, то вначале с помощью i -стрелок приводим g к виду $g: A\Delta \vdash B$. Затем получаем:

$$\frac{\frac{f': A'\Delta' \vdash A}{f'^{\kappa}: B'A'\Delta' \vdash A} \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f'^{\kappa} \rangle: B'A'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f': A'\Delta' \vdash A \quad g: A\Delta \vdash B}{g \langle f' \rangle: A'\Delta'\Delta \vdash B}}{(g \langle f' \rangle)^{\kappa}: B'A'\Delta'\Delta \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g \langle f'^{\kappa} \rangle = (g \langle f' \rangle)^{\kappa}$.

(2) Пусть $\Gamma A\Delta = A'\Delta'$, $g = g'^{\kappa}$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f: \Delta \vdash A \quad \frac{g': A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^{\kappa}: B'A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^{\kappa} \langle f \rangle: B'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим это выражение на:

$$\frac{\frac{f: \Delta \vdash A \quad g': A'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' \langle f \rangle: A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B}}{(g' \langle f \rangle)^{\kappa}: B'A'\Delta_1 \Lambda \Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств **GIBCWK**-экспоненциальной мультикатегории получаем $g'^{\kappa} \langle f \rangle = (g' \langle f \rangle)^{\kappa}$.

(3) Пусть $\Lambda = A'\Delta'$, $f = f'^{\kappa}$, $\Gamma A\Delta = C'\Delta'$, $g = g'^{\kappa}$. Допустим, что A содержится в $\Delta' = \Delta_1 A \Delta_2$. Тогда имеем:

$$\frac{\frac{f': A'\Delta' \vdash A}{f'^{\kappa}: B'A'\Delta' \vdash A} \quad \frac{g': C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g'^{\kappa}: D'C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}}{g'^{\kappa} \langle f'^{\kappa} \rangle: D'C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

Заменим все это на:

$$\frac{\frac{\frac{f': A'\Delta' \vdash A}{f'^{\kappa}: B'A'\Delta' \vdash A} \quad g': C'\Delta_1 A \Delta_2 \vdash B}{g' \langle f'^{\kappa} \rangle: C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2 \vdash B}}{(g' \langle f'^{\kappa} \rangle)^{\kappa}: D'C'\Delta_1 B'A'\Delta'\Delta_2 \vdash B} \text{ (сечение)}$$

В силу тождеств *GIBCWK*-экспоненциальной мультикатегории получаем $g^{rk} < f^{rk} > = (g' < f'^k >)^k$, что и заканчивает доказательство. ■

4. Секвенциальные дедуктивные метасистемы

Существует естественный способ описания категорных тождеств, связанный с формулированием так называемого *внутреннего (типового) языка* мультикатегорий (см., например, [Lambek 1989, p. 224]). С этой целью вводится счетное множество переменных каждого типа и секвенции интерпретируются как (мультилинейные) операции.

Определим индуктивно *термы* всех типов:

- 1) каждая переменная есть терм своего типа,
- 2) если $f: A_1 \dots A_m \vdash A_{m+1}$ представляет собой секвенцию и a_i есть терм типа A_i , для $i = 1, \dots, m$, то $f a_1 \dots a_m$ есть терм типа A_{m+1} .

Заметим, что вводятся переменные всех типов, но не переменные для типов.

Тождество (или скорее *доказуемое тождество*) термов одного и того же типа есть отношение конгруэнтности, удовлетворяющее обычной подстановке термов вместо свободных переменных. Таким образом, из $\varphi(x) = \varphi'(x)$ можно вывести $\varphi(a) = \varphi'(a)$, где a есть любой терм того же самого типа, что и переменная x . В принципе, однако, можно декларировать переменные и записывать $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$. Помимо обычных правил для равенства допускаются также следующие правила для тождественной секвенции и сечения:

$$\begin{aligned} 1_A x &= x, \\ g \langle f \rangle u w v &= g u f w v. \end{aligned}$$

Здесь x есть переменная типа A , $u = x_1 \dots x_m$ является последовательностью переменных типа $\Gamma = A_1 \dots A_m$, v есть последовательность переменных тип Δ и w есть последовательность переменных типа Λ .

Описание внутреннего языка на этом практически заканчивается. Тождества между секвенциями теперь вполне определимы: про две секвенции $f, g: A_1 \dots A_m \vdash A_{m+1}$ говорят, что они *тождественны*, если $f x_1 \dots x_m = g x_1 \dots x_m$ доказуемо во внутреннем языке. Существенно, что x_{mi} все различны, даже если две A_i могут совпадать. Отсюда можно легко вывести описанные ранее тождества в

мультикатегориях. Например, для $f : \Delta \vdash A$, $g : \Gamma A \Delta \vdash B$ и $h : \Gamma' B \Delta' \vdash C$ вычисляем:

$$\begin{aligned} h \langle g \langle f \rangle \rangle u' u w v v' &= h u' g \langle f \rangle u w v v' = h u' g u f w v v' = h \langle g \rangle u' u f w v v' = \\ &= h \langle g \rangle \langle f \rangle u' u w v v'. \end{aligned}$$

Во внутреннем языке единственность секвенций может быть выражена также в виде правил вывода, отсюда тождества имплекативной мультикатегории могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon y f^e u = f y u, & \frac{\varepsilon y g_1 u = \varepsilon y g_2 u}{g_1 u = g_2 u} \\ f^i u i v = f u v, & \frac{g_1 u i v = g_2 u i v}{g_1 u s_0 v = g_2 u s_0 v}, \end{array}$$

где s_0 есть переменная типа T ;

$$\frac{f^\beta u i i = f u i,}{g_1 u s_0 s_0 = g_2 u s_0 s_0},$$

где s_0 есть переменная типа T ;

$$\begin{array}{ll} f^{\gamma\gamma} u v w = f u v w, & \frac{g_1 u v w = g_2 u v w}{g_1 = g_2} \\ (f^{ii})^w = f u v, & \frac{g_1 u i i v = g_2 u i i v}{g_1 u s_0 s_0 v = g_2 u s_0 s_0 v}, \end{array}$$

где s_0 есть переменная типа T .

Существует еще одна возможность описания отношений между стрелками, связанная с конструкцией так называемой *метамультикатегории*. В этом случае, отправляясь от стрелок дедуктивной системы \mathbf{P} , строится новый секвенциальный язык, в котором формализуется дедуктивная металогика \mathbf{P}^2 системы \mathbf{P} , а тем самым и описываются отношения между стрелками, т. е. отношения между выводами (см. [Došen 1992]).

Объектами секвенциальной дедуктивной метасистемы \mathbf{P}^2 будут последовательности стрелок системы \mathbf{P} , т. е. последовательности типа $X = f_1 \dots f_m$. Поскольку m может быть равно нулю, то в этом случае X будет представлять собой пустую последовательность \emptyset . Стрелки (секвенции) будут представлять собой выражения вида $X \rightarrow f$, где X есть объект \mathbf{P}^2 , а f есть стрелка \mathbf{P} . Доказуемость секвенции $X \rightarrow f$ в соответствующей дедуктивной метасистеме будет означать утверждение о том, что исходя из стрелки X , мы можем сконструировать стрелку f , используя примитивные стрелки и примитивные операции. Иными словами, существует производная операция, отображающая X в f . Таким образом, система подоб-

ных секвенций будет представлять собой формализацию металогики производных правил исходной дедуктивной системы. Теорема такой метасистемы соответствует производной операции без посылок, т. е. секвенции $X \rightarrow f$, где X целиком и полностью сконструирована из \emptyset . Стрелка $\emptyset \rightarrow f$ будет называться элементом f .

Чтобы получить минимальное дедуктивное метаисчисление, вводим специальные стрелки

$$1_f: f \rightarrow f; \quad (\circ): fg \rightarrow g \circ f; \quad \mathbf{i}_f: \emptyset \rightarrow f,$$

где $f \circ g$ есть композиция f и g , и бинарную операцию на стрелках

$$\varphi: X \rightarrow f \quad \psi: YfZ \rightarrow g \quad (\text{сечение}).$$

$$\psi \langle \varphi \rangle: YXZ \rightarrow g$$

Пусть теперь \mathbf{S} есть импликативная дедуктивная система и \mathbf{S}^2 ее импликативная дедуктивная метасистема.

Предложение 3. Секвенция $\emptyset \rightarrow f$ доказуема в метасистеме \mathbf{S}^2 тогда и только тогда, когда f есть стрелка \mathbf{S} .

Доказательство. Слева направо показываем по длине доказательства, что если $X \rightarrow f$ доказуема в \mathbf{S}^2 , то все стрелки из X будут стрелками \mathbf{S} лишь тогда, когда f содержится в \mathbf{S} . В противоположную сторону индукция проходит также без затруднений. ■

Рассмотрим теперь, как отражается \mathbf{S} в металогики \mathbf{S}^2 , т. е. когда мы можем записывать в \mathbf{S} производные операции \mathbf{S}^2 . Мы увидим, что \mathbf{S} способно на это, если \mathbf{S}^2 замкнута относительно следующего правила:

$$\frac{(T \vdash A) X \rightarrow (B \vdash C)}{X \rightarrow (A \supset B \vdash A \supset C)} \quad (\text{дедукция}),$$

$$X \rightarrow (A \supset B \vdash A \supset C)$$

т. е. когда правило дедукции допустимо для \mathbf{S}^2 .

Рассмотрим следующий перевод, т. е. биекцию t из \mathbf{P} в \mathbf{P}^2 :

$$t(A \vdash B) = A \supset B,$$

$$t(\emptyset) = T,$$

$$t(X) = t(f_1 \dots f_m) = t(f_m \circ f_{m-1} \circ \dots \circ f_1),$$

$$t(X \rightarrow f) = t(X) \vdash t(f).$$

Пусть \mathbf{S} есть импликативная дедуктивная **IB**-система. Докажем следующее предложение:

Предложение 4. $X \rightarrow f$ доказуема в \mathbf{S}^2 тогда и только тогда, когда $t(X \rightarrow f)$ есть стрелка в \mathbf{S} .

Доказательство. Слева направо доказываем индукцией по длине доказательства $X \rightarrow f$ в \mathbf{S}^2 . Если $X = \emptyset$, то получаем $\emptyset \rightarrow f$. Но тогда $t(\emptyset \rightarrow f) = t(\emptyset) \vdash t(f) = T \vdash t(f)$. Поскольку $t(A \vdash B) = A \supset B$,

то $T \vdash A \supset B$ приводит к $A \vdash B$, т. е. к стрелке в \mathbf{S} . Если $X = fg$, то получаем доказуемую стрелку $fg \rightarrow g \circ f$. Но $t(fg \rightarrow g \circ f) = t(fg) \vdash t(g \circ f) = t(g \circ f) \vdash t(g \circ f)$, т. е. все сводится к единичной стрелке типа $1_A \supset B$. Справа налево по предложению 1 получаем $\emptyset \rightarrow (t(X) \vdash t(f))$ как доказуемую стрелку в \mathbf{S}^2 , а затем применяем стрелку (\circ) в виде $(T \vdash t(X))(t(X) \vdash t(f)) \rightarrow (T \vdash t(f))$ и сечение, получая $(T \vdash t(X)) \rightarrow (T \vdash t(f))$. Действуя аналогично, мы доходим до стрелок в последовательности X и для каждой такой стрелки $A \vdash B$ получаем $(A \vdash B) \rightarrow (T \vdash A \supset B)$. Используя обратную секвенцию для f , получаем $X \rightarrow f$. ■

Предложение 5. \mathbf{S}^2 замкнуто относительно правила дедукции.

Доказательство. Мы имеем:

- (1) $(T \vdash A) X \rightarrow (B \vdash C)$ в \mathbf{S}^2 тогда и только тогда, когда $t(X \circ (T \vdash A)) \vdash t(B \vdash C)$ в \mathbf{S}^2 ;
(2) тогда и только тогда, когда $t(X \circ (T \vdash A)) \vdash B \supset C$.

Но из $B \supset C$ с помощью стрелки β в \mathbf{S} и сечения получаем $t(X \circ (T \vdash A)) \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$, что можно записать как $t(X \circ (T \vdash A)) \vdash t(A \supset B \vdash A \supset C)$. Отсюда по предложению 4 получаем $(T \vdash A) X \rightarrow (A \supset B \vdash A \supset C)$. Поскольку $T \vdash A$ есть стрелка \mathbf{S} , то по предложению 3 $\emptyset \rightarrow (T \vdash A)$ и, применяя сечение, получаем $X \rightarrow (A \supset B \vdash A \supset C)$, что и требовалось доказать. ■

Заметим, что аналогично, применяя стрелку γ , можно получить правило

$$\frac{(T \vdash A) X \rightarrow (A \vdash B \supset C)}{X \rightarrow (B \vdash A \supset C)} ;$$

применяя стрелку w , получаем правило

$$\frac{(T \vdash A) X \rightarrow (A \vdash A \supset B)}{X \rightarrow (A \vdash B)} ;$$

применяя стрелку k , получаем правило

$$\frac{(T \vdash A) X \rightarrow (T \vdash A)}{X \rightarrow (B \vdash A)} .$$

Если добавить к \mathbf{S}^2 дополнительную метасвязку импликации \Rightarrow , то получаем импликативное секвенциальное дедуктивное метасчисление \mathbf{GP}^2 при введении специальных стрелок:

$$(\Rightarrow): fg \rightarrow f \Rightarrow g ,$$

где $f: A \vdash B, g: B \vdash C; f \Rightarrow g: B \supset A \vdash B \supset C,$

$$\varepsilon_{fg}: f(f \Rightarrow g) \rightarrow g$$

и правил

$$\frac{}{\varphi: fX \rightarrow g}$$

$$\varphi^\varepsilon: X \rightarrow f \Rightarrow g$$

$$\frac{\varphi: X Y \rightarrow f}{\text{где } \emptyset \text{ означает пустую стрелку, т. е. стрелку } \vdash} \quad \varphi^i: X \emptyset Y \rightarrow f$$

Точно так же можно ввести, помимо этого, следующие стрелки:

$$\beta_{gh}^f: g \Rightarrow h \rightarrow (f \Rightarrow g) \Rightarrow (f \Rightarrow h)$$

$$\gamma_{gh}^f: f \Rightarrow (g \Rightarrow h) \rightarrow g \Rightarrow (f \Rightarrow h)$$

$$\omega_{fg}: f \Rightarrow (f \Rightarrow g) \rightarrow f \Rightarrow g$$

$$\kappa_f^g: f \rightarrow g \Rightarrow f$$

Соответственно можно заменить эти стрелки на правила:

$$\frac{\varphi: g X \rightarrow h}{\varphi^b: f(f \Rightarrow g) X \rightarrow h} \quad (\text{слабая транзитивность})$$

(достаточно положить $\varphi^b = \varepsilon \langle \varepsilon \langle \beta \langle \varphi^g \rangle \rangle \rangle$)

$$\frac{\varphi: g f X \rightarrow h}{\varphi^y: f g X \rightarrow h} \quad (\text{перестановка})$$

(достаточно положить $\varphi^y = \varepsilon \langle \varepsilon \langle \gamma \langle \varphi^{\varepsilon \varepsilon} \rangle \rangle \rangle$)

$$\frac{\varphi: f f X \rightarrow g}{\varphi^o: f X \rightarrow g} \quad (\text{сокращение})$$

(достаточно положить $\varphi^o = \varepsilon \langle \omega \langle \varphi^{\varepsilon \varepsilon} \rangle \rangle$)

$$\frac{\varphi: X \rightarrow f}{\varphi^k: g X \rightarrow f} \quad (\text{ослабление})$$

(где $\varphi^k = \varepsilon \langle \kappa \langle \varphi \rangle \rangle$).

В этом случае мы получаем удвоение логики в метасистеме \mathbf{S}^2 , что приводит к метасистеме \mathbf{S}^{GIBWK} (см. о подобном удвоении [Došen 1988]). Нетрудно также, рассматривая соответствующие тождества на метастрелках, получить метамультিকатегории, отвечающие полученным метасистемам.

5. Дуальные дедуктивные системы и экспоненциальные категории

Среди различных стилей представления логических систем, основывающихся на различии в форме вывода, можно выделить так называемые представления в стиле Шютте. В этом случае выводы имеют форму $f: \vdash A_1 \dots A_m$, что означает, что f есть доказательство альтернатив $A_1 \dots A_m$ без каких-либо гипотез. Дж. Ламбек [Lambek 1994, p.153] предпочитает дуальное представление, основывающееся на использовании выводов $f: \Gamma \vdash$, поскольку в этом случае мы можем рассматривать f как мультилинейный оператор $\Gamma \vdash \mathcal{O}$

(можно рассматривать O как тип истинностных значений и выводы $A_1 \dots A_m \vdash O$ как m -сортные отношения).

Формулировки в стиле Шютте наводят на мысль о логических системах, дуальных к интуиционистским системам в смысле дуального ограничения: если в первом случае требуется, чтобы сукцедент секвенции состоял не более чем из одной формулы, то дуальное ограничение сводится к тому, что антецедент секвенции может состоять не более чем из одной формулы (см. [Czermak 1971]). Подобную систему с правилами введения и удаления, дуальную интуиционистской логике, строит, например, Н. Гудмен [Goodman 1981]. Ее переформулировка в виде исчисления секвенций, осуществленная В. А. Смирновым [Смирнов 1987, с.223], выглядит следующим образом:

основные секвенции: $A \rightarrow A$ и $A \rightarrow T$;

структурные правила: сечение, перестановка справа, добавление справа;

$$\frac{A \rightarrow \Delta}{A \wedge B \rightarrow \Delta} \quad \frac{B \rightarrow \Delta}{A \wedge B \rightarrow \Delta} \quad \frac{C \rightarrow \Delta \quad A \quad C \rightarrow \theta B}{C \rightarrow \Delta \theta A \wedge B}$$

$$\frac{A \rightarrow \Delta \quad B \rightarrow \theta}{A \vee B \rightarrow \Delta \theta} \quad \frac{C \rightarrow \Delta A}{C \rightarrow \Delta A \vee B} \quad \frac{C \rightarrow \Delta B}{C \rightarrow \Delta A \vee B}$$

$$\frac{A \rightarrow \Delta B}{A \Leftarrow B \rightarrow \Delta} \quad \frac{C \rightarrow \Delta A \quad B \rightarrow \theta}{C \rightarrow \Delta A \Leftarrow B \theta}$$

где $A \Leftarrow B$ означает коимпликацию (импликацию Брауэра), которой в алгебре соответствует псевдоразность.

Если вместо выводов в стиле Шютте $f: \vdash A_1 \dots A_m$, рассматривать однопосылочные выводы $f: B \vdash A_1 \dots A_m$ (что можно тогда понимать как доказательство альтернатив $A_1 \dots A_m$ исходя из гипотезы B), то можно сформулировать соответствующие косеквенциальные дедуктивные системы, в которых принимается дуальная концепция секвенции. Более того, можно сформулировать и дуальные импликативные дедуктивные системы и соответствующие им категории, рассматривая язык с дуальной связкой импликации.

Мы получаем коимпликативное исчисление, если мы допускаем, что существует формула \perp (= ложь) и бинарная операция \Leftarrow для образования коимпликации $A \Leftarrow B$ из двух данных формул A и B . Кроме этого, мы вводим следующие два правила вывода:

$$\frac{f: A \vdash B}{\lfloor f \rfloor: B \Leftarrow A \vdash \perp} \quad \frac{g: B \Leftarrow A \vdash \perp}{g_s: A \vdash B}$$

Нетрудно видеть, что наше коимпликативное исчисление будет соответствовать некоторой простейшей коимпликативной системе \mathbf{I}° , ибо:

а) мы имеем аксиому \mathbf{I}° в виде:

$$\perp 1_A \perp : A \Leftarrow A \vdash \perp$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{g: A \Leftarrow B \vdash \perp \quad f: A \vdash \perp}{fg_s: B \vdash \perp}$$

Категория, соответствующая рассматриваемой дедуктивной системе, есть дедуктивная система, в которой имеют место следующие уравнения между доказательствами:

$$f 1_A = f, \quad 1_B f = f, \quad (hg) f = h (gf),$$

для всех $f: A \vdash B, g: B \vdash C, h: C \vdash D$.

Мы определяем *коэкспоненциальную категорию*, наделяя категорию \mathbf{A} , подобную вышеприведенной, введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\perp f \perp_s = f; \quad \perp g_s \perp = g$$

$$\text{для всех } f: A \vdash B \text{ и } g: D \Leftarrow C \vdash \perp$$

Таким образом, для данного графа \mathbf{X} мы можем сконструировать коимпликативные исчисления $\mathbf{D}^\circ(\mathbf{X})$ и свободную коэкспоненциальную категорию $\mathbf{F}(\mathbf{X})^\circ$, порожденную \mathbf{X} .

Пусть \mathbf{GRPH} будет категорией графов, чьими объектами являются графы, и каждый морфизм $\mathbf{F}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ есть пара отображений $\mathbf{F}: \mathbf{Objects}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{Objects}(\mathbf{Y})$ и $\mathbf{F}: \mathbf{Arrows}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{Arrows}(\mathbf{Y})$, такая, что $f: X \rightarrow X'$ влечет $\mathbf{F}(f): \mathbf{F}(X) \rightarrow \mathbf{F}(X')$.

Пусть \mathbf{EXP}° будет категория коэкспоненциальных категорий, чьими объектами являются коэкспоненциальные категории, а стрелками функторы $\mathbf{F}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, сохраняющие коэкспоненциальную структуру, т.е.

$$\mathbf{F}(\perp) = \perp, \quad \mathbf{F}(A \Leftarrow B) = \mathbf{F}(A) \Leftarrow \mathbf{F}(B), \quad \mathbf{F}(\perp f \perp) = \perp \mathbf{F}(f) \perp,$$

$$\mathbf{F}(f_s) = \mathbf{F}(f)_s.$$

Пусть \mathbf{U} будет обычным стирающим функтором $\mathbf{EXP}^\circ \rightarrow \mathbf{GRPH}$. С каждым графом \mathbf{X} мы можем ассоциировать морфизм графов $\mathbf{H}_X: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{UF}(\mathbf{X})$ следующим образом: $\mathbf{H}_X(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ и, если $f: X \rightarrow Y$ есть стрелка в \mathbf{X} , то $\mathbf{H}_X(f) = f$ (классы эквивалентности

f рассматриваются как доказательства в $D^\circ(\mathbf{X})$. Мы имеем следующее универсальное свойство:

Предложение 6. Для любой коэкспоненциальной категории \mathbf{A} и любого морфизма $F: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{U}(\mathbf{A})$ графов существует единственная стрелка $F': \mathbf{F}(\mathbf{X})^\circ \rightarrow \mathbf{A}$ в EXP° такая, что $\mathbf{U}(F')\mathbf{H}_X = F$.

Доказательство. Конструкция F' требует от нас выполнения следующих условий:

$$F'(X) = : F(X), : F'(\perp) = : F(\perp), F'(A \leftarrow B) = F'(A) \leftarrow F'(B), \\ F'(\lfloor f \rfloor) = \lfloor F'(f) \rfloor, F'(f_s) = F'(f)_s.$$

Требуется проверить, что F' определен правильно, т. е. что для всех $f, g: A \vdash B$ в $F'(X)$, $f = g$ влечет $F'(f) = : F'(g)$. Последнее очевидно, поскольку никаких других, кроме требуемых нам, тождеств в $F'(X)$ не выполняется. ■

Подобное универсальное свойство означает, что F есть функтор $GRPH \rightarrow EXP^\circ$, левосопряженный к \mathbf{U} с сопряжением $\mathbf{H}_X: \mathbf{Id} \rightarrow \mathbf{UF}$. Для коэкспоненциальных категорий можно определить также понятие подстановки доказательств, что определяется следующим предложением:

Предложение 7. Для данной коэкспоненциальной категории \mathbf{A} , индетерминанта $x: A_0 \vdash A$ над \mathbf{A} и стрелки $a: A_0 \vdash A$ существует единственный функтор $S_x^a: \mathbf{A}[x] \rightarrow \mathbf{A}$ такой, что $S_x^a(x) = a$ и $S_x^a\mathbf{H}_X = \mathbf{1}_A$.

Доказательство Вначале докажем, что для данной категории \mathbf{A} и индетерминанта $x: A_0 \vdash A$ над \mathbf{A} , функтора $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и любой стрелки $b: F(A_0) \vdash F(A)$ в \mathbf{B} имеется единственный функтор $F': \mathbf{A}[x] \rightarrow \mathbf{B}$ такой, что $F'(x) = b$ и $F'\mathbf{H}_X = F$.

Каждое доказательство $\varphi(x)$ при допущении x может иметь следующую форму:

$$k, x, \chi(x)\psi(x),$$

где k есть стрелка в \mathbf{A} , т. е. постоянный полином. Решающим шагом является определение $F'(\varphi(x))$. Определим индуктивно:

$$F'(k) = F(k),$$

$$F'(x) = b,$$

$$F'(\chi(x)\psi(x)) = F'(\chi(x)) F'(\psi(x)).$$

$$F'(\lfloor \psi(x) \rfloor) = \lfloor F'(\psi(x)) \rfloor,$$

$$F'(\psi(x)_s) = (F'(\psi(x)))_s.$$

Остается лишь показать, что \mathbf{P} определен на полиномах, а не на доказательствах, т. е. что $\varphi(x) =_x \varphi'(x)$ влечет $\mathbf{P}(\varphi(x)) = \mathbf{P}(\varphi'(x))$. Если в последнем случае писать $\varphi(x) \equiv \varphi'(x)$, то достаточно проверить, что \equiv имеет все свойства подстановки и отвечает всем тождествам экспоненциальной категории. Например, чтобы проверить, что $\lfloor \varphi(x) \rfloor_s \equiv \varphi(x)$, мы вычисляем $\mathbf{P}(\lfloor \varphi(x) \rfloor_s) = (\mathbf{P}(\lfloor \varphi(x) \rfloor))_s = (\lfloor \mathbf{F}'(\varphi(x)) \rfloor)_s$ и т. д.

Теперь, чтобы получить доказательство нашего предложения, достаточно положить $\mathbf{F} = \mathbf{1}_A$. ■

Наделяя коэкспоненциальные категории дополнительной структурой, мы одновременно получаем различные категорные коимпликативные исчисления, соответствующие логическим исчислениям. Так, если мы добавим к нашей системе аксиом новую аксиому, выглядящую следующим образом:

$$\beta_{BC}^{\circ A}: (C \Leftarrow A) \Leftarrow (B \Leftarrow A) \vdash C \Leftarrow B,$$

то получим импликативное исчисление, соответствующее системе минимальной импликативной логики \mathbf{IB}° . Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f: B \vdash C}{f \Leftarrow 1_A: C \Leftarrow A \vdash B \Leftarrow A}.$$

Для этого достаточно положить

$$f \Leftarrow 1_A = (\beta_{BC}^{\circ A} \lfloor f \rfloor)_s$$

Аксиому \mathbf{B}° соответствующей логической системы мы теперь получаем в следующем виде:

$$\lfloor \beta_{BC}^{\circ A} \rfloor: ((C \Leftarrow A) \Leftarrow (B \Leftarrow A)) \Leftarrow (C \Leftarrow B) \vdash \perp$$

Для \mathbf{IB}° -импликативного дедуктивного исчисления, как нетрудно показать, имеет место следующая теорема дедукции:

Теорема 3 (теорема дедукции). *В \mathbf{IB}° -импликативном исчислении с каждым доказательством $\varphi(x_1, \dots, x_m): B \vdash C$ из допущений $x_1: A_1 \vdash \perp, \dots, x_m: A_m T \vdash \perp$ может быть ассоциирована стрелка $\varphi(x_1, \dots, x_m) \Leftarrow 1_{A_1} (\Leftarrow \dots) \Leftarrow 1_{A_m}$, не зависящая от x_1, \dots, x_m .*

Доказательство. Будем писать $\psi(x) \Leftarrow 1_{A_1} = k_{x \in A} \varphi(x)$, где индекс $x \in A$ указывает, что x имеет тип A . Заметим, что для каждого доказательства $\varphi(x): B \vdash C$ допущение $x: T \vdash A$ должно иметь одну из следующих форм:

- (i) $k: B \vdash C$, доказательство **IB**-исчисления;
- (ii) $x: T \vdash A$ с $B = T$ и $C = A$;
- (iii) $\chi(x)\psi(x)$, где $\chi(x) = B \vdash D$, $\psi(x) = D \vdash C$.
- (iv) $\psi(x) \Leftarrow 1_{A_1}$, где $\psi(x): B \vdash C$.

Во всех случаях $\chi(x)$ и $\psi(x)$ являются более краткими доказательствами, чем $\varphi(x)$, и мы определяем индуктивно:

- (v) $k_{x \in A} k = k \Leftarrow 1_A$;
- (vi) $k_{x \in A} x = x \Leftarrow 1_A$;
- (vii) $k_{x \in A} (\chi(x)\psi(x)) = \chi(x)\psi(x) \Leftarrow 1_A$;
- (viii) $k_{x \in A} \psi(x) \Leftarrow 1_{A_1} = (\psi(x) \Leftarrow 1_{A_1}) \Leftarrow 1_A$.

Поскольку речь идет об индукции по длине доказательства $\varphi(x)$, то формально можно было бы определить эту длину как 0 в случаях (i) и (ii), как сумму длин $\chi(x)$ и $\psi(x)$ плюс один в случае (iii), и как длину $\psi(x)$ плюс один в случае (iv). ■

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к **IB**^o-импликативному исчислению аксиомы, являющиеся категорными аналогами дуальных аксиом **C**^o, **W**^o, **K**^o :

$$\begin{aligned} \gamma_{BC}^{oA}: A \Leftarrow (B \Leftarrow C) \vdash B \Leftarrow (A \Leftarrow C) \\ w_{AB}^o: A \Leftarrow B \vdash A \Leftarrow (A \Leftarrow B) \\ \kappa_{A}^{oB}: B \Leftarrow A \vdash A \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\frac{f: A \Leftarrow C \vdash B}{f_{\gamma}: B \Leftarrow C \vdash A}$$

(достаточно положить $f_{\gamma} = (\gamma_{BC}^{oA} \lfloor f \rfloor)_s$)

$$\frac{f: A \Leftarrow B \vdash A}{f_w: A \vdash B}$$

(достаточно положить $f_w = (w_{AB}^o \lfloor f \rfloor)_s$)

$$\frac{\square_A: \perp \vdash A}{f_{\kappa}: A \vdash B}$$

(где $\square_A = (\kappa_{A}^{o\perp})_s$, $f_{\kappa} = \square_B f$).

IBCWK^o-коэкспоненциальную категорию мы получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$((f \leftarrow 1_B \perp 1_B)_s) = f,$$

$$f \gamma \gamma = f,$$

$$(\perp f \perp)^w = f, \text{ где } f: C \vdash \perp.$$

$$f = \square_A, \text{ для всех } f: \perp \vdash A.$$

Последнее уравнение утверждает, что \perp является инициальным объектом.

Аналогично комбинаторной полноте для множества комбинаторов $\{B, C, W, K\}$, мы получаем следующую теорему для $IBCWK^\circ$ -коэкспоненциальных категорий:

Теорема (функциональная полнота). Для любого полинома $\varphi(x_1, \dots, x_m): B \vdash C$ по индетерминантам $x_1: A_1 \vdash \perp, \dots, x_m: A_m \vdash \perp$ над $IBCWK^\circ$ -коэкспоненциальной категорией по любой дедуктивно ассоциированной стрелке $K_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_m \in A_m} \varphi(X_1, \dots, X_m)$, не зависящей от x_1, \dots, x_m , мы можем получить единственную стрелку f^φ такую, что $f^\varphi = \varphi_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m)$, где $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Дуальная секвенциальная дедуктивная система представляет собой мультиграф, состоящий из класса стрелок (называемых также "секвенциями") и класса объектов (иногда называемых "типами") и двух отображений

$$\text{Начало: } \{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}$$

$$\text{Конец: } \{\text{стрелки}\} \rightarrow \{\text{объекты}\}^*,$$

где $\{\text{объекты}\}^*$ представляет собой свободный моноид, порожденный классом объектов, его элементами являются последовательности $\Gamma = A_1 \dots A_n$ объектов. Заметим, что n может быть равно нулю и в этом случае Γ представляет собой пустую последовательность. Стрелка $f: B \vdash$ также называется элементом B .

Чтобы получить минимальное дуальное секвенциальное дедуктивное исчисление в генценовском стиле (но без структурных правил), введем специальную стрелку

$$1_A: A \vdash A$$

и бинарную операцию на стрелках:

$$\frac{g: B \vdash \Gamma A \Delta \quad f: A \vdash \Theta}{g[f]: B \vdash \Gamma \Theta \Delta} \text{ (сечение)}$$

$$g[f]: B \vdash \Gamma \Theta \Delta$$

Комультикатегория есть дедуктивная система, в которой имеют место следующие уравнения между доказательствами:

$$f[1_A] = f, \quad 1_A[g] = g,$$

$$h [g[f]] = h [g][f], \quad g' [f] [f'] = g' [f''] [f],$$

для всех $f: A \vdash C\Delta$, $g: B \vdash \Gamma A\Delta$, $g[f]: B \vdash \Gamma C\Delta$, $h: C \vdash \Gamma' B\Delta'$,
 $f': A' \vdash \Lambda'$, $g': B \vdash \Gamma A\Delta'$.

Коимпликативное косеквенциальное дедуктивное исчисление GI° мы получаем при введении специальных стрелок

$$\varepsilon^\circ_{BA}: A \vdash (B \Leftarrow A)B$$

$$i^\circ: T \vdash$$

и правил

$$\frac{f: A \vdash \Delta B}{f_\varepsilon: B \Leftarrow A \vdash \Delta}$$

$$\frac{f: C \vdash \Gamma \Delta}{f_i: C \vdash \Gamma \perp \Delta}$$

Как и в случае импликативного дедуктивного исчисления, легко видеть, что наше коимпликативное косеквенциальное дедуктивное исчисление GI° соответствует некоторой системе I° . Действительно, мы получаем:

а) аксиому I° в виде:

$$(1_A)_{i\varepsilon}: A \Leftarrow A \vdash \perp$$

б) правило *модус поненс* в виде:

$$\frac{g: A \Leftarrow B \vdash \perp \quad f: A \vdash \perp}{\varepsilon^\circ [g][f[i]]: B \vdash \perp}$$

Мы определяем *коэкспоненциальную мультикатегорию*, наделяя мультикатегорию \mathbf{A} введенными правилами вывода и дополнительными тождествами:

$$\varepsilon^\circ [f_\varepsilon] = f, \quad \text{для всех } f: B \vdash \Gamma A,$$

$$f_i [i^\circ] = f, \quad \text{для всех } f: C \vdash \Gamma \Delta.$$

В частности, $(\varepsilon^\circ_{BA})_\varepsilon = 1_{A \Leftarrow B}$, $(i^\circ_\perp)_i = 1_\perp$.

С помощью введенных правил нетрудно получить следующее правило:

$$\frac{f: A \vdash \Lambda \quad g: C \vdash \Gamma B\Delta}{f \{g\}: C \vdash \Gamma (A \Leftarrow B) \Lambda\Delta} \{-\}$$

Для этого достаточно положить:

$$f \{g\} = g [\varepsilon^\circ [f]].$$

Если мы теперь введем в нашей системе новую специальную стрелку, выглядящую следующим образом:

$$\beta^{\circ A}_{BC}: (C \Leftarrow A) \Leftarrow (B \Leftarrow A) \vdash C \Leftarrow B,$$

то получим косеквенциальное коимпликативное исчисление GIB° , соответствующее системе минимальной коимпликативной логики IB° . Действительно, с помощью ранее введенных правил нетрудно вывести следующее правило:

$$\frac{f: B \vdash \Delta C}{f_\beta: A \vdash \Delta(C \Leftarrow A)B} \quad (\text{слабая транзитивность})$$

Для этого достаточно положить $f_\beta = \varepsilon^\circ [\varepsilon^\circ [\beta^\circ [f_\varepsilon]]]$.

Аксиому B° получаем теперь в виде следующей стрелки:

$$(\beta^{\circ A}_{BC})_{\varepsilon i}: ((C \Leftarrow A) \Leftarrow (B \Leftarrow A)) \Leftarrow (C \Leftarrow B) \vdash \perp$$

Действуя подобным же образом, мы можем добавить к косеквенциальному коимпликативному исчислению GIB° аксиомы, являющиеся категорными аналогами дуальных аксиом C° , W° , K° :

$$\begin{aligned} \gamma^{\circ A}_{BC}: A \Leftarrow (B \Leftarrow C) \vdash B \Leftarrow (A \Leftarrow C) \\ w^{\circ AB}: A \Leftarrow B \vdash A \Leftarrow (A \Leftarrow B) \\ \kappa^{\circ B}_A: B \Leftarrow A \vdash A \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это ведет к добавлению следующих правил (стрелок):

$$\begin{aligned} & \frac{f: C \vdash \Delta BA}{f_\gamma: C \vdash \Delta AB} \quad (\text{перестановка}) \\ (\text{достаточно положить } f_\gamma &= \varepsilon^\circ [\varepsilon^\circ [\gamma^\circ [f_{\varepsilon\varepsilon}]]]) \\ & \frac{f: B \vdash \Delta AA}{f_w: B \vdash \Delta A} \quad (\text{сокращение}) \\ (\text{достаточно положить } f_w &= \varepsilon^\circ [w^\circ [f_{\varepsilon\varepsilon}]]]) \\ & \frac{f: A \vdash \Delta}{f_\kappa: B \vdash \Delta A} \quad (\text{ослабление}) \end{aligned}$$

(где $f_\kappa = \varepsilon^\circ [\kappa [f]]$).

$GIBCWK^\circ$ -коэкспоненциальную комультикатегорию получаем теперь путем добавления следующих тождеств:

$$f_\beta [i^\circ][i^\circ] = f [i^\circ], \quad \text{для всех } f: A \vdash \Delta B;$$

$$f_{\gamma\gamma} = f, \quad \text{для всех } f: C \vdash \Delta AB;$$

$$f_{iiw} [i^\circ_\perp] = f, \quad \text{для всех } f: C \vdash \Delta A;$$

$$f = \square_A, \quad \text{где } \square_A = (i^\circ_\perp)_\kappa \text{ и } f: \perp \vdash A.$$

Последнее уравнение утверждает, что \perp является инициальным объектом.

Для данного мультиграфа \mathbf{G} мы можем сконструировать коимпликативные исчисления $D^\circ(\mathbf{G})$ и свободную коэкспоненци-

альную комультিকатегорию $F^o(\mathbf{G})$, порожденную \mathbf{G} . Объекты этой комультিকатегории получаются индуктивно из объектов \mathbf{G} с помощью операции \Leftarrow . Ее косеквенции получаются из косеквенций \mathbf{G} путем присоединения базисных косеквенций $1_A, \varepsilon^o_{AB}, i^o_A$ т. д., и формирования новых операций из старых с помощью правил $(-)_\varepsilon, (-)_i$ и т.д. Наконец, тождества между сравнимыми косеквенциями в $F(\mathbf{G})$ будут те и только те, которые следуют из тождеств в \mathbf{G} , и комультикаторные тождества

$$h [g [f]] = h [g] [f], g' [f] [f'] = g' [f'] [f].$$

Помимо этого добавляются еще тождества

$$\varepsilon^o [f_\varepsilon] = f, f_i [i^o] = f,$$

и т. п., рассмотренные ранее.

Введем теперь понятие комультифунктора, используя следующие определения:

Определение 1. Комультифунктор F из комультিকатегории M в комультикатегорию M' представляет собой отображение класса объектов M в класс объектов M' вместе с отображением из класса стрелок M в класс стрелок M' такие, что если $f: B \vdash A_1 \dots A_n$ есть стрелка в M , то $F(f): F(B) \vdash F(A_1) \dots F(A_n)$ есть стрелка в M' и $F(1_A) = 1_{F(A)}, F(g [f]) = F(g) [F(f)]$.

Определение 2. Коэкспоненциальный комультифунктор F из коэкспоненциальной комультикатегории M в коэкспоненциальную комультикатегорию M' представляет собой комультифунктор, сохраняющий коэкспоненциальную структуру, т. е.

$$F(\perp) = \perp, F(A \Leftarrow B) = F(A) \Leftarrow F(B),$$

$$F(\varepsilon^o_{AB}) = \varepsilon^o_{F(A)F(B)}, F(i^o_A) = i^o_{F(A)}.$$

Пусть U будет стирающим комультифунктором, тогда можно доказать, что комультифунктор $\mathbf{G} \rightarrow UF(\mathbf{G})$ будет полным и точным (полнота свидетельствует о том, что комультифунктор не порождает никаких новых косеквенций по сравнению со старыми, а точность свидетельствует об отсутствии новых тождеств между косеквенциями).

Пусть \mathbf{G} будет $GIBCWK^o$ -мультикатегорией. Для коэкспоненциального $GIBCWK^o$ -мультифунктора F (т.е. сохраняющего $BCWK^o$ -структуру \mathbf{G}) имеет место следующая теорема:

Теорема 2. (устранение сечения). Если стрелки $\varepsilon, i, \beta, \gamma, w, k$ заменить на правила $\{ \cdot \}, (-)_i, (-)_\beta, (-)_\gamma, (-)_w, (-)_k$, то любая косеквенция в

$UF(\mathbf{G})$, сконструированная с помощью правил сечения, будет эквивалентна косеквенции, сконструированной без применения правила сечения.

Доказательство проводится дуально соответствующему доказательству для случая мультикатегорий.

ЛИТЕРАТУРА

- [Карпенко 1993] *Карпенко А. С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования, вып. 2, М., Наука, 1993. - С.224-258.
- [Смирнов 1987] *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. М., 1987.
- [Czermak 1971] *Czermak I.* A remark on Gentzen's calculus of sequents // Notre Dam J. Form. Log., 1971, vol. 18.
- [Curry 1969] *Curry H. B.* Modified basic functionality in combinatory logic // Dialectica, No 23, 1969, pp. 83-92.
- [Došen 1988] *K. Došen.* Sequent systems and grupoid models, I and II // Studia Logica, v. 47, No 4, 1988, pp.353-385; Studia Logica, v. 48, No 1, 1989, pp. 41-65; Studia Logica v. 49, No 4, 1990, p. 614.
- [Došen 1992] *K. Došen.* Modal Logic as Metalogic // Journal of Logic, Language and Information, No 1, 1992, pp. 175-201.
- [Došen 1996] *K. Došen.* Deductive Systems // The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 2, No 5, 1996, pp. 243-283.
- [Goodman 1981] *Goodman N. D.* The logic of contradiction // Ztschr. Math. Logik. Grundl. Math., 1981, Bd. 27, N 2.
- [Hindley 1969] *Hindley J. R.* The principal type-scheme of an object in combinatory logic // Transactions of American Mathematical Society, No 146, 1969, p. 29-60.
- [Lambek 1988] *Lambek J.* On the Unity of Algebra and Logic // Categorical Algebra and its Applications / F. Borceux (ed.), Springer, Lecture Notes in Mathematics 1348 (1988).
- [Lambek 1989] *Lambek J.* Multicategories Revisited // Contemporary Mathematics, vol 92, 1989, pp. 217-239.
- [Lambek 1993] *Lambek J.* Logic Without Structure Rules (Another Look at Cut Elimination) // Substructural Logics / K. Došen and Schroeder-Heister (eds.), Oxford University Press, 1993, pp. 179-206.
- [Lambek 1994] *Lambek J.* What is a deductive system? // What is a Logical System? / D. Gabbay and H. Guentner (eds.), Oxford University Press, 1994, pp. 141-189.
- [Lambek Scott 1986] *Lambek J., Scott P. J.* Introduction to higher order categorical logic, Cambridge University Press, London, 1986.
- [Vasyukov 1997] *Vasyukov V. L.* Implicative logics in categories // Bull. Sect. Log., v.26, No 4, 1997, pp. 188-192.