Попов В.М.

ПОГРУЖЕНИЕ ИМПЛИКАТИВНОГО ФРАГМЕНТА КЛАССИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ИМПЛИКАТИВНЫЙ ФРАГМЕНТ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ[1]

Abstract. *A translation from the calculus Cl⊃ which is a formalization of the implicative fragment of classical logic to the calculus Int⊃ which is a formalization of the implicative fragment of intuitionistic logic is constructed. This translation is such that for all formulas A the following condition is satisfied: a formula A is deducible in Cl⊃ iff the translation of A is deducible in Int⊃.*

Исчисление Cl⊃ (одна из формализаций импликативного фрагмента классической логики) погружается в исчисление Int⊃ (одну из формализаций импликативного фрагмента интуиционистской логики) посредством конструируемой ниже операции. Исчисления Cl⊃ и Int⊃ являются пропозициональными исчислениями гильбертовского типа. Алфавиту языка L этих исчислений принадлежат только следующие символы: 1) пропозициональные переменные p_1, p_2, ..., p_n, ...; 2) бинарная логическая связка ⊃ (импликация); 3) скобки),(. Формулы в L (далее просто формулы) определяются обычно, внешние скобки опускаются. Буквы A, B и C (с индексами или без них) используются как переменные для формул. Аксиомы исчисления Int⊃ есть в точности те формулы, каждая из которых имеет вид $A \supset (B \supset A)$ или $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$. Аксиомы исчисления Cl⊃ есть в точности те формулы, каждая из которых есть аксиома исчисления Int⊃ или имеет вид $((A \supset B) \supset A) \supset A$. Единственным правилом вывода этих исчислений является modus ponens $A \supset B, A / B$. Доказательства в этих исчислениях строятся стандартно. На множестве всех формул следующим образом определяются две унарные операции Сд и T:

$$\text{Сд}(p_i) = p_{i+1},\ \text{Сд}(A \supset B) = \text{Сд}(A) \supset \text{Сд}(B);$$
$$T(p_i) = (p_i \supset p_1) \supset p_1,\ T(A \supset B) = T(A) \supset T(B).$$

Композиция Сд ∗ T есть погружающая операция исчисления Cl⊃ в исчисление Int⊃, т.е. имеет место следующая теорема: *фор-*

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ, грант № 98-03-04220.

мула A *доказуема в исчислении* Cl⊃ *т.т.т. формула* T(Сд(A)) *доказуема в* Int⊃. Для доказательства этой теоремы достаточно доказать следующие утверждения У1 и У2.

У1: *если формула A доказуема в* Cl⊃, *то формула* T(Сд(A)) *доказуема в* Int⊃.

У2: *если формула* T(Сд(A)) *доказуема в* Int⊃, *то формула* A *доказуема в* Cl⊃.

Для доказательства У1 достаточно доказать: (1) в Int⊃ доказуем Сд∗T-образ любой аксиомы исчисления Cl⊃, (2) для любых формул A и B верно следующее: если T(Сд(A)) и T(Сд(A ⊃ B)) доказуемы в Int⊃, то формула T(Сд(B)) доказуема в Int⊃. Доказательство пункта (2) легко получить, заметив, что для любых формул A и B T(Сд(A ⊃ B)) есть T(Сд(A)) ⊃ T(Сд(B)).

Доказательство пункта (1). Для любых формул A и B формула T(Сд(A)) ⊃ (T(Сд(B)) ⊃ T(Сд(A))) доказуема в Int⊃, т.к. является аксиомой этого исчисления. В силу определений операций Сд и T эта формула есть формула T(Сд(A ⊃ (B ⊃ A))). Поэтому для любых формул A и B формула T(Сд(A ⊃ (B ⊃ A))) доказуема в Int⊃. Аналогично доказывается, что для любых формул A, B и C в Int⊃ доказуема формула T(Сд((A ⊃ B) ⊃ ((A ⊃ (B ⊃ C)) ⊃ (A ⊃ C)))). Доказательству того, что Сд∗T-образ всякой формулы, имеющей вид ((A ⊃ B) ⊃ A) ⊃ A, доказуем в Int⊃, предпосылаются следующие лемма 1 и лемма 2.

Лемма 1. *Для всякой формулы* A *существует такое целое положительное число* i *и существует такое целое неотрицательное число* n, *что* T(Сд(A)) *есть* $A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots)$.

Лемма 2. *Для всяких целых положительных чисел* i *и* j *и всяких целых неотрицательных чисел* n *и* m *в исчислении* Int⊃ *доказуема любая формула* $(((A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots)) \supset(B_1 \supset (\ldots\supset (B_m \supset ((p_j \supset p_1) \supset p_1))\ldots))) \supset (A_1 \supset(\ldots \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots))) \supset (A_1 \supset (\ldots\supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots))$.

Здесь и далее при n = 0 формула $A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots)$ есть просто формула $(p_i \supset p_1) \supset p_1$, аналогично для формулы $B_1 \supset (\ldots\supset (B_m \supset ((p_j \supset p_1) \supset p_1))\ldots)$.

Доказательство леммы 1 проводится индукцией по числу вхождений импликации в формулу A.

Поскольку для Int⊃ известны разрешающие процедуры (например, разрешающая процедура Генцена, опирающаяся на построение соответствующего секвенциального исчисления), доказательство леммы 2 сводится к упражнению в применении такой процедуры.

Покажем теперь, что для всяких формул A и B в Int$\supset$ доказуема формула T(Сд(((A $\supset$ B) $\supset$ A) $\supset$ A)).

В силу определений операций Сд и T для всяких формул A и B формула T(Сд(((A $\supset$ B) $\supset$ A) $\supset$ A)) есть формула ((T(Сд(A)) $\supset$ T(Сд(B))) $\supset$ T(Сд(A))) $\supset$ T(Сд(A)). По лемме 1 T(Сд(A)) есть $A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots)$ и T(Сд(B)) есть $B_1 \supset (\ldots\supset (B_m \supset ((p_j \supset p_1) \supset p_1))\ldots)$ для некоторых целых положительных чисел i и j и некоторых целых неотрицательных чисел n и m. Но тогда формула T(Сд(((A $\supset$ B) $\supset$ A) $\supset$ A)) есть формула $(((A_1 \supset (\ldots \supset (A_n \supset((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots)) \supset(B_1 \supset (\ldots\supset (B_m \supset ((p_j \supset p_1) \supset p_1))\ldots))) \supset (A_1 \supset(\ldots \supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots))) \supset (A_1 \supset (\ldots\supset (A_n \supset ((p_i \supset p_1) \supset p_1))\ldots))$ для некоторых целых положительных чисел i и j и некоторых целых неотрицательных чисел n и m. По лемме 2 последняя формула доказуема в Int$\supset$. Следовательно, в Int$\supset$ доказуема формула T(Сд(((A $\supset$ B) $\supset$ A) $\supset$ A)).

Утверждение У1 доказано.

Доказательству утверждения У2 предпосылается следующая лемма 3.

Лемма 3. *Если* p_1 *не входит в формулу* A *и формула* T(A) *доказуема в* Int$\supset$, *то* A *доказуема в* Cl$\supset$.

Доказательство.

1) Переменная p_1 не входит в формулу A (условие).
2) Формула T(A) доказуема в Int$\supset$ (условие).
3) Формула T(A) доказуема в Cl$\supset$ (из пункта 2 и того, что множество всех формул, доказуемых в Int$\supset$, включается во множество всех формул, доказуемых в Cl$\supset$).
4) Формула T(A) есть классическая тавтология в языке L (из пункта 3 и того известного факта, что для всякой формулы A имеет место следующее: A доказуема в Cl$\supset$ т.т.т. A есть классическая тавтология).
5) Значение формулы T(A) есть И при всякой оценке языка L в матрице ***M***$\supset$ = < {И, Л}, {И}, $\supset$ >, где операция $\supset$ определяется таблицей для классической импликации (из пункта 4).
6) Значение формулы T(A) есть И при всякой такой оценке языка L в ***M***$\supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л (из пункта 5).
7) Для всякой формулы B: если p_1 не входит в формулу B, то значение формул T(B) $\supset$ B и B $\supset$ T(B) есть И при всякой такой оценке языка L в ***M***$\supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л (доказывается индукцией по числу вхождений импликации в B).

8) Значение формулы T(A) $\supset$ A есть И при всякой такой оценке языка L в $\boldsymbol{M}\supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л (из пунктов 1 и 7).
9) Если при всякой оценке языка L в $\boldsymbol{M}\supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л, значение формулы T(A) есть И, то при всякой такой оценке языка L в $\boldsymbol{M}\supset$ значение формулы A есть И (из пункта 8 и табличного определения импликации).
10) При всякой оценке языка L в $\boldsymbol{M}\supset$, при которой значение переменной p_1 есть Л, значение формулы A есть И (из пунктов 6 и 9).
11) При всякой оценке языка L в $\boldsymbol{M}\supset$ значение формулы A есть И (из пунктов 10 и 1).
12) Формула A есть классическая тавтология (из пункта 11).
13) Формула A доказуема в Cl$\supset$ (из пункта 11 и известного факта, упоминавшегося в пункте 4).

Лемма 3 доказана.

Доказательство утверждения У2.

1) Формула T(Сд(A)) доказуема в Int$\supset$ (условие).
2) Переменная p_1 не входит в Сд(A) (из определения операции Сд).
3) Формула Сд(A) доказуема в Cl$\supset$ (из пунктов 1, 2 и леммы 3).
4) Для всякой формулы B справедливо: формула B доказуема в Cl$\supset$ т.т.т. формула Сд(B) доказуема в Cl$\supset$ (из того известного факта, что множество всех формул, доказуемых в Cl$\supset$, замкнуто относительно подстановки).
5) Формула A доказуема в Cl$\supset$ (из пунктов 3 и 4).

Утверждение У2 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.